

Tesis de Licenciatura

EVOLUCIÓN ESTELAR EN CÚMULOS GLOBULARES

Determinación de edades

Autor: *Rodolfo Enrique Vallverdú*

Director: *Dr. Omar Gustavo Benvenuto*



Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Universidad Nacional de La Plata

Paseo del Bosque S/N, (1900) La Plata, Argentina

*Que alguien piense que tu estas equivocado,
que les puedas parecer un bicho raro,
eso no es malo,
eso no es malo.*

Dedicatoria

Quiero dedicar esta Tesis a mis padres, Ernesto y Mirtha, que me han dado toda su confianza y apoyo. También a mi hermana Roxana y a mi sobrina Agustina, y a todos mis amigos y afectos cercanos, que de alguna manera también han colaborado con este trabajo, aún sin saberlo, brindando siempre su aliento.

*La realidad duerme sola en un entierro,
y camina triste por el sueño del más bueno,
La realidad baila sobre la mentira
y en un bolsillo tiene amor y alegrías,
un Dios de fantasías, la guerra y la poesía.*

Abstract

En el presente trabajo, tratamos de determinar la mayor conveniencia en usar la *Teoría de Canuto & Mazzitelli*, en lugar de la *Teoría de la Mixing Length*, para el tratamiento del transporte convectivo en los interiores estelares.

Para ello, a partir del problema suscitado con la edad de los cúmulos globulares a raíz de la recalibración de la *Constante de Hubble* (H_0), y por ende de la edad del universo, nosotros calculamos varias isócronas utilizando ambas teorías y para dos metalicidades diferentes. Comparando ambos conjuntos de isócronas intentamos ver las diferencias entre ambas y sus implicaciones en el cálculo de las edades de los cúmulos globulares.

En el presente trabajo, logramos demostrar que las edades de los cúmulos globulares podrían reducirse entre 2.5×10^9 y 0.5×10^9 años si utilizamos isócronas calculadas con la *Teoría de Canuto & Mazzitelli* en vez de la tradicional *Teoría de la Mixing Length*.

Índice General

Abstract	I
Índice General	II
1 Introducción	1
1.1 Planteo del Problema	1
1.2 Posibles Soluciones	2
2 Las Teorías de Convección	3
2.1 La Teoría de la Mixing Length	3
2.2 La Teoría de Canuto & Mazzitelli	11
2.2.1 Un poco de historia	11
2.2.2 Una comparación entre el nuevo modelo y la MLT	13
2.2.3 La expresión de F_c	14
2.2.4 La MLT como un caso particular de la teoría general	17
2.2.5 El nuevo flujo convectivo	19
2.2.6 Solución de las ecuaciones cuando el flujo total es dato	21
2.2.7 La longitud de mezcla Λ y los efectos de la compresibilidad	21
3 El Cálculo de los Tracks Evolutivos	26
3.1 La Evolución de una Estrella en una Computadora	26
3.2 Consideraciones	27
3.3 Comparaciones	27
4 El Cálculo de las Isócronas	32
4.1 Isócronas en el Plano Teórico y Observacional	32
5 Transformación del Plano Teórico al Observacional	33
5.1 La Transformación de Flower	33
5.2 La Transformación de VandenBerg	34
5.3 Comparación entre las Dos Transformaciones	36
6 Otras Consideraciones	37
6.1 Cálculo de la fracción de masa de metales Z	37

6.2	Diagramas H-R de los Cúmulos Globulares	39
7	Resultados	40
7.1	Z=0.0010	41
7.1.1	Mixing Length, $\alpha = 1.4$	41
7.1.2	Mixing Length, $\alpha = 1.5$	41
7.1.3	Mixing Length, $\alpha = 1.6$	42
7.1.4	Canuto & Mazzitelli	43
7.2	Z=0.0001	48
7.2.1	Mixing Length, $\alpha = 1.4$	48
7.2.2	Mixing Length, $\alpha = 1.5$	48
7.2.3	Mixing Length, $\alpha = 1.6$	49
7.2.4	Canuto & Mazzitelli	49
7.3	Comparación de las isócronas calculadas con las distintas teorías de convección	55
8	Conclusiones	61
	Referencias	62
	Índice de Citas	63

*Vida, a la muerte le queda un tiro,
y un corazón te defiende,
y hace de tus alas grandes,
una historia para siempre por el amor.*

1 Introducción

1.1 Planteo del Problema

Los cúmulos globulares son de los objetos más viejos que pueden encontrarse en el Universo. Por lo tanto, es lógico suponer que el Universo tiene una edad mayor que la del cúmulo globular más viejo.

Una de las formas de determinar la edad del Universo es por medio de la constante de Hubble, H_0 . A lo largo de la historia, esta constante ha tomado valores que van desde $50 \text{ km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ hasta $100 \text{ km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, con lo cual la edad del Universo ha ido cambiando con el tiempo de acuerdo con el valor de H_0 aceptado en cada época. A partir de la observación de Cepheidas en la galaxia M96, Tanvir *et al.* (Tanvir et al., 1995) encuentran un valor de la constante de Hubble de $H_0 = 69 \pm 8 \text{ km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Este valor se corresponde con una edad, dentro de la cosmología standard de *Einstein-de Sitter* ($\Omega = 1$, $\Lambda = 0$), de $9.5 \times 10^9 \pm 1.1 \times 10^9$ años. Las edades de los cúmulos globulares más viejos se estiman desde 12×10^9 hasta 17×10^9 años, con lo cual, sólo los valores más bajos de este rango son marginalmente consistentes con el modelo de *Einstein-de Sitter*.

Más recientemente Kavelaars *et al.* (Kavelaars et al., 2000), utilizando imágenes de la WFPC2 del *Hubble Space Telescope* (HST) de los cúmulos globulares en NGC 4874, la galaxía cD central del cúmulo de Coma, hallaron un valor para la constante de Hubble de $H_0 = 69 \pm 9 \text{ km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Este es el mismo valor obtenido por Tanvir *et al.*, aunque con un error mayor.

En otros trabajos recientes, Kundić *et al.* (Kundić et al., 1997) hallaron un valor de $H_0 = 64 \pm 13 \text{ km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (para $\Omega = 1$). Asimismo, Krauss (Krauss, 1998) encontró $H_0 < 67 \text{ km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ y Baum (Baum, 1998) halló un valor $H_0 = 61 \text{ km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, lo que corresponde a una edad de $12.5 \times 10^9 \pm 1.5 \times 10^9$ años.

1.2 Posibles Soluciones

Ante este problema, en principio, tenemos tres posibles alternativas: La primera, es que la determinación de la edad del Universo es errónea; la segunda, que la determinación de la edad de los cúmulos globulares es la incorrecta; y la tercera, que ambas esten mal.

En cuanto a la primera, las nuevas técnicas aplicadas para la determinación de la constante de Hubble, H_0 , utilizando el Telescopio Espacial Hubble (HST), nos permite mejorar la precisión de las observaciones respecto de las pasadas. En este trabajo, no nos ocuparemos de analizar este aspecto.

Por el contrario, en los cúmulos globulares tenemos que las estrellas que determinan la edad del mismo son estrellas de baja masa (menos de $1 M_{\odot}$). Estas estrellas presentan envolturas convectivas y para realizar el cálculo de las edades, se generan modelos teóricos de estas estrellas, y en estos modelos se utiliza la *Mixing Length Theory* (MLT), la cual depende siempre de un parámetro, la longitud de mezcla, cuyo valor es establecido por métodos muy discutibles, por ejemplo, ajustando el radio del sol, etc.

Esta sería la fuente de error, ya que los tracks evolutivos se ven fuertemente afectados por la elección de dicho parámetro, y en consecuencia el cálculo de las isócronas.

La más reciente teoría de convección, propuesta por Canuto & Mazzitelli, no utiliza parámetros arbitrarios, lo cual nos permitiría una descripción más realista de las estrellas con envolturas convectivas.

Algunos investigadores, como el caso de Don Vandenberg, plantean que la elección de una u otra teoría de convección no afecta sustancialmente a los tracks evolutivos, y por lo tanto, la solución al problema no estaría encaminada en ese sentido.

Nosotros, al igual que Canuto & Mazzitelli, pensamos que esta es la causa de los errores en la determinación de las edades de los cúmulos globulares, y el demostrar esto es el objetivo del presente trabajo.

*Podrán pasar mil años,
veras muchos caer,
pero si nos juntamos,
no nos van a detener.*

2 Las Teorías de Convección

2.1 La Teoría de la Mixing Length

Podemos escribir la ecuación de transporte radiativo para interiores estelares como,

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3 \bar{\kappa} \rho}{16 \pi a c} \frac{L(r)}{r^2 T^3} \quad (1)$$

donde T es la temperatura, $L(r)$ es la luminosidad local, r es la coordenada radial, $\bar{\kappa}$ es la opacidad media de Roseland, ρ es la densidad, $a = 7.57 \times 10^{-15} \text{erg cm}^{-3} \text{K}^{-4}$ es la constante de densidad de radiación, y c es la velocidad de la luz. A partir de (2,1) está claro que si la opacidad del material estelar se vuelve bastante alta (por el origen físico de la opacidad y su dependencia con la temperatura), entonces un gradiente de temperatura bastante empinado debe surgir para mantener el flujo de energía. Un gradiente de temperatura muy empinado hace inestable al transporte de energía en la estrella.

Para ver por qué esto es así, consideremos un pequeño elemento de material de la estrella con densidad ρ_1 y presión P_1 . Imaginemos que este elemento de material se eleva un poco en la estrella, y que lo hace adiabáticamente, es decir sin ganancia ni pérdida de calor por parte del elemento. Si sus densidad y presión inicial fueron ρ_1, P_1 , y sus densidad y presión después de elevarse una corta distancia son ρ_2, P_2 , entonces para el movimiento adiabático,

$$P_1 \rho_1^{-\gamma} = P_2 \rho_2^{-\gamma} \quad (2)$$

donde γ es la razón entre el calor específico a presión constante (C_p) y el calor específico a volumen constante (C_v). Supongamos ahora que el elemento de material mantiene la misma presión que sus alrededores, de otra manera, se expandiría o contraería hasta que el equilibrio de la presión sea restaurado. En efecto, suponemos que la escala de tiempo para remover el desequilibrio de la presión es muy corto comparado con la escala de tiempo para establecer el equilibrio térmico. Sabemos que las escalas de tiempo para ajustar los desbalances periódicos para toda una estrella son aproximadamente de 30 minutos para el

Sol. Mostraremos después que las escalas de tiempo convectivas típicas en la envoltura solar son de aproximadamente un mes. Ahora, si el pequeño elemento de material se encuentra a una densidad más baja que la de sus alrededores, este continuará elevándose a causa de las fuerzas de flotación en el campo gravitacional de la estrella. En un campo gravitacional g , la fuerza de flotación por unidad de volumen sobre una fluctuación de densidad $\Delta\rho$ es,

$$f = -g\Delta\rho \quad (3)$$

Por eso, si el módulo del gradiente de densidad real en la estrella es menor que el que experimentaría un elemento en ascenso adiabático, la estrella estaría en convección inestable. Ya que hemos supuesto que la presión del elemento y sus alrededores debe ser la misma, podríamos establecer este criterio de inestabilidad diciendo que el gradiente de temperatura real debería exceder al gradiente de temperatura adiabático que debería ser experimentado por un elemento ascendiendo adiabáticamente; esto es, tenemos inestabilidad si:

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{rad} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{ad} \quad (4)$$

o,

$$\left| \frac{d \ln T}{dr} \right|_{rad} > \left| \frac{d \ln T}{dr} \right|_{ad} \quad (5)$$

o, dividiendo ambos miembros por $|d \ln P/dr|$,

$$\left| \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_{rad} > \left| \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_{ad} \quad (6)$$

o finalmente

$$\left| \frac{d \ln P}{d \ln T} \right|_{rad} < \left| \frac{d \ln P}{d \ln T} \right|_{ad} \quad (7)$$

A partir de la relación adiabática,

$$P T^{\gamma/(1-\gamma)} = cte \quad (8)$$

vemos que el gradiente $|d \ln P/d \ln T|_{ad}$ está dado por:

$$\left| \frac{d \ln P}{d \ln T} \right|_{ad} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} = n + 1 \quad (9)$$

Así el criterio de inestabilidad puede ser escrito:

$$\left| \frac{d \ln P}{d \ln T} \right| < \frac{\gamma}{\gamma - 1} \quad (10)$$

De aquí se ve que la razón de calores específicos, γ , es una cantidad importante en la determinación de la estabilidad de una estrella frente a la convección. Claramente la inestabilidad convectiva es factible de ocurrir cuando:

1. La opacidad es alta.
2. La luminosidad es alta en el interior estelar profundo, cuando r es pequeño (por ej., las regiones centrales de estrellas masivas en la secuencia principal).
3. El valor de $n = 1/(\gamma - 1)$ es alto, por ej., cuando γ es cercano a la unidad, lo cual puede ocurrir en regiones en donde la ionización tiene lugar, o en protoestrellas en regiones de disociación molecular.

Para un gas perfecto no degenerado,

$$C_p - C_v = \frac{k}{\mu m_H} \quad (11)$$

y

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{C_p}{C_p - C_v} = \frac{C_p}{k} \mu m_H \quad (12)$$

En consecuencia, $|d \ln P/d \ln T|_{ad}$ es grande cuando C_p es grande. Para un gas clásico monoatómico, $\gamma = 5/3$ y $\gamma/(\gamma - 1) = 2.5$. Algunas veces es más fácil pensar en el gradiente físico de temperatura adiabático, antes que en el gradiente adimensional logarítmico $d \ln P/d \ln T$. El gradiente adiabático es el originado si la relación entre P , ρ y T es adiabática. Escribiendo $P = K T^{n+1}$, donde K es una constante, tenemos,

$$\rho = \frac{K \mu m_H}{k} T^n \quad (13)$$

y así la ecuación de equilibrio hidrostático requiere que

$$K (n + 1) T^n \frac{dT}{dr} = -\frac{g \mu m_H}{k} K T^n \quad (14)$$

(este resultado es cierto en cualquier lugar de la estrella, no sólo donde g es constante). El gradiente adiabático es, por lo tanto,

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = -\frac{\mu m_H}{k} \frac{g}{m+1} = -\frac{\mu m_H g}{k} \frac{\gamma-1}{\gamma} \quad (15)$$

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = -\frac{\mu m_H g}{k} \frac{C_p - C_v}{C_p} \quad (16)$$

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = -\frac{g}{C_p} \quad (17)$$

La ecuación (2,17) es particularmente instructiva en mostrar como un calor específico alto lleva a un bajo gradiente adiabático, y en consecuencia a una inestabilidad convectiva. Otra forma de interpretar el criterio de estabilidad para el transporte radiativo es examinar la luminosidad máxima L_{max} en un punto r que puede ser debida al transporte radiativo. Combinando (2,1) y

$$P = \sum_i \frac{\bar{n}_i}{m_i} \rho k T \equiv \rho \frac{K T}{\mu m_H}$$

con la igualdad $(dT/dr)_{rad} = (dT/dr)_{ad}$ y usando la ecuación de equilibrio hidrostático, obtenemos la relación

$$L_{max}(r) = 1.23 \times 10^{-18} \mu \frac{m(r)}{\bar{\kappa}} \left(\frac{T^3}{\rho}\right) = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{m_H}{k} \frac{16 \pi a c G}{3} \mu \frac{m(r)}{\bar{\kappa}} \left(\frac{T^3}{\rho}\right) \quad (18)$$

El transporte radiativo es estable mientras $L(r) < L_{max}(r)$. Varias conclusiones útiles se siguen de (2,18). Por simplicidad, consideremos sólo los casos en los cuales T^3/ρ es estrictamente constante en toda la estrella. En la envoltura, $m(r) \simeq M$ y L_{max} es proporcional a $\bar{\kappa}^{-1}$. Cuando la opacidad específica $\bar{\kappa}$ es grande (como en zonas de ionización), L_{max} se vuelve pequeño y la convección aparece.

El criterio de inestabilidad requiere que el gradiente de temperatura real exceda al gradiente de temperatura adiabático. Esta diferencia es llamada como gradiente superadiabático,

$$\frac{d\Delta T}{dr} = \frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} \quad (19)$$

Consideremos ahora la cantidad relativa de energía llevada por convección y por radiación cuando una región se vuelve convectivamente inestable. Estrictamente hablando, la aproximación que hemos hecho para la convección adiabática requiere que haya una muy pequeña transferencia adicional de energía por radiación, de otra manera la convección sería,

por definición, no adiabática. Trataremos de mostrar que, al menos en el interior profundo de la estrella, la convección es un medio extremadamente eficiente de transporte de energía, tan eficiente, de hecho, que cuando la convección tiene lugar, podemos ignorar el gradiente superadiabático y tomar el gradiente adiabático como el gradiente de temperatura real existente en la estrella. Desafortunadamente, esto no es del todo cierto para las capas exteriores de la estrella, y una adecuada teoría de convección en atmósferas y envolturas estelares es necesaria.

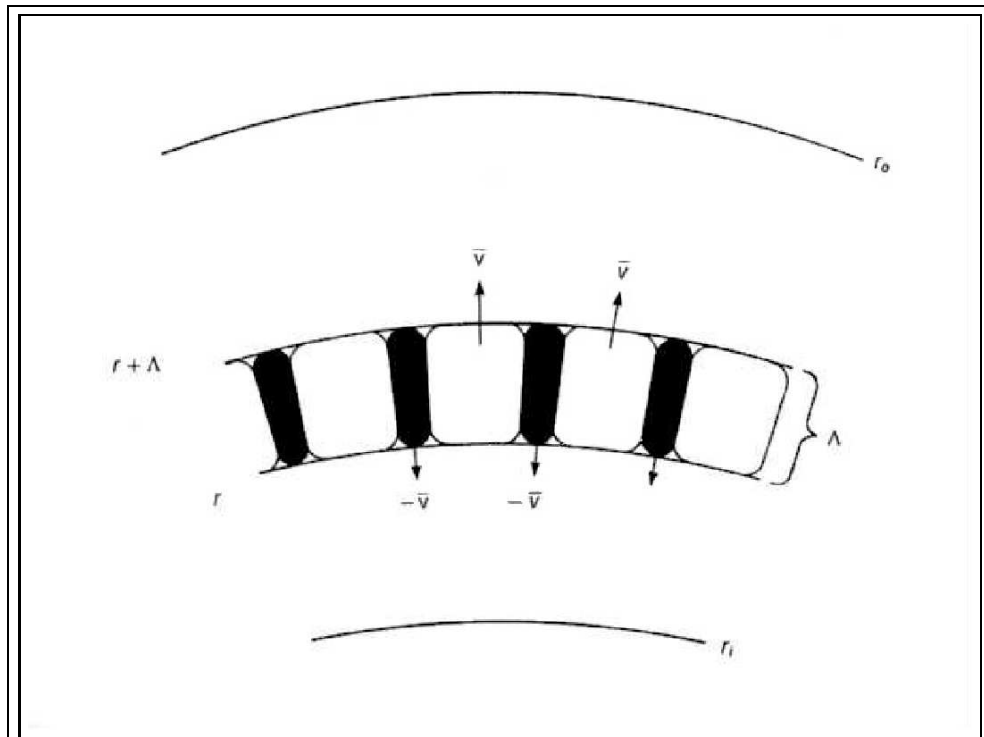


Figura 1: Capa de los elementos convectivamente inestables en r de una zona convectiva de radio interior r_i y radio exterior r_o . La velocidad del elemento (promediada en Λ) es \bar{v} . Los elementos sombreados están descendiendo, mientras que los vacíos están subiendo.

Limitaremos nuestra discusión a un modelo simple de transporte de energía conocido como *Mixing Length Theory* (MLT). En este modelo, los elementos convectivos son considerados con tamaños característicos $\Lambda(r)$ en cada r dentro de una zona convectiva (ver figura [2,1]). El flujo de un elemento (por ejemplo, uno ascendente) pasa cerca de un elemento (presumiblemente descendente) produciendo aumentos inestables de cualquier irregularidad en la forma del elemento, lo cual conduce a turbulencias y a la eventual mezcla del elemento ascendente con el material circundante. De esta forma el elemento más caliente sube, viajan-

do una distancia característica de orden Λ antes de mezclarse con el material circundante, mientras que el más frío se hunde más o menos la misma distancia antes de mezclarse de forma similar con sus alrededores. Claramente en una zona convectiva la densidad y la temperatura dependerán realmente del ángulo (para un r fijo). Sin embargo, nosotros debemos definir valores promedio de estas cantidades (promediando sobre una capa de espesor Λ en r). Así un elemento de densidad promedio ρ y temperatura T de una capa de espesor Λ en una zona convectiva será estable. En efecto, el análisis de estabilidad desarrollado anteriormente debe ser estimado comparando la temperatura y la densidad dentro del elemento con estos valores promedio.

Si un elemento de material es ascendente, este es menos denso que sus alrededores y por lo tanto de mayor temperatura (ya que $P \sim \rho T$ y esto mantiene el equilibrio de presión). Por lo tanto transporta energía térmica hacia afuera. Si tenemos un exceso de temperatura ΔT relativo a sus alrededores, tiene entonces una deficiencia de la densidad

$$\Delta\rho \simeq -\frac{\rho}{T} \Delta T \quad (20)$$

y está así sujeta a una fuerza de flotación por unidad de volumen:

$$f = -g \Delta\rho = \frac{g\rho}{T} \Delta T \quad (21)$$

La ecuación de movimiento de este elemento ascendente de fluido es

$$\frac{d^2r}{dr^2} = g \frac{\Delta T}{T} \quad (22)$$

Si ponemos algunos números típicos para el interior solar [$g \approx g_{\odot}/2 \simeq 10^4 \text{cm}/\text{seg}^2$ (en la superficie) y $T \approx 10^7 \text{K}$] y para calcular suponemos $\Delta T \simeq 1\text{K}$, entonces el tiempo que le toma a un elemento viajar una fracción α del radio solar (pongamos $\alpha R_{\odot} \sim \Lambda$) es aproximadamente

$$t \sim \left(\frac{\alpha R_{\odot} T}{g \Delta T} \right)^{1/2} \simeq \alpha^{1/2} \times 10^7 \text{seg} \simeq \frac{\alpha^{1/2}}{3} \text{años} \quad (23)$$

El valor de α no es bien conocido, ya que no conocemos el tamaño de las celdas de convección; es decir, no sabemos cuan lejos el elemento se mueve antes de mezclarse con sus alrededores. Suponiendo $\alpha \simeq 1/10$ ¹, la escala de tiempo para la convección, para un exceso

¹Esto es característico de los núcleos estelares. En las regiones externas de una estrella, usualmente se utiliza un valor proporcional a la altura de escala de la presión $(d \ln P / dr)^{-1}$

de temperatura de un grado, es de alrededor de un mes. Esto es, como bien hemos visto, un rate bastante rápido de transporte de energía.

El flujo de energía convectiva está dado por el producto de la energía térmica por gramo transportado por el elemento fluido moviendose a presión constante, $C_p \Delta T$, por el flujo másico $\rho \bar{v}/2$ (donde el factor $1/2$ aparece porque sólo la mitad de la materia se mueve hacia afuera en cualquier tiempo),

$$\mathfrak{F}_{conv} = \frac{1}{2} \rho \bar{v} C_p \Delta T \text{ erg cm}^{-2} \text{ seg}^{-1} \quad (24)$$

donde el promedio es trasladado hacia afuera por las componentes verticales de las velocidades de los elementos turbulentos. Una cruda estimación de una velocidad típica es (a partir de la ecuación de movimiento (2,22))

$$\bar{v} = \left(\frac{g \alpha R_{\odot} \Delta T}{T} \right)^{1/2} \quad (25)$$

El flujo convectivo de energía es, por lo tanto,

$$\mathfrak{F}_{conv} = \frac{1}{2} \left(\frac{g \alpha R_{\odot} \Delta T}{T} \right)^{1/2} \rho C_p \Delta T \quad (26)$$

Esta ecuación puede ser escrita en términos del gradiente de temperatura superadiabático, ya que sólo si el gradiente de temperatura realmente es superadiabático habrá realmente un exceso de temperatura en el elemento ascendente. Si el gradiente superadiabático es $d(\Delta T)/dr$, entonces podemos escribir,

$$\Delta T \simeq \alpha R_{\odot} \frac{d\Delta T}{dr} \quad (27)$$

y

$$\mathfrak{F}_{conv} = \frac{1}{2} \rho C_p \left(\frac{g}{T} \right)^{1/2} (\alpha R_{\odot})^2 \left(\frac{d\Delta T}{dr} \right)^{3/2} \quad (28)$$

Ahora nos preguntamos que gradiente superadiabático sería necesario si el flujo convectivo reemplazara a todo el transporte de energía de la estrella. Esto es, ponemos el lado izquierdo igual a $L/4\pi r^2$, y obtenemos

$$L(r) = \frac{4 \pi r^2}{2} \rho C_p \left(\frac{g}{T} \right)^{1/2} (\alpha R_{\odot})^2 \left(\frac{d\Delta T}{dr} \right)^{3/2} \quad (29)$$

Estamos en posición de “acertar” en la mayoría de estos números, con la posible excepción de C_p . Por el momento supondremos que tenemos un gas perfecto monoatómico en el cual $\gamma = 5/3$. Entonces, para el Sol encontramos

$$\left(\frac{d\Delta T}{dr}\right)_{\odot} \simeq \frac{10^{-11}}{\alpha} \text{ deg/cm} \quad (30)$$

Para $\alpha \simeq 0.1$ da $d\Delta T/dr \simeq 10^{-10} \text{ deg cm}^{-1}$. A partir que el gradiente de temperatura real en una estrella similar al Sol es del orden de $T_{\odot}/R_{\odot} \simeq 10^7/10^{11} = 10^{-4} \text{ deg cm}^{-1}$, vemos que el gradiente superadiabático requerido para transportar el total de la luminosidad solar es sólo una millonésima parte del total del gradiente. Así el gradiente de temperatura real es extremadamente cercano al adiabático, toda vez que la energía está siendo transportada íntegramente por convección. En interiores estelares, entonces, es una muy buena aproximación decir que, si la convección ocurre, el gradiente de temperatura es igual al adiabático. Entonces podemos reemplazar (2,1) por la relación

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (31)$$

la cual se sigue inmediatamente a partir de la relación $P = KT^{\gamma/(\gamma-1)}$, con K constante.

La mayor fuente de incerteza en el análisis precedente es la cantidad α o αR , la longitud del camino recorrido por el elemento turbulento antes de ser destruido o que pierda su identidad. Esta distancia característica es usualmente llamada *longitud de mezcla*, y la teoría bastante simplificada que la utiliza es denominada *Mixing Length Theory* (MLT). Obviamente esta no es una teoría adecuada, ya que, entre otras cosas, no predice un valor para la longitud de mezcla, el cual debe ser elegido según algunos métodos cuestionables. Además, si la convección tiene lugar cerca de la superficie de la estrella, encontramos que se requiere un gran exceso en el gradiente de temperatura real respecto del gradiente adiabático, ya que la convección cerca de la superficie estelar usualmente ocurre porque el calor específico es alto (esto ocurre en la región de la estrella en donde, digamos, el hidrógeno está parcialmente ionizado, que es, donde la mayor parte de la energía calórica recibida es usada para la ionización y una muy pequeña parte es usada para elevar la temperatura). Cuando el calor específico es alto, el gradiente adiabático es bajo; así la convección, por si misma, es relativamente menos eficiente en transportar energía.

Además, la *longitud de mezcla* es presumiblemente no mucho mayor que la altura de escala local, y la velocidad apropiada para la convección turbulenta es usualmente limitada por la velocidad del sonido, $c_s = (\gamma P/\rho)^{1/2}$, de otra manera resultarían movimientos supersónicos,

y se generarían ondas de choque. Hay alguna evidencia de que la corona solar es calentada por ondas de choque generadas en la zona convectiva cercana a la superficie del Sol.

Supongamos, en principio, una estrella totalmente convectiva, esto es, que tendría transferencia de energía por convección en todas partes. En las regiones donde el hidrógeno está completamente ionizado, tal estrella tendría un comportamiento muy similar a un gas clásico, monoatómico, perfecto, con $\gamma = 5/3$, y tendría la estructura de una polítropa de $n = 1.5$. En las capas más externas de esta estrella, la energía debe ser transferida radiativamente. Por lo tanto, los resultados de la polítropa de $n = 1.5$ no pueden ser llevados completamente a la superficie de esta estrella. En estrellas que están ligadas gravitacionalmente, pero que aún no han alcanzado la temperatura para la ignición del hidrógeno (alrededor de $10^7 K$), están probablemente cerca de ser totalmente convectivas, porque son muy frías y contienen zonas apreciables de elevada capacidad calórica donde el H_2 está siendo disociado, y el H está siendo ionizado. Tales estrellas están contrayéndose en camino hacia la secuencia principal.

2.2 La Teoría de Canuto & Mazzitelli

En los interiores estelares, la turbulencia convectiva está caracterizada por burbujas (torbellinos) de todos los tamaños y la compresibilidad del material. La *Mixing Length Theory* (MLT) realiza dos suposiciones en tal sentido: primero, que hay un único tamaño de burbuja (*eddy*), y segundo, que todo el tratamiento es realizado suponiendo que el material es incompresible (la velocidad del sonido es finita).

Vittorio M. Canuto e Italo Mazzitelli (Canuto and Mazzitelli, 1991) corrigen la primera aproximación de la MLT. Utilizando dos modernas teorías de turbulencia, ellos calculan un espectro completo de burbujas y proponen una nueva fórmula para el flujo convectivo turbulento F_c para reemplazar la expresión correspondiente a la MLT. En regímenes altamente convectivos, este nuevo flujo es hasta 10 veces mayor que el calculado con la MLT.

En cuanto a la segunda aproximación de la MLT, ellos mantuvieron la condición de incompresibilidad, pero mejoraron la MLT empleando dos expresiones para la longitud de mezcla: la standard $\Lambda = \alpha H_p$ y una nueva expresión libre de parámetros ajustables, $\Lambda = z$, donde z es la distancia a la parte superior de la zona convectiva.

2.2.1 Un poco de historia

Las comparaciones entre la evolución estelar teórica y los datos observacionales han sido posibles luego de que en diversos trabajos (Biermann, 1948), (Vitense, 1953), y (Böhm-

Vitense, 1958) se propusiera usar la MLT para tratar la convección en las estrellas. La MLT fue propuesta un siglo atrás, y fue difundida entre las escuelas de dinámica de fluidos por Prandtl (Prandtl, 1925) y von Kármán. Al ser aplicada a diversos problemas, digamos *terrenales*, los resultados fueron sorprendentemente buenos, más al tener en cuenta que un fenómeno tan complejo como la turbulencia podía ser descrito con un modelo simple que sólo tenía un parámetro ajustable, la *longitud de mezcla*. Estos éxitos hicieron que se la aplicara para describir los interiores estelares.

Mientras que la MLT es una herramienta útil en algunos problemas astrofísicos, en otros que han aparecido en los últimos años, ha demostrado ser un modelo incompleto. La *Teoría de Canuto & Mazzitelli* (CMT) trata de resolver dos limitaciones fundamentales de la MLT:

1. *La MLT trata al espectro de energía de las burbujas turbulentas como si fuera consistente de una sola gran burbuja.* Primero, Canuto & Mazzitelli, usan una aproximación analítica y muestran que si el espectro de energía se supone como una función delta de Dirac, lo cual implica una sola burbuja, se recupera la expresión que la MLT da para el flujo convectivo. En segundo lugar, cuando ellos resuelven un modelo de turbulencia completo para valores arbitrarios de la viscosidad, demuestran que, en un flujo viscoso, el número de burbujas que contribuyen al flujo convectivo es pequeño. Contrariamente, para sistemas prácticamente no viscosos como el interior de una estrella, el número de burbujas que contribuyen al flujo convectivo es muy grande.
2. *La MLT no provee la longitud de mezcla Λ .* Canuto & Mazzitelli encontraron que bajo las condiciones de incompresibilidad ($c_s^2 \rightarrow \infty$) y alta eficiencia convectiva, las ecuaciones que describen el flujo convectivo no proveen una unidad natural de longitud. La suposición de incompresibilidad se hace usualmente por simplicidad matemática, pero es físicamente incorrecta para los interiores estelares. Para que la matemática sea manejable sin sacrificar los rasgos físicos, emplearon una aproximación híbrida: la turbulencia es tratada como incompresible, pero Λ es escrito como $\Lambda = \alpha H_p$, adecuando el hecho de que las burbujas han de ser más pequeñas cerca de la superficie y se vuelven mayores al incrementar la profundidad.

Ya que aún no estaban en posición de tratar la compresibilidad, tuvieron en cuenta el camino de la longitud de mezcla y, por supuesto, el del gradiente adiabático. Sin embargo, cuando adoptaron la expresión $\Lambda = \alpha H_p$, su modelo requería que $\alpha < 1$, el cual es un valor más consistente. Además, para la turbulencia atmosférica sugirieron una nueva expresión para Λ con un parámetro no ajustable, $\Lambda = z$, donde z es la

distancia desde cualquier punto en la zona convectiva (ZC) a la parte superior de la misma.

2.2.2 Una comparación entre el nuevo modelo y la MLT

Suponiendo que la profundidad de la capa convectiva es pequeña comparada con el radio de la estrella, definimos un sistema de coordenadas cartesianas locales, con el eje z dirigido radialmente hacia afuera. El flujo convectivo turbulento F_c esta dado por,

$$F_c = c_p \rho \langle w\theta \rangle \quad (32)$$

donde w es la componente z de la velocidad turbulenta v , y θ es la componente fluctuante de la temperatura. La ecuación (2,32) puede escribirse más convenientemente como,

$$F_c = -K_t \left[\frac{dT}{dz} - \left(\frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right] \quad (33)$$

o, equivalentemente, como (H_p es la altura de escala de la presión)

$$F_c = K T H_p^{-1} (\nabla - \nabla_{ad}) \Phi (\nabla - \nabla_{ad}, A) \quad (34)$$

donde $K = 4acT^3/3\kappa\rho$ es la conductividad radiativa, mientras que K_t es la conductividad turbulenta térmica. La función adimensional $\Phi = K_t/K$ es en general una función de $\nabla - \nabla_{ad}$ y de las cantidades termodinámicas representadas por el parámetro A . En términos del número de Nusselt N , $N = \Phi + 1$.

Diferentes modelos de turbulencia producen distintas funciones Φ . Por ejemplo, la expresión de la MLT para Φ es ($a_0 = 9/4$)

$$\Phi^{MLT} = \frac{a_0 \Sigma^{-1} [(1 + \Sigma)^{1/2} - 1]^3}{2} \quad (35)$$

$$\Sigma \equiv 4 A^2 (\nabla - \nabla_{ad}) \quad (36)$$

$$A = \frac{c_p \rho^2 \kappa \Lambda^2}{12 a c T^3} \left(\frac{g}{2H_p} \right)^{1/2} = \frac{\Lambda^2}{9\chi} \left(\frac{g}{2H_p} \right)^{1/2} \quad (37)$$

donde Λ es la longitud de mezcla y $\chi = K/c_p \rho$ es la conductividad termométrica.

Como se verá, la variable natural que entra en el nuevo modelo convectivo no es Σ pero

$$S = \sigma Ra = (81/2) \Sigma \quad (38)$$

donde $\sigma = \nu/\chi$ es el número de Prandtl y Ra es el número de Rayleigh ($Ra = g\alpha\beta\Lambda^4/\nu\chi$; para α y β ver la ecuación [2,45]). Además, si introducimos la eficiencia convectiva Γ ,

$$2\Gamma + 1 = (1 + \Sigma)^{1/2} \quad (39)$$

el flujo total (convectivo más radiativo) $F_{total} = F_c + F_{rad}$, con

$$F_{total} = K T H_p^{-1} \nabla_r$$

y

$$F_{rad} = K T H_p^{-1} \nabla$$

producen una ecuación para Γ en términos de cantidades conocidas. En el caso de la MLT, el resultado es la conocida ecuación cúbica

$$a_0 \Gamma^3 + \Gamma^2 + \Gamma - \delta = 0 \quad (40)$$

$$\delta \equiv A^2(\nabla - \nabla_{ad}) \quad (41)$$

2.2.3 La expresión de F_c

La descripción de la transferencia de calor por turbulencia antes que por convección laminar es un problema bastante dificultoso a causa de la alta no linealidad de la turbulencia. Una propiedad física tal como la energía cinética, da un gran número de *burbuja*s con tamaños que van desde los moleculares hasta las dimensiones del sistema mismo. Una de las principales razones de ser de una teoría de turbulencia es determinar la distribución de energía cinética turbulenta en varias burbujas. La cantidad clave es la función del espectro de energía turbulenta $E(k)$, definida de tal modo que la energía cinética turbulenta por unidad de masa es:

$$\frac{1}{2}v_t^2 = \int_0^\infty E(k) dk \quad (42)$$

Ya que la escala de tamaño ℓ de una burbuja puede ser referida a k mediante $\ell = \pi/k$, la integración sobre k es en un cierto sentido equivalente a la integración sobre todas las burbujas.

El flujo convectivo F_c dado por la ecuación (2,32) puede expresarse en términos de $E(k)$ por:

$$F_c = \frac{c_p \rho}{g \alpha} \int_0^\infty 2E(k) [n_s(k) + \nu k^2] dk \quad (43)$$

así que, cuando F_c es puesta en la forma general (2,34), la expresión para la función adimensional Φ se convierte en:

$$\Phi = \frac{1}{g \alpha \beta \chi} \int_0^\infty 2E(k) [n_s(k) + \nu k^2] dk \quad (44)$$

donde,

$$\alpha = T^{-1}, \quad \beta = T(\nabla - \nabla_{ad}) H_p^{-1} \quad (45)$$

Aquí α es el coeficiente de expansión térmica, β es el gradiente de temperatura superadiabático, y ν es la viscosidad cinemática.

La función $n_s(k)$ representa el rate con el cual la energía está siendo inyectada en el sistema para mantener la turbulencia frente al decaimiento.

Como las ecuaciones (2,32), (2,43) y (2,44) indican, la evaluación del flujo convectivo requiere w y θ , los cuales satisfacen las ecuaciones acopladas de Navier-Stokes y de la temperatura que describen la convección turbulenta,

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + g \alpha \theta(\mathbf{x}, t) \lambda \quad (46)$$

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \theta(\mathbf{x}, t) = \chi \nabla^2 \theta(\mathbf{x}, t) + \beta w \lambda \quad (47)$$

donde p es la presión dividida por la constante de densidad y $\lambda = (0, 0, 1)$.

La dificultad en resolver las ecuaciones (2,46) y (2,47) es debida a los términos no lineales en ambas ecuaciones. De la expansión de Fourier de $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y $\theta(\mathbf{x}, t)$ en modos normales resultan las ecuaciones que son satisfechas por cada amplitud de Fourier $v_i(\mathbf{k}, t)$ y $\theta(\mathbf{k}, t)$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - n_s(k) \right] v_i(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{2} i \Pi_{ijm} \int \int d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{q}) v_j(\mathbf{q}, t) v_m(\mathbf{p}, t) = 0 \quad (48)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - n_s(k) \right] \theta(\mathbf{k}, t) + i k_j \int \int d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{q}) v_j(\mathbf{q}, t) \theta(\mathbf{p}, t) = 0 \quad (49)$$

donde $\delta^3(\mathbf{x})$ es la función delta de Dirac tridimensional, mientras que Π_{ijm} está definido como $\Pi_{ijm} = k_j T_{im} + k_m T_{ij}$, donde $T_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$, siendo δ_{ij} la delta de Kronecker.

El rate n_s se origina cuando vamos de las ecuaciones (2,46) y (2,47) a las (2,48) y (2,49), pues tomamos,

$$\begin{aligned} \beta w(k) &= (n_s + \chi k^2) \theta(k) \\ g \alpha \theta(k) \frac{x}{1+x} &= (n_s + \nu k^2) w(k) \end{aligned} \quad (50)$$

la cual da la expresión para $n_s(\mathbf{k})$,

$$2 n_s(k) = -(\nu + \chi) k^2 + [(\nu - \chi)^2 k^4 + 4 g \alpha \beta x (1+x)^{-1}]^{1/2} \quad (51)$$

donde x tiene en cuenta la posible anisotropía en el tamaño de las burbujas,

$$x = \frac{(k_x^2 + k_y^2)}{k_z^2}$$

Dado n_s , las ecuaciones no lineales (2,48) y (2,49) proveen las amplitudes $v_i(\mathbf{k}, t)$, las cuales nos vuelven a dar el espectro de energía $E(k)$ definido como,

$$E(k, t) = 4\pi k^2 \langle v_i^*(\mathbf{k}, t) v_i(\mathbf{k}, t) \rangle \quad (52)$$

sustituyendo las ecuaciones (2,51) y (2,52) en (2,44) nos daría el flujo convectivo. Desafortunadamente, las ecuaciones (2,48) y (2,49) no pueden resolverse exactamente.

Multiplicando la ecuación (2,48) por $v_i^*(\mathbf{k}, t)$, haciendo un promedio usando la ecuación (2,52), y tratando los términos no lineales siguiendo las reglas del modelo EDQNM (*Eddy Damped Quasi-Normal Markovian*), la ecuación que determina $E(k)$ pasa a ser,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - 2 n_s(k) \right] E(k, t) = T(k, t) \quad (53)$$

donde la “función no lineal de transferencia” $T(k, t)$ está dada por,

$$T(k, t) = \int_{\Delta} \int dp dq E(q) [k^2 E(p) - p^2 E(k)] a(p, q, k) \theta(k, p, q) \quad (54)$$

Por simplicidad, hemos omitido la dependencia temporal de E y θ en la ecuación (2,54). Aquí $a(p, q, k) = (x y + z^3)/q$, donde x , y , y z son los cosenos de los ángulos opuestos \mathbf{k} , \mathbf{p} , y \mathbf{q} , y el símbolo Δ significa que la integración sobre p y q es tal que $\mathbf{k} = \mathbf{q} + \mathbf{p}$. La función $\theta(k, p, q)$ representa la correlación con la escala de tiempo que gobierna las interacciones no lineales, y da la gran variedad de tamaños de burbujas. θ depende sensiblemente con el grupo de burbujas que consideremos, ya que las burbujas más grandes existen más tiempo

que las más pequeñas. Para completar las ecuaciones (2,53) y (2,54), debemos agregar las ecuaciones para θ , por ejemplo,

$$\frac{\partial \theta(k, t)}{\partial t} = 1 - 2 n_c(k, t) \theta(k, t),$$

$$n_c(k, t) = k^2 [\nu + \nu_t(k, t)], \quad (55)$$

$$\nu_t(k, t) = \frac{1}{15} \int_k^\infty \theta(p, t) [5 E(p, t) + p E'(p, t)] dp$$

Aquí, $\nu_t(k, t)$ es la viscosidad turbulenta, y $E'(p, t) \equiv dE(p, t)/dq$.

Las ecuaciones (2,53) - (2,55) son las ecuaciones de turbulencia básicas que determinan el espectro de energía turbulenta $E(k)$.

2.2.4 La MLT como un caso particular de la teoría general

Generalmente, la MLT no está formulada en términos de la teoría de turbulencia y por lo tanto no está expresada en términos de $E(k)$, que es lo que haremos aquí. Consideremos la aproximación,

$$E(k) \rightarrow E^{MLT}(k) = E_0 \delta(1 - k/k_0) \quad (56)$$

donde $\delta(x)$ es una función delta picada en alguna gran burbuja de número de onda $k_0 \approx \Lambda^{-1}$. Insertando la ecuación (2,56) en las ecuaciones (2,53) - (2,55), y suponiendo que el sistema es estacionario, nos da $E \sim n_s^2 k_0^{-3}$, lo cual al sustituir en la ecuación (2,43), tenemos,

$$F_c \sim \frac{c_p \rho}{g \alpha} n_s^3(k_0) k_0^{-2} \quad (57)$$

Luego usamos la ecuación (2,51) con $k = k_0$ y viscosidad nula. Usando la ecuación (2,34), el Φ resultante es,

$$\Phi \approx S^{-1} [(1 + S)^{1/2} - 1]^3 \quad (58)$$

donde $S = (81 S_0/2)\Sigma$ y $S_0 = 4 x \pi^{-4} (1 + x)^{-3}$ ya que hemos tomado $k_0 \Lambda = \pi (1 + x)^{1/2}$. Salvo los factores numéricos (los cuales no pueden ser determinados completamente si no adoptamos un modelo para el factor de anisotropía de la burbuja x), la ecuación (2,58) coincide con la expresión (2,35) de la MLT. Por lo tanto, hemos demostrado que cuando la

ecuación (2,56) es usada en un modelo de turbulencia completa, en las ecuaciones (2,53) - (2,55), el resultado es la expresión de la MLT para el F_c .

Luego, mostraremos que la expresión de la MLT para $E(k)$, ecuación (2,56), describe el límite de alta viscosidad de la $E(k)$ verdadera, la cual escribiremos formalmente como $E(k, \nu)$ para exhibir su dependencia con ν . Las burbujas más grandes que contienen más energía están en la región en torno a k_0 , mientras que la región más allá de k_d corresponde a las burbujas más pequeñas, donde la disipación de energía por viscosidad tiene lugar. El valor de k_d está determinado por el valor de ν mediante (Landau and Lifshitz, 1987),

$$k_d \propto \nu^{-3/4} \quad (59)$$

así que en un sistema altamente viscoso, k_0 y k_d casi coinciden. En contraste, en un sistema con baja viscosidad, $k_d \gg k_0$, debemos considerar un rango mucho más ancho de tamaños de burbujas. Así tenemos,

$$\nu \rightarrow \infty : \quad k_0 \approx k_d \quad \text{ó} \quad \ell_0 \approx \ell_d$$

$$\nu \rightarrow 0 : \quad k_d \gg k_0 \quad \text{ó} \quad \ell_0 \gg \ell_d$$

Expresado en términos más cuantitativos, en un sistema físico de viscosidad arbitraria ν , la razón ℓ_0/ℓ_d de las burbujas más grandes a las más pequeñas puede expresarse, para el caso de una gran eficiencia convectiva, como,

$$\frac{\ell_0}{\ell_d} \sim \sigma^{-3/4} S^{3/8} \sim \sigma^{-3/4} [A^2 (\nabla - \nabla_{ad})]^{3/8} \quad (60)$$

donde σ es la viscosidad ν en unidades de χ (para el aire, $\sigma = 0.7$, para el agua, $\sigma = 6.6$, mientras que para los interiores estelares, σ es del orden de 10^{-9}). Como se puede ver, cuando ν aumenta, el rango del espectro de burbujas es reducido de acuerdo a la dependencia de la ecuación (2,60) con σ , y $E(k)$ se aproxima a una función delta como en la ecuación (2,56). Así, la expresión (2,56) de la MLT pertenece a $\nu \rightarrow \infty$, que describe, por ejemplo un sistema con una gran viscosidad. Por lo tanto, vemos que en la MLT, los dos ingredientes básicos de la ecuación (2,43),

$$n_s(k, \nu) \quad \text{y} \quad E(k, \nu) \quad (61)$$

los suponemos como,

$$n_s(k, \nu \rightarrow 0) \quad \text{y} \quad E(k, \nu \rightarrow \infty) \quad (62)$$

por ejemplo, la MLT contiene inconsistencias matemáticas y físicas. Matemáticamente, las dos funciones básicas n_s y E están tomadas con valores opuestos del parámetro ν . Físicamente, como los interiores estelares tienen un ν bastante más chico que el más grande, la segunda expresión de (2,62) es una singularidad inadecuada. El espectro reducido de burbujas representado por la ecuación (2,56) pierde la contribución de un gran grupo de burbujas para el transporte de calor, dejando así un flujo convectivo estimado en defecto. Con sólo esta base, podemos concluir que el valor verdadero del flujo convectivo F_c es,

$$F_c > F_c^{MLT} \quad (63)$$

La ecuación (2,63) es obtenida por cálculos de estructura estelar, y por simulaciones numéricas directas de la convección turbulenta.

2.2.5 El nuevo flujo convectivo

Usando la ecuación (2,51) (con un modelo para la anisotropía x , así que, en contraste con la MLT, el resultado final no contiene x , ya que $x = (k \Lambda / \pi)^2 - 1$), resolvemos las ecuaciones (2,53) - (2,55) para $E(k, t)$ y entonces usamos el resultado para computar el flujo convectivo dado por la ecuación (2,43). A causa de la naturaleza altamente no lineal de las ecuaciones (2,53) - (2,55), la solución numérica del problema consume bastante tiempo. Uno comienza con una función de prueba inicial de la forma $E(k, 0) \propto k^2 \exp(-a k^2)$ y la hace evolucionar en el tiempo usando la ecuación (2,53) hasta obtener un estado estacionario, $E(k, \infty)$, el cual es el espectro $E(k)$ deseado para ser usado en la ecuación (2,43). La mayor parte del consumo de tiempo se lo lleva la evaluación de las integrales dobles en la función no lineal de transferencia (2,54).

Como ya hemos mencionado, los sistemas con alta viscosidad tienen un espectro angosto de burbujas y es fácil de tratar. Por el contrario, a baja viscosidad (o σ) el espectro de burbujas es más ancho y la resolución de las ecuaciones (2,53) - (2,55) consume más tiempo. Aunque el valor apropiado de σ para los interiores estelares es del orden de 10^{-9} , se puede tomar como un valor representativo razonable $\sigma = 10^{-3}$, ya que cuando σ decrece en demasía, $E(k)$ no cambia mucho.

Con el nuevo $E(k)$, Canuto & Mazzitelli calcularon ciertas cantidades interesantes. En la

tabla (2,1) ² exhibimos algunos valores representativos de la energía cinética, la viscosidad turbulenta, $\nu_t \equiv \nu_t(k_0, \infty)$, el nuevo flujo convectivo Φ y Φ^{MLT} , como funciones de S . Los números entre paréntesis indican potencias de 10.

Tabla 1: <i>Resultados del nuevo modelo</i>					
$\log S$	KE	ν_t	Φ	Φ^{MLT}	C
4	5.26(3)	4.97	39.9	14.6	0.2241
6	8.78(5)	59.0	1.07(3)	1.73(2)	0.2145
8	9.83(7)	6.07(2)	1.46(4)	1.76(3)	0.2096
10	1.01(10)	6.15(3)	1.65(5)	1.77(4)	0.2083
12	1.01(12)	6.15(4)	1.73(6)	1.77(5)	0.2076
14	1.01(14)	6.15(5)	1.73(7)	1.77(6)	0.2143
16	1.01(16)	6.15(6)	1.73(8)	1.77(7)	0.2308

Encontramos que los valores del nuevo flujo convectivo Φ dados en la tabla (2,1) pueden ser aproximados bastante bien usando la siguiente expresión,

$$\Phi = a_1 \Sigma^m [(1 + a_2 \Sigma)^n - 1]^p \quad (64)$$

donde Σ está definida por las ecuaciones (2,36) y (2,37). Los otros coeficientes estan dados por,

$$a_1 = 24.868, \quad a_2 = 9.7666 \times 10^{-2}, \quad m = 0.14972, \quad n = 0.18931, \quad p = 1.8503$$

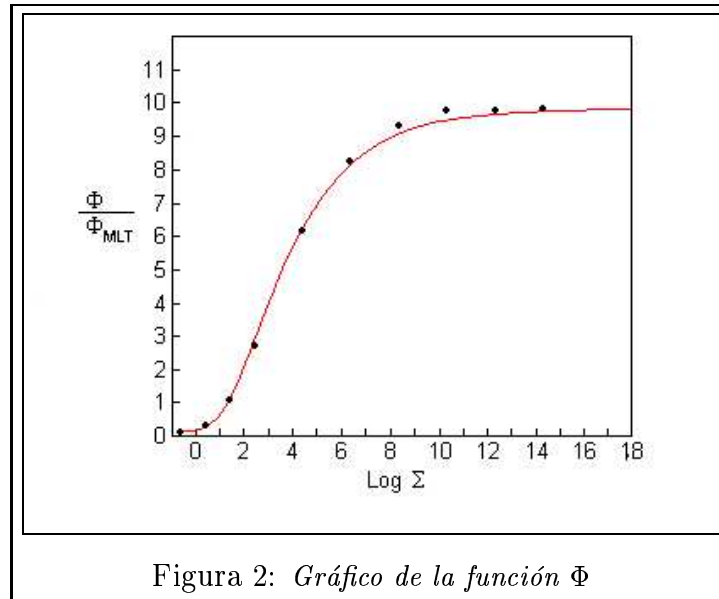
Para resaltar las diferencias con la MLT, en la figura (2,2), graficamos $\Omega(\Sigma)$ versus Ω , donde

$$\Omega(\Sigma) = \frac{\Phi}{\Phi^{MLT}} \quad (65)$$

Como podemos ver, para una gran eficiencia convectiva, $\Omega(\Sigma)$ se vuelve constante, Ω_∞ , cuyo valor es

$$\Omega_\infty = 9.786 \quad (66)$$

²Aquí $S \equiv 81\Sigma/2$, con Σ dado por la ecuación (2,36). La energía cinética turbulenta $KE = \frac{1}{2}v_t^2$, está en unidades de $(\chi/\Lambda)^2$. La viscosidad turbulenta, ν_t , está en unidades de χ . C se define en la ecuación (2,??).



2.2.6 Solución de las ecuaciones cuando el flujo total es dato

Usando la nueva expresión para F_c , la relación que reemplaza a la ecuación (2,40) es

$$a_0 \Omega(\Gamma) \Gamma^3 + \Gamma^2 + \Gamma - \delta = 0 \quad (67)$$

El resultado de la MLT corresponde a $\Omega(\Gamma) = 1$. La ecuación (2,67) es, por lo tanto, la nueva ecuación a resolver: para un dado valor de la cantidad termodinámica δ , éste da un valor de Γ o, alternativamente, el valor de $\nabla - \nabla_{ad}$, como una función de $\nabla_r - \nabla_{ad}$, el cual consideramos conocido.

2.2.7 La longitud de mezcla Λ y los efectos de la compresibilidad

En esta sección presentaremos un conjunto de argumentos de peso para proponer que el fenómeno de “vertical stacking” de las burbujas turbulentas debe ser representado por la expresión (z es la distancia desde la parte superior de la zona convectiva),

$$\Lambda = z \quad (68)$$

como una alternativa a la tradicional

$$\Lambda = \alpha H_p \quad (69)$$

Comenzamos preguntandonos cual es el fenómeno físico que ha motivado la introducción de la ecuación (2,69). Ya que H_p es más pequeño en la parte superior de la zona convectiva y

se hace más grande al incrementar la profundidad, la ecuación (2,69) representa el fenómeno de “*vertical stacking*” de las burbujas en la zona convectiva: suponemos a las burbujas convectivas como pequeñas en la parte superior y cada vez más grandes hacia el interior. ¿Este efecto es real?, y ¿a que se debe? Primero, discutiremos el hecho de que este es un fenómeno peculiar y no, por ejemplo, un mecanismo para conducir la turbulencia; entonces discutiremos el hecho de que el “*vertical stacking*” es causado por efecto de compresibilidad no lineal (y no por interacciones no lineales entre las burbujas). Esto nos lleva a concluir que la ecuación (2,69) tiene en cuenta lo que en la formulación inicial no contenía, por ejemplo, efectos de compresibilidad, y es por lo tanto sensible a hacerlo. Sin embargo, argumentaremos también que la ecuación (2,68) debe llegar al mismo resultado con la considerable ventaja de no contener parámetros ajustables.

Primer argumento. —En un tratamiento incompresible de la turbulencia convectiva, las variables físicas dimensionales son,

$$g, \alpha, \beta, \nu, \chi \tag{70}$$

Con ellos, podemos construir una unidad de longitud, por ejemplo,

$$\ell \sim \left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} \quad \text{o} \quad \left(\frac{\chi^2}{g}\right)^{1/3} \tag{71}$$

Sin embargo, en un interior estelar casi no viscoso, las grandes burbujas (cuyas dimensiones son del orden del tamaño del sistema) están bastante separadas (en el k -espacio) respecto de las burbujas pequeñas, o, alternativamente, el rango de tamaños de burbujas es lo suficientemente grande, que la viscosidad no entra realmente en el problema, de esta forma no hay una longitud de escala provista por el sistema. Es decir, en el límite de alta eficiencia convectiva, χ no entra en el problema; ver las ecuaciones (2,34), (2,35) y (2,64).

Monin & Obukhov (Monin and Obukhov, 1954), fueron los primeros en señalar que la turbulencia puramente térmica está “*self-pattering*”: no habiendo una escala natural provista por los parámetros independientes del problema, la longitud Λ no puede ser escrita como múltiplo de una longitud intrínseca que no existe. Este argumento por si solo parecería sugerir que bajo condiciones de “*self-pattering*”, la única longitud es realmente la distancia z , y así la ecuación (2,68) vale.

Para clarificar, consideremos una situación física en la cual la turbulencia no es generada por convección, sino por un viento, por ejemplo, una forma de conducir la turbulencia mecánicamente mejor que térmicamente (por ejemplo, la atmósfera de la Tierra en la noche

cuando hay una inversión de temperatura y así no hay convección). Bajo estas circunstancias, las observaciones indican que las más grandes escalas de turbulencia mecánica son considerablemente más pequeñas que las correspondientes al caso convectivo: la gran escala de la turbulencia mecánica es inhibida a causa de que las fluctuaciones disiparían bastante más energía trabajando contra la gravedad. En un estado diferente, las fluctuaciones de gran escala son estables. Por lo tanto, la turbulencia mecánica consiste mayormente de burbujas de pequeña escala, y tienen carácter local, así que Λ no puede depender explícitamente de la distancia a la superficie, y no puede escribirse como en la ecuación (2,68).

En otro sentido, lo opuesto es verdad en presencia de estratificación térmica (por ejemplo, convección), donde los datos observacionales indican que las grandes fluctuaciones se vuelven inestables, el espectro de burbujas es ancho, el fenómeno no es de carácter local, y Λ debe ahora depender de z .

Segundo argumento. —Aquí mostraremos que las ecuaciones que hemos usado (y por extensión las ecuaciones de la MLT) están basadas en la suposición de que el fluido es incompresible.

Consideremos las ecuaciones básicas (2,48) y (2,49), y notemos que la ausencia del término de presión es debido al hecho de que bajo la condición de incompresibilidad no es una variable independiente. Usando la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (72)$$

la condición de incompresibilidad, $\rho = cte$, es equivalente a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (73)$$

ó

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}) = 0 \quad (74)$$

por ejemplo, sólo ondas transversales están permitidas. Ni ondas longitudinales u ondas de sonido pueden estar en este problema, o dicho de otra forma, $c_s \rightarrow \infty$. Tomando ahora el rotor a la ecuación (2,46) y usando la ecuación (2,73), la presión puede expresarse en términos del campo de velocidades por medio de la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 p(x) = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j \quad (75)$$

(ya que $p \propto v^2$, tenemos $p^2 \propto v^4 \propto E^2$, por ejemplo, la ecuación [2,??]). Sustituyendo la ecuación (2,75) en las ecuaciones de Navier - Stokes, el término de presión convierte parte de los términos no lineales representados por el segundo término en la ecuación (2,48), lo cual significa que en *convección incompresible, la presión no es una variable independiente que puede ser usada para construir una unidad de longitud*. Nos encontramos ante una dicotomía: matemáticamente, la adopción de la ecuación (2,73) nos da una considerable simplificación a un problema no lineal extremadamente complicado; físicamente, sin embargo, los interiores estelares son compresibles, y por ende, la ecuación (2,73) no puede ser cierta. La solución debería ser tomar el problema de la compresibilidad completamente. La alternativa pragmática ha sido la adopción de un formalismo incompresible (similar a la MLT o al presente modelo) con efectos de compresibilidad inducidos por medio de la longitud de mezcla Λ (y por supuesto el gradiente adiabático), un proceso que, si bien no es enteramente satisfactorio, tiene el mérito de proveer una simplicidad que no genera más problemas que los que tratamos de resolver.

La siguiente pregunta relevante es: ¿Podemos demostrar que la ecuación (2,69) realmente incorpora los efectos de compresibilidad? Ya que creemos que este punto es importante, lo discutiremos aquí. Consideremos el rate de crecimiento (2,51) en el límite cuando ν y χ no entran en el problema. Tenemos,

$$n_s = \left[\frac{g \alpha \beta \chi}{1 + x} \right]^{1/2} \quad (76)$$

por, ejemplo, el análisis de estabilidad bajo la condición de incompresibilidad provee una unidad de tiempo natural, pero no una de longitud. Ahora consideremos el caso de un fluido compresible, y sea ω la frecuencia ($-\text{Im}(\omega)$ es el rate de crecimiento). La ecuación a resolver es una ecuación diferencial de segundo orden, la cual requiere la especificación de la velocidad del sonido c_s y la densidad ρ como funciones de z . En el caso de un punto de vista isotérmico, con c_s constante, tal ecuación se simplifica considerablemente. En términos de $\Omega \equiv \omega^2$,

$$\Omega^2 - \Omega c_s^2 k^2 \left(\frac{1 + \gamma^2 g^2}{4 k^2 c_s^4} \right) + k_{\perp}^2 f^2 c_s^2 = 0 \quad (77)$$

donde f es la frecuencia de Brunt - Väisälä ($f^2 = -g \alpha \beta$). Para un fluido incompresible, $c_s^2 \rightarrow \infty$, la ecuación (2,77) se reduce a la ecuación (2,76). A partir de la ecuación (2,77) se ve que una unidad de longitud es naturalmente provista por el segundo término en el paréntesis,

$$\ell = \frac{c_s^2}{\gamma g} = \frac{p}{g \rho} = H_p \quad (78)$$

la cual es precisamente la escala de altura de presión.

Como conclusión, podemos sintetizar el problema de la siguiente manera:

1. Suponemos incompresibilidad porque impone una considerable simplificación matemática en el tratamiento de la turbulencia.
2. Los interiores estelares son, sin embargo, compresibles (velocidad del sonido finita), y el esfuerzo debe ser, por lo tanto, incorporar estos rasgos al problema.
3. Primeramente, Chan, Sofia, & Wolff (Chan et al., 1982) y Hossain & Mullan (Hossain and Mullan, 1990) han mostrado que los efectos no lineales de compresibilidad actúan separadamente de las interacciones no lineales entre burbujas: los primeros son responsables del “*vertical stacking*” de las burbujas por lo cual las burbujas convectivas son en promedio más pequeñas en la parte superior de la zona convectiva y crecen al ir incrementando la profundidad; las interacciones no lineales entre burbujas son las responsables del transporte convectivo del calor.
4. La MLT trata las interacciones no lineales entre burbujas con un modelo de una sola burbuja e incompresible con la compresibilidad parcialmente tenida en cuenta por medio de la ecuación (2,69). El procedimiento es a lo sumo incompleto, ya que la presencia del parámetro libre α afecta considerablemente en el poder predictivo del modelo.
5. El presente modelo supera a la MLT en el tratamiento de las interacciones no lineales y los efectos de la compresibilidad porque la ecuación (2,68) tiene en cuenta el “*vertical stacking*” sin introducir el parámetro α .
6. Cuando el rate de crecimiento y el espectro de energía $E(k)$ necesarios para calcular F_c (ecuación [2,43]) sean derivados a partir de un modelo de turbulencia completamente compresible, H_p emergerá como una unidad de longitud natural: en este caso no será necesaria una α , ya que todas las longitudes estarán medidas en unidades de H_p .

*No sirve de nada, clavarse el puñal,
llorando la carta, del tango fatal.
Tenemos que hacernos, un mundo mejor,
porque éste está enfermo, y nosotros no.*

3 El Cálculo de los Tracks Evolutivos

3.1 La Evolución de una Estrella en una Computadora

Para el cálculo de los tracks evolutivos utilizamos el código de evolución estelar desarrollado por Omar Benvenuto *et al.* Este código está hecho en base a los lineamientos generales dados por Kippenhahn *et al.* (Kippenhahn *et al.*, 1967), para poder resolver las ecuaciones diferenciales de la estructura estelar utilizando el método que formularan Henyey *et al.* (Henyey *et al.*, 1959), (Henyey *et al.*, 1964).

El mismo nos permite elegir que tipo de teoría de convección queremos usar, ya sea la *Mixing Length* o la *Canuto & Mazzitelli*. Si elegimos la *Mixing Length*, podemos seleccionar el α que más nos convenga.

Para poder aplicarlo a estrellas pertenecientes a cúmulos globulares, fue necesario modificarlo para que pueda tener en cuenta la metalicidad que poseen estas estrellas, ya que en principio el programa está pensado para metalicidades del tipo solar, y usar las correspondientes tablas de opacidad. El código de evolución estelar utiliza las tablas de opacidades calculadas por Rogers & Iglesias.

Para los fines prácticos, introdujimos en el programa dos condiciones de corte (además de las que el programa ya contiene, referidas a otros aspectos físicos y matemáticos) para que el mismo termine el cálculo. La primera es que finalice la evolución cuando la estrella supera los 20×10^9 años de edad, ya que más allá de esta edad carece de interés para el presente trabajo. La segunda, es que la estrella termine su evolución cuando se hayan calculado ya 2000 modelos, ya que si la estrella no ha alcanzado la edad de corte y se han calculado tal cantidad de modelos, es porque el paso de tiempo que utiliza el programa en esa etapa es muy pequeño y la estrella prácticamente no se mueve en su evolución en el diagrama H-R.

Hemos de aclarar, que sólo estamos analizando la quema de hidrógeno, sin proseguir con las reacciones nucleares subsecuentes, ya que sólo nos interesa que las estrellas escapen de la Secuencia Principal y no su evolución posterior.

La primera condición actúa sobre las estrellas menos masivas, mientras que la segunda

lo hace sobre las más masivas, que queman más rápidamente el hidrógeno, y en las cuales al quedar poco hidrógeno para quemar, el programa va achicando sucesivamente el paso temporal.

3.2 Consideraciones

El código de evolución estelar tiene ciertas consideraciones que alejan a la estrella de la realidad.

1. *La estrella tiene simetría angular.* Esto implica que las cantidades físicas que toman parte en la evolución de la estrella son independientes de las coordenadas angulares θ y φ , y sólo dependen de la coordenada radial r , (o su equivalente coordenada de masa que es la que utiliza el código de evolución estelar). Esto hace que los cálculos se simplifiquen enormemente. Esto puede no ser válido en los casos que iremos viendo.
2. *Las estrellas estan solas.* Es decir, no forman parte de sistemas binarios o múltiples. Si la estrella tiene una compañera, estaría en presencia de un fuerte campo gravitacional que la deformaría y ya no sería esférica. En caso de tener una compañera, podría darse el caso de que hubiera transferencia de masa, con lo cual la masa no sería constante. Asimismo, la compañera calentaría un lado de la estrella, con lo cual se rompería la simetría angular. La existencia de sistemas planetarios sería irrelevante, salvo que hubiera planetas masivos que deformen sustancialmente a la estrella.
3. *La estrella no rota.* Dado que la estrella es un fluido autogravitante, al rotar deja de ser esférica, pasando a ser un elipsoide de revolución.
4. *La estrella carece de campo magnético.* Si hubiera un campo magnético se alteraría la simetría angular, ya que habría una dirección preferencial. Además, al estar el gas de la estrella ionizado, interactuaría con el campo produciéndose migraciones de partículas.

3.3 Comparaciones

A modo de ejemplo, para visualizar las diferencias existentes en los tracks evolutivos de los modelos calculados con la teoría de la *Mixing Length* con distintos valores de α , en la figura (3,1) vemos los tracks evolutivos para una estrella de $0.950 M_{\odot}$ utilizando distintos valores de α , a saber: 1.4, 1.5, 1.6, 1.8 y 2.0.

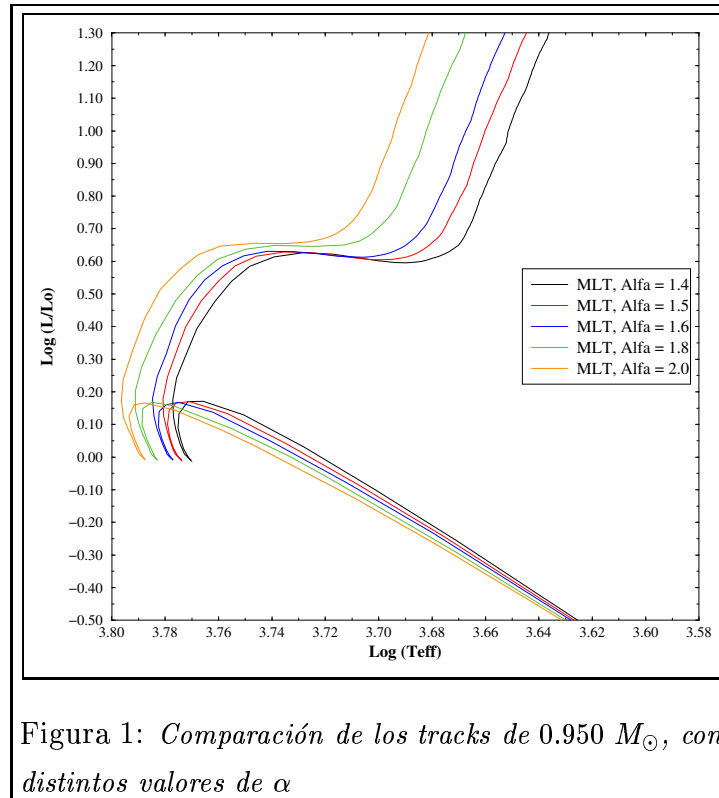


Figura 1: Comparación de los tracks de $0.950 M_{\odot}$, con distintos valores de α

En la figura (3,1), podemos ver que los modelos con valores menores de α (por ejemplo, $\alpha = 1.4$) se ubican más a la derecha en el diagrama H-R, mientras que los que tienen un α cada vez mayor (por ejemplo, $\alpha = 2.0$) se van ubicando más hacia la izquierda. Esta diferencia se hace más notoria en el *turn off*, cuando la estrella sale de la secuencia principal, y es precisamente ese punto el que nos interesa a la hora de calcular edades de cúmulos globulares.

En la evolución post-secuencia, vemos que la diferencia también es apreciable. Aquí, cuando la estrella sube cerca de la *línea de Hayashi*, el transporte convectivo es el dominante, y se hace más notoria la diferencia entre los distintos valores de α .

Según el método de Henyey, para resolver las ecuaciones es necesario fijar las condiciones de contorno en la superficie. Para poder hacerlo, es necesario integrar las capas externas. Pero las condiciones de contorno se calculan en cada paso, sino que se utiliza una red triangular (triángulos rectángulos) en el plano (λ, τ) , donde definimos,

$$\lambda = \log L \qquad \tau = \log T_{\text{eff}}$$

donde L es la luminosidad y T_{eff} la temperatura efectiva. Cuando nuestro modelo se encuentra dentro de un triángulo, utilizamos las condiciones de borde que nos dan los vértices. Los

vértices de los triángulos no son calculados todos desde un principio, sino que el programa va calculando los vértices a medida que los va necesitando, es decir, cuando nuestro modelo sale de un triángulo en el plano (λ, τ) y pasa a otro, y entonces si, son calculados los nuevos vértices que definen el triángulo.

Estos triángulos deben ser pequeños, y generalmente se toma,

$$\Delta \log L = 0.1 \qquad \Delta \log T_{eff} = 0.02$$

Dado que podemos necesitar que los triángulos seán mayores o menores, según el tipo de estrella que estemos modelando, en el archivo de entrada definimos el *factor de reducción de los triángulos*, que actua dividiendo el tamaño de los triángulos.

En la figura (3,2), se muestran tres tracks de estrellas de $0.800 M_{\odot}$, calculados con la teoría de *Canuto & Mazzitelli*, pero con distinto *factor de reducción de los triángulos*.

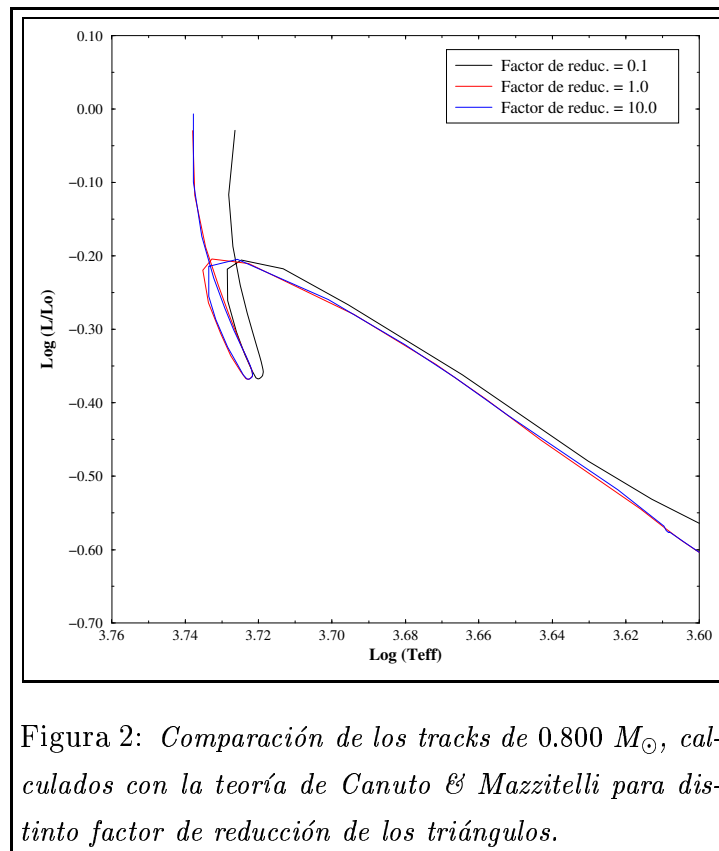


Figura 2: Comparación de los tracks de $0.800 M_{\odot}$, calculados con la teoría de *Canuto & Mazzitelli* para distinto factor de reducción de los triángulos.

Se puede apreciar que si los factores de reducción son 1.0 o 10.0, los tracks correspondientes practicamente coinciden, mientras que en el caso de 0.1, difiere notablemente. De aquí, podemos inferir que el track con un factor de reducción de los triángulos igual a 0.1 es un

caso anómalo y para nuestros propósitos usaremos un factor de reducción de los triángulos igual a 1.0.

El motivo para esta elección es que, si el track es practicamente el mismo para factores de reducción de los triángulos tan distintos como 1.0 y 10.0, entonces, el track no dependería del valor de reducción de los triángulos, así que el track sería el mismo si ponemos 1.0, 2.0, 5.0, 10.0, etc.

En las figuras (3,3) y (3,4), vemos los tracks correspondientes a estrellas de $0.800 M_{\odot}$ y $0.950 M_{\odot}$, respectivamente. En ambos casos se comparan los tracks calculados usando la teoría de la *Mixing Length* para $\alpha = 1.4$ y $\alpha = 2.0$, y usando la teoría de *Canuto & Mazzitelli*. En las dos figuras, vemos que el track correspondiente a la teoría de *Canuto & Mazzitelli* se ubica entre los dos tracks de la *Mixing Length*.

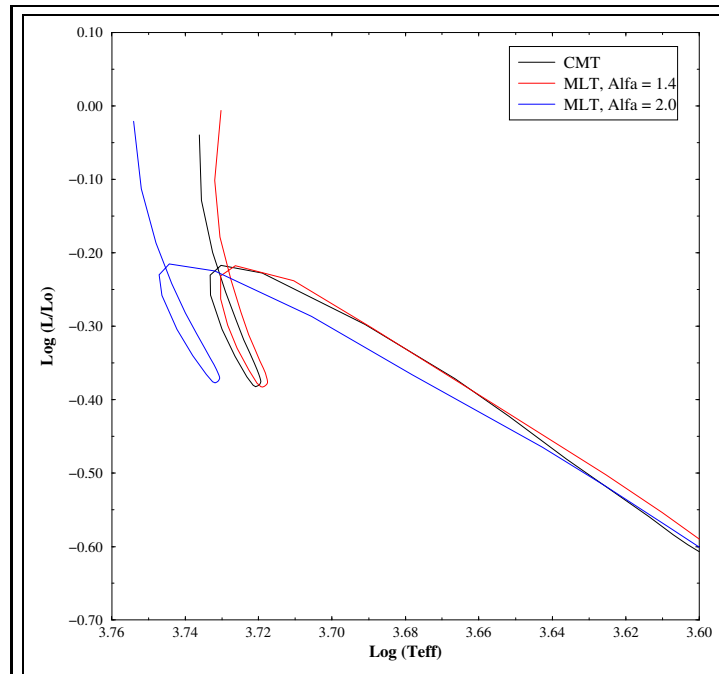
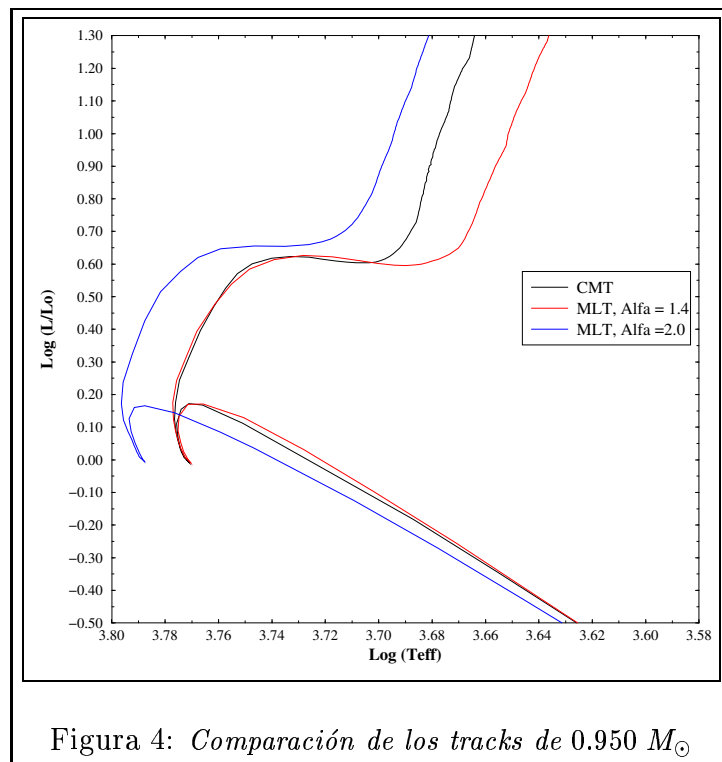


Figura 3: Comparación de los tracks de $0.800 M_{\odot}$



*Veo todo al revés,
yo no veo como Usted,
yo no veo justicia,
sólo miseria y hambre,
o será que soy yo
que llevo la contra
como estandarte.*

4 El Cálculo de las Isócronas

4.1 Isócronas en el Plano Teórico y Observacional

Para calcular las isócronas, desarrollamos un programa que lee un conjunto de tracks correspondientes a estrellas de distintas masas.

En realidad no utilizamos los archivos de salida tal cual los obtenemos del programa de evolución estelar para cada track, sino que utilizamos un archivo que sólo posee las columnas con los datos correspondientes a $\log T_{eff}$, $\log L/L_{\odot}$, masa (en masas solares) y edad (en 10^6 años) de la estrella. Las otras cantidades que calcula el código de evolución estelar, no son de interés para el cálculo de las isócronas. Esto se hace para que los archivos de salida sean más manejables, y con tal fin utilizamos un programa que nos permite reducirlos.

Volviendo al cálculo en sí de las isócronas, en cada track, el programa busca el intervalo en donde se encuentra la edad que le es especificada previamente y, por medio de una interpolación lineal, determina el $\log T_{eff}$ y el $\log L/L_{\odot}$ para la edad deseada. Haciendo esto para cada track obtenemos la isócrona buscada, en el plano teórico.

Para cada teoría calculamos un set de isócronas que van desde los 10×10^9 años, hasta los 20×10^9 años, con intervalos de 1×10^9 años. Una vez obtenidas las isócronas teóricas, mediante otro programa (ver la sección (5)), obtenemos las isócronas en el plano observacional.

Finalmente, luego del paso al plano observacional, para cada isócrona, el archivo de salida contiene los datos correspondientes a: $\log T_{eff}$, $\log L/L_{\odot}$, M_v , $(B - V)_0$, gravedad superficial g y masa (en masas solares), de cada estrella.

*Los hombres crearon dioses,
y también la gran ciudad,
pero siempre tienen algo,
algo para rechazar,
por ejemplo mis ideas,
a quien le puede importar,
la verdadera importancia,
a ninguno se la dan.*

5 Transformación del Plano Teórico al Observacional

5.1 La Transformación de Flower

Todos los tracks obtenidos a partir del Código de Evolución Estelar, así como también las isócronas obtenidas a través de ellos, se encuentran en el plano teórico ($\log L/L_{\odot}$ vs. $\log T_{eff}$), y para poder comparar con los datos observacionales de los cúmulos globulares, debemos transformarlos al plano observacional (M_V vs. $(B - V)_0$). Para ello, hemos desarrollado un programa, basado en los algoritmos obtenidos por Flower (Flower, 1996) para tal fin. Estos algoritmos son:

$$\log(T_{eff}) = a + b \cdot (B - V) + c \cdot (B - V)^2 + \dots \quad (1)$$

Donde los coeficientes son:

	Supergigantes	MS, Subgigantes, Gigantes
<i>a</i>	4.012559732366214	3.979145106714099
<i>b</i>	-1.055043117465989	-0.654992268598245
<i>c</i>	2.133394538571825	1.740690042385095
<i>d</i>	-2.459769794654992	-4.608815154057166
<i>e</i>	1.349423943497744	6.792599779944473
<i>f</i>	-0.283942579112032	-5.396909891322525
<i>g</i>	2.192970376522490
<i>h</i>	-0.359495739295671

y,

$$BC = a + b \cdot \log(T_{eff}) + c \cdot [\log(T_{eff})]^2 + \dots \quad (2)$$

En este caso los coeficientes son:

	$\log T_{eff} > 3.9$	$3.9 > \log T_{eff} > 3.7$	$3.7 > \log T_{eff}$
<i>a</i>	$-0.118115450538963 \times 10^6$	$-0.370510203809015 \times 10^5$	$-0.190537291496456 \times 10^5$
<i>b</i>	$0.137145973583929 \times 10^6$	$0.385672629965804 \times 10^5$	$0.155144866764412 \times 10^5$
<i>c</i>	$-0.636233812100225 \times 10^5$	$-0.150651486316025 \times 10^5$	$-0.421278819301717 \times 10^4$
<i>d</i>	$0.147412923562646 \times 10^5$	$0.261724637119416 \times 10^4$	$0.381476328422343 \times 10^3$
<i>e</i>	$-0.170587278406872 \times 10^4$	$-0.170623810323864 \times 10^3$
<i>f</i>	$0.788731721804990 \times 10^2$

Una vez obtenida la Corrección Bolométrica, *BC*, utilizando las siguientes expresiones (Unsöld, 1969), obtenemos la Magnitud Bolométrica Absoluta, *M_{bol}*, y la Magnitud Visual Absoluta, *M_V*,

$$M_{bol} = 4.74 - 2.5 \cdot \log \frac{L}{L_{\odot}} \quad (3)$$

$$M_V = BC + M_{bol} \quad (4)$$

5.2 La Transformación de Vandenberg

Estos algoritmos no son los únicos que hay. Por ejemplo, hay otras tablas que permiten pasar del plano teórico al observacional como el caso de las tablas de Vandenberg (Vandenberg, 1992).

Con estas tablas hemos realizado un programa que nos permite obtener a partir de $\log T_{eff}$ y $\log L/L_{\odot}$, la magnitud absoluta *M_v*, y el índice de color (*B - V*). Y no sólo esto, sino que también se pueden determinar los índices de color (*R - I*) y (*V - R*), aunque estos no revisten interés para el presente trabajo. Todos los índices de color están referidos al sistema de Cousins.

La transformación se realiza de un modo totalmente distinto a la de Flower. Para empezar necesitamos la gravedad superficial. Para obtenerla utilizamos la siguiente expresión.

$$\log g = cte + \log M + 4 \cdot \log T_{eff} - \log \frac{L}{L_{\odot}} \quad (5)$$

donde,

$$cte = \log \left(\frac{G \cdot M_{\odot}}{R_{\odot}^2} \right) - 4 \cdot \log T_{eff\odot} \quad (6)$$

Según VandenBerg, el valor de esta constante es: $cte = -10.61571$. Nosotros, a partir de los datos obtenidos del Astrophysical Quantities, (Allen, 1976),:

$$G = 6.673 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ seg}^{-2} \text{ gr}^{-1}$$

$$M_{\odot} = 1.989(2) \times 10^{33} \text{ gr}$$

$$R_{\odot} = 6.9599(7) \times 10^{10} \text{ cm}$$

$$T_{eff\odot} = 5770^{\circ} K$$

obtenemos,

$$g_{\odot} = 2.7398(4) \times 10^4 \text{ cm seg}^{-2}$$

y finalmente,

$$cte = -10.60698439$$

Otra de las cosas que diferencia a la transformación de VandenBerg de la de Flower es que podemos determinar la metalicidad. Para el caso de la transformación de VandenBerg, disponemos de tablas para cuatro metalicidades distintas, a saber

$$[Fe/H] = -2.0$$

$$[Fe/H] = -1.0$$

$$[Fe/H] = -0.5$$

$$[Fe/H] = 0.0$$

Si nosotros tenemos otra metalicidad distinta a las dadas, el programa realiza una interpolación lineal entre las tablas, o una extrapolación lineal si $[Fe/H] < -2.0$, o $[Fe/H] > 0.0$, y genera un nuevo set de tablas con la metalicidad deseada. La interpolación y extrapolación lineal son las aconsejadas por VandenBerg. Nosotros probamos haciendo una interpolación cúbica, en vez de una lineal, y los resultados practicamente no variaban en el rango de $[Fe/H] = -2.0$ a $[Fe/H] = 0.0$, pero si era notable la diferencia en la zona de extrapolación, fuera de este rango de metalicidades.

Otra de las cosas a tener en cuenta, es el rango de validez de las tablas. Para $(B - V)$ y la Corrección Bolométrica, éstas serán válidas si tenemos que, $3000 K \leq T_{eff} \leq 5500 K$, y $-0.5 \leq \log g \leq 5.0$, mientras que si tenemos $5500 K < T_{eff} \leq 25000 K$, el rango para la gravedad superficial deberá ser $2.0 \leq \log g \leq 5.0$. Para que las tablas de $(R - I)$ y $(V - R)$ sean válidas, debe cumplirse que, $4000 K \leq T_{eff} \leq 25000 K$, y $2.0 \leq \log g \leq 5.0$.

5.3 Comparación entre las Dos Transformaciones

A modo de ejemplo, veamos las diferencias en los resultados de la transformación de Flower respecto de la de VandenBerg. Para ello veamos el gráfico de la figura (5,1), en donde hemos tomado una isócrona calculada con la *Teoría de la Mixing Length* con $\alpha = 1.4$, de 14×10^9 años y $Z = 0.0010$, y le hemos aplicado las transformaciones de Flower y de VandenBerg.

En color rojo tenemos la isócrona transformada según los algoritmos de Flower, mientras que en azul tenemos la isócrona transformada según las tablas de VandenBerg. Es notoria la diferencia que hay entre ambas. Además, se observa que en el caso de Flower, la isócrona está deformada.

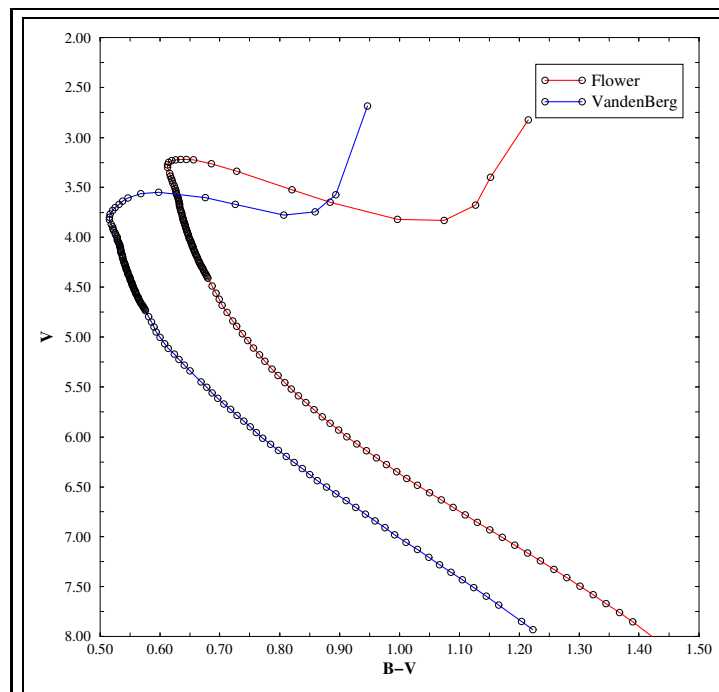


Figura 1: Comparación de las transformaciones de Flower y de VandenBerg

Nosotros, nos inclinamos por utilizar la transformación de VandenBerg, ya que podemos realizarla eligiendo la metalicidad correspondiente en cada caso.

*No me pesa lo vivido,
me mata la estupidez,
de vivir un fin de siglo
distinto del que soñé*

6 Otras Consideraciones

6.1 Cálculo de la fracción de masa de metales Z

En las tablas, como en el Astrophysical Data (Lang, 1991), la metalicidad que se da de los cúmulos globulares es:

$$[Fe/H] = \log \frac{[Fe]}{[H]} - \log \frac{[Fe]_{\odot}}{[H]_{\odot}} \quad (1)$$

Nosotros, en nuestro programa de evolución estelar, necesitamos entrar el valor de la fracción de masa Z en vez de la metalicidad $[Fe/H]$.

En las tablas de opacidades que utiliza el programa de evolución estelar para calcular los tracks evolutivos, tenemos una relación para la concentración de hierro ($[Fe]$) respecto de la fracción de masa de metales Z de:

$$[Fe] = 0.02164 \cdot Z \quad (2)$$

Entonces, reemplazando (6,2) en (6,1), tenemos:

$$[Fe/H] = \log 0.02164 + \log Z - \log[H] - \log 0.02164 - \log Z_{\odot} + \log[H]_{\odot} \quad (3)$$

Aquí, suponemos que $[H] = [H]_{\odot} = 0.70$, con lo cual, en consecuencia, llegamos a:

$$[Fe/H] = \log Z - \log Z_{\odot} \quad (4)$$

y luego,

$$Z = 10^{([Fe/H] + \log Z_{\odot})} \quad (5)$$

Para los cálculos de Z , hemos supuesto que $Z_{\odot} = 0.02$. Esto implica $\log Z_{\odot} = -1.69897$, con lo cual tendremos,

$$Z = 10^{([Fe/H] - 1.69897)} \quad (6)$$

En otro trabajo, Bressan & Tautvaisiené (Bressan and Tautvaisiené, 1996), utilizan la siguiente fórmula para pasar de $[Fe/H]$ a Z y viceversa, que tiene en cuenta la variación del hidrógeno inicial con la metalicidad:

$$[Fe/H] = \log(Z/X) + 1.574 \quad (7)$$

De aquí obtenemos:

$$Z = X \cdot 10^{([Fe/H]-1.574)} \quad (8)$$

En la tabla (6,1) mostramos la metalicidad de varios cúmulos globulares, obtenidos del Astrophysical Data (Lang, 1991). En la tercer columna, vemos los valores de la fracción de masa de metales calculados usando la expresión (6,6). En la cuarta columna, mostramos los valores de la fracción de masa de metales usando la expresión dada por Bressan (6,8), en donde hemos supuesto $X = 0.77$. En la última columna, detallamos la diferencia entre los dos valores de Z .

Cúmulo Globular	$[Fe/H]$	Z	Z (Bressan)	ΔZ
NGC 104, 47 Tuc	-0.71	0.003900	0.004004	-0.000104
NGC 1261	-1.29	0.001026	0.001053	-0.000027
NGC 4590, M68	-2.09	0.000163	0.000167	-0.000004
NGC 5053	-2.17	0.000135	0.000139	-0.000004
NGC 5139 ω Cen	-1.59	0.000514	0.000528	-0.000014
NGC 5272, M3	-1.79	0.000324	0.000333	-0.000009
NGC 6093, M80	-1.64	0.000458	0.000470	-0.000012
NGC 6171, M107	-0.99	0.002047	0.002101	-0.000054
NGC 6205, M13	-1.65	0.000448	0.000460	-0.000012
NGC 6366	-0.85	0.002825	0.002901	-0.000076
NGC 6402, M14	-1.39	0.000815	0.000837	-0.000022
NGC 6723	-1.09	0.001626	0.001669	-0.000043
NGC 6838, M71	-0.58	0.005261	0.005401	-0.000140

Podemos ver que la diferencia usando una u otra expresión toma valores que van desde 1.4×10^{-4} para los cúmulos con mayor contenido de metales, hasta 4×10^{-5} para los más

deficientes en metales.

Si restamos la dos expresiones de Z y dividimos por (6,6) tenemos:

$$\frac{Z - Z_B}{Z} = \frac{10^{([Fe/H]-1.69897)} - X \cdot 10^{([Fe/H]-1.574)}}{10^{([Fe/H]-1.69897)}} \quad (9)$$

donde Z_B es la fracción de masa de metales según Bressan. Luego,

$$\frac{Z - Z_B}{Z} = \frac{10^{[Fe/H]} \cdot (10^{-1.69897} - X \cdot 10^{-1.574})}{10^{[Fe/H]} \cdot 10^{-1.69897}} \quad (10)$$

y finalmente si $X = 0.77$, obtenemos,

$$\frac{Z - Z_B}{Z} = -0.026740575582 \quad (11)$$

Esto indica que la diferencia entre las dos expresiones de Z es del orden de 2.674 %.

De aquí en más, cuando calculemos Z , o $[Fe/H]$, por ejemplo cuando transformemos las isócronas del plano teórico al observacional, vamos a usar la expresión (6,6), en donde nos liberamos de tener que suponer un valor de X , el cual desconocemos.

6.2 Diagramas H-R de los Cúmulos Globulares

Los datos fotométricos de los cúmulos globulares que se obtienen de las observaciones para realizar los diagramas H-R son: la magnitud visual aparente V , y el índice de color $B - V$.

Si quisieramos calcular la edad de un cúmulo globular debemos realizar un diagrama H-R que involucre la magnitud visual absoluta M_v , y el índice de color intrínseco $(B - V)_0$.

Para obtener M_v y $(B - V)_0$, utilizamos las expresiones proporcionadas por Massey *et al.* (Massey et al., 1989):

$$M_v = V - R \cdot E(B - V) - (m - M)_v \quad (12)$$

y

$$(B - V)_0 = (B - V) - E(B - V) \quad (13)$$

donde $(m - M)_v$ es el módulo de distancia, $E(B - V)$ es el exceso de color y R es una constante que puede tomar valores entre 3.0 y 3.1, y está referida a la absorción de la galaxia.

Aplicando estas transformaciones, los datos del cúmulo globular estan en condiciones de ser comparados con las isócronas en el plano observacional.

*Están quemando los libros,
están cortando cabezas,
están poniendo en peligro
las cartas sobre la mesa,
está lloviendo en la tierra,
están vaciando mercados,
están jugando a la guerra,
están borrando el pasado.*

7 Resultados

Calculamos los tracks para dos fracciones de masa de metales distintas, $Z = 0.0010$ y $Z = 0.0001$. Para cada metalicidad calculamos los tracks usando la teoría de la *Mixing Length* con $\alpha = 1.4$, $\alpha = 1.5$, y $\alpha = 1.6$, y usando la teoría de *Canuto & Mazzitelli*.

Tabla 1: *Masas de los tracks calculados*

0.600	0.685	0.770	0.851	0.868	0.885	0.902	0.919	0.936	0.953
0.605	0.690	0.775	0.852	0.869	0.886	0.903	0.920	0.937	0.954
0.610	0.695	0.780	0.853	0.870	0.887	0.904	0.921	0.938	0.955
0.615	0.700	0.785	0.854	0.871	0.888	0.905	0.922	0.939	0.956
0.620	0.705	0.790	0.855	0.872	0.889	0.906	0.923	0.940	0.957
0.625	0.710	0.795	0.856	0.873	0.890	0.907	0.924	0.941	0.958
0.630	0.715	0.800	0.857	0.874	0.891	0.908	0.925	0.942	0.959
0.635	0.720	0.805	0.858	0.875	0.892	0.909	0.926	0.943	0.960
0.640	0.725	0.810	0.859	0.876	0.893	0.910	0.927	0.944	0.965
0.645	0.730	0.815	0.860	0.877	0.894	0.911	0.928	0.945	0.970
0.650	0.735	0.820	0.861	0.878	0.895	0.912	0.929	0.946	0.975
0.655	0.740	0.825	0.862	0.879	0.896	0.913	0.930	0.947	0.980
0.660	0.745	0.830	0.863	0.880	0.897	0.914	0.931	0.948	0.985
0.665	0.750	0.835	0.864	0.881	0.898	0.915	0.932	0.949	0.990
0.670	0.755	0.840	0.865	0.882	0.899	0.916	0.933	0.950	0.995
0.675	0.760	0.845	0.866	0.883	0.900	0.917	0.934	0.951	1.000
0.680	0.765	0.850	0.867	0.884	0.901	0.918	0.935	0.952	

En la tabla (7,1) se muestran las masas (en masas solares) a las que fueron calculados los tracks evolutivos.

7.1 Z=0.0010

Aquí expondremos los resultados hallados al calcular los tracks evolutivos para una fracción de metales $Z = 0.0010$.

Sobre los tracks que hemos descartado porque no convergieron, diremos que si se modifican ciertos parámetros en el archivo de entrada del código de evolución estelar, se podría forzar la convergencia, pero hemos preferido que todos los tracks que utilizamos tengan los mismos parámetros de entrada.

7.1.1 Mixing Length, $\alpha = 1.4$

En la figura (7,1) vemos en el gráfico superior izquierdo, los tracks correspondientes 0.600, 0.650, 0.700, 0.750, 0.800, 0.850, 0.900, y 0.950 masas solares calculados con el código de evolución estelar utilizando la teoría de la *Mixing Length* para $\alpha = 1.4$.

En el gráfico superior derecho, se muestran las isócronas de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 15×10^9 , 16×10^9 , 17×10^9 , 18×10^9 , 19×10^9 , y 20×10^9 años, en el plano teórico.

En los gráficos inferiores vemos las mismas isócronas, pero en el plano observacional, obtenidas mediante el algoritmo de Flower (izquierda), y usando las tablas de VandenBerg (derecha).

Debido a que los modelos no convergieron, hemos descartado los tracks correspondientes a 0.610, 0.856, 0.940, 0.965, y 1.000 masas solares.

Una vez efectuado el cálculo de las isócronas teóricas, hemos eliminado de las mismas los valores correspondientes a 0.970 masas solares en las de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 15×10^9 , 16×10^9 , y 17×10^9 años, y los valores correspondientes a 0.868 masas solares en las de 18×10^9 , 19×10^9 , y 20×10^9 años. También descartamos los valores correspondientes a 0.958 masas solares en la isócrona de 12×10^9 años, y los de 0.902 masas solares en la de 16×10^9 años. El motivo de esta eliminación es que estos puntos se apartaban de la isócrona de manera irregular.

7.1.2 Mixing Length, $\alpha = 1.5$

En la figura (7,2) vemos el gráfico de los tracks correspondientes 0.600, 0.650, 0.700, 0.750, 0.800, 0.850, 0.900, y 0.950 masas solares calculados con el código de evolución estelar

utilizando la teoría de la *Mixing Length* para $\alpha = 1.5$ (arriba a la izquierda).

En el gráfico superior derecho se muestran las isócronas de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 15×10^9 , 16×10^9 , 17×10^9 , 18×10^9 , 19×10^9 , y 20×10^9 años, en el plano teórico.

En los gráficos inferiores vemos las mismas isócronas, pero en el plano observacional, obtenidas mediante el algoritmo de Flower (izquierda), mientras que al lado vemos a las isócronas, pero esta vez obtenidas usando las tablas de VandenBerg.

Debido a que los modelos no convergieron, hemos descartado los tracks correspondientes a 0.610, 0.815, 0.856, 0.940, 0.965, y 1.000 masas solares.

Después de determinar las isócronas teóricas, hemos eliminado de las mismas los valores correspondientes a 0.970 masas solares en las de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 15×10^9 , 16×10^9 , y 17×10^9 años. En la de 12×10^9 años, descartamos además los valores correspondientes a 0.958 masas solares, en la de 17×10^9 años, eliminamos también los valores correspondientes a 0.895 masas solares, mientras que en la de 19×10^9 años eliminamos los valores correspondientes a 0.869 y 0.876 masas solares. Los motivos de esta eliminación son los mismos que en el caso $\alpha = 1.4$.

7.1.3 *Mixing Length*, $\alpha = 1.6$

En la figura (7,3) arriba a la izquierda, vemos los tracks correspondientes 0.600, 0.650, 0.700, 0.750, 0.800, 0.850, 0.900, y 0.950 masas solares calculados con el código de evolución estelar utilizando la teoría de la *Mixing Length* para $\alpha = 1.6$.

En el gráfico superior derecho se muestran las isócronas de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 15×10^9 , 16×10^9 , 17×10^9 , 18×10^9 , 19×10^9 , y 20×10^9 años, en el plano teórico.

En la parte inferior, como antes, vemos las isócronas en el plano observacional, obtenidas mediante el algoritmo de Flower (izquierda), y mediante las tablas de VandenBerg (derecha).

Debido a que los modelos no convergieron, hemos descartado los tracks correspondientes a 0.610, 0.815, 0.856, 0.940, 0.965, y 1.000 masas solares.

Una vez efectuado el cálculo de las isócronas teóricas, hemos eliminado de las mismas los valores correspondientes a 0.970 masas solares en las de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 15×10^9 , 16×10^9 , 17×10^9 , y 18×10^9 años. En la de 12×10^9 años, descartamos además los valores correspondientes a 0.958 masas solares, mientras que en la de 13×10^9 años, hemos eliminamos también los valores correspondientes a 0.944 y 0.947 masas solares.

7.1.4 Canuto & Mazzitelli

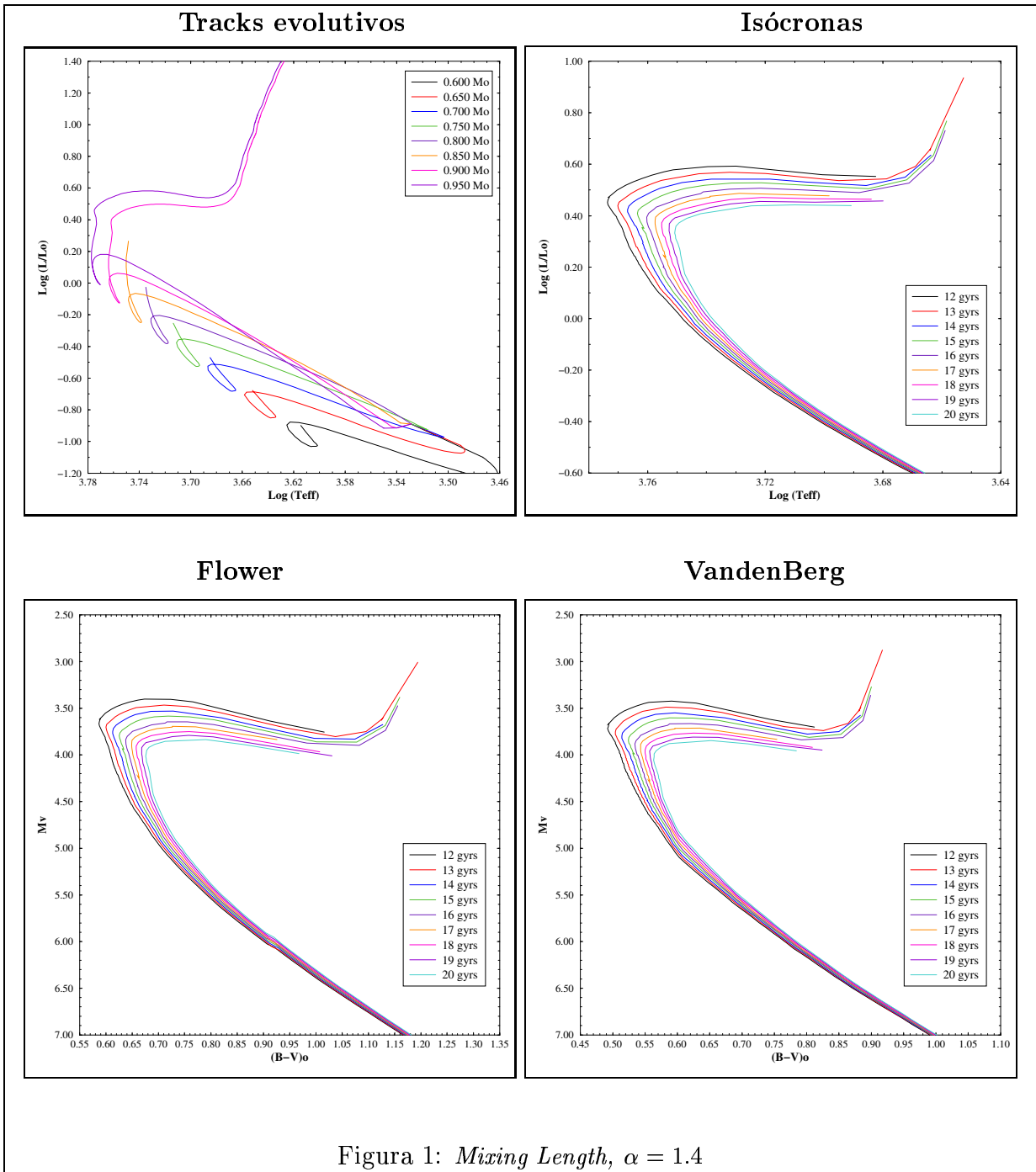
En la figura (7,4), en la parte superior izquierda, vemos los tracks correspondientes 0.600, 0.650, 0.700, 0.750, 0.800, 0.850, 0.900, y 0.950 masas solares calculados con el código de evolución estelar utilizando la teoría de la *Canuto & Mazzitelli*.

En el gráfico vecino, se muestran las isócronas de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 15×10^9 , 16×10^9 , 17×10^9 , 18×10^9 , 19×10^9 , y 20×10^9 años, en el plano teórico.

Abajo vemos las mismas isócronas, pero en el plano observacional, según el el algoritmo de Flower (izquierda), y según las tablas de VandenBerg (derecha).

Debido a que los modelos no convergieron, hemos descartado los tracks correspondientes a 0.815, 0.851, 0.854, 0.916, 0.940, y 0.965 masas solares.

Luego del cálculo de las isócronas teóricas, hemos eliminado de las mismas los valores correspondientes a 0.970 masas solares en las de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 15×10^9 , 16×10^9 , y 17×10^9 años. Los valores correspondientes a 0.881 masas solares fueron eliminados en las isócronas de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 15×10^9 , 16×10^9 , 17×10^9 y 18×10^9 años. En la de 12×10^9 años, eliminamos además los valores correspondientes a 0.955 masas solares, mientras que en la de 13×10^9 años, hemos eliminamos también los valores correspondientes a 0.948 masas solares. Por último, en la isócrona de 20×10^9 años, eliminamos los valores correspondientes a 0.858 masas solares.



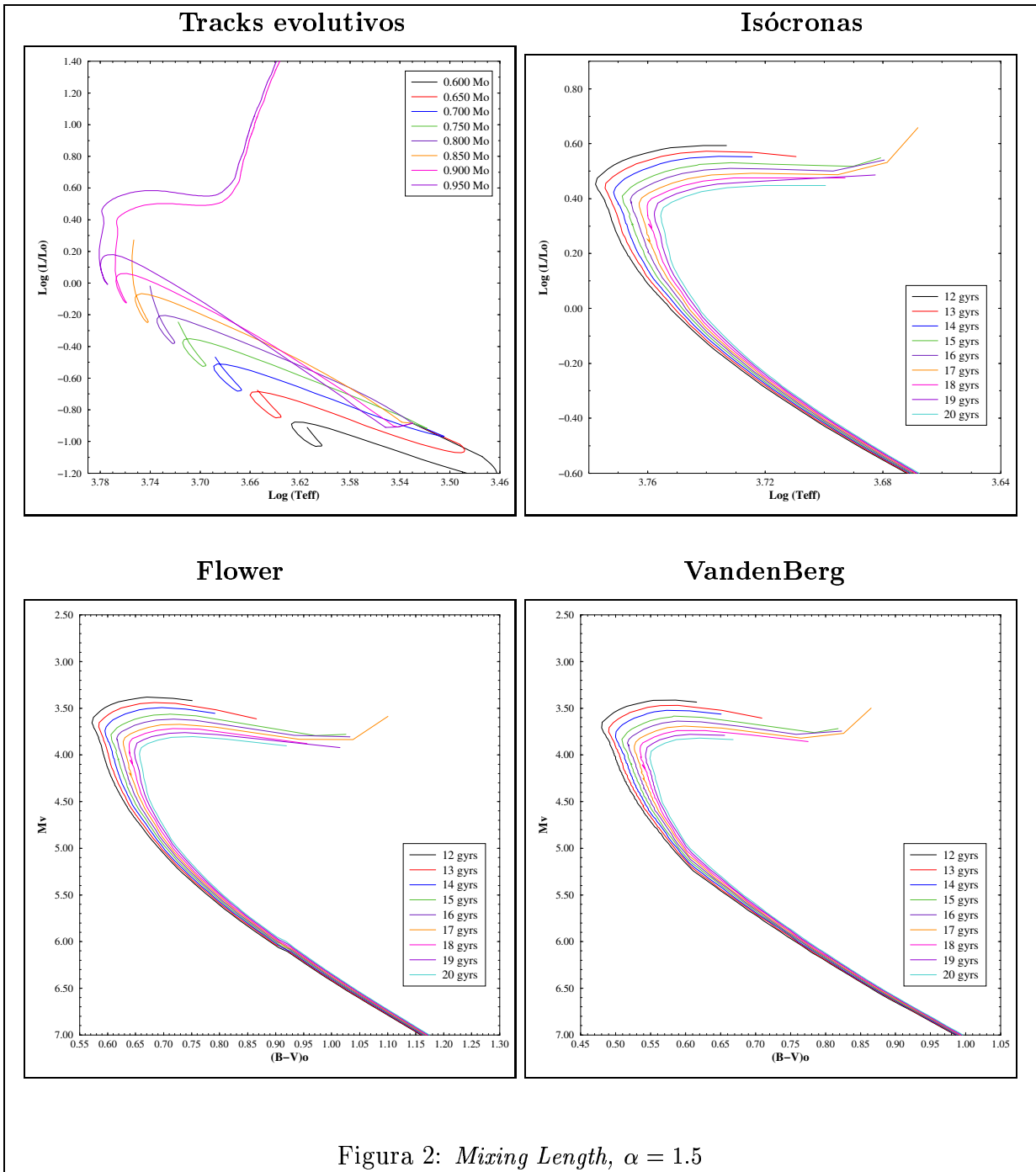
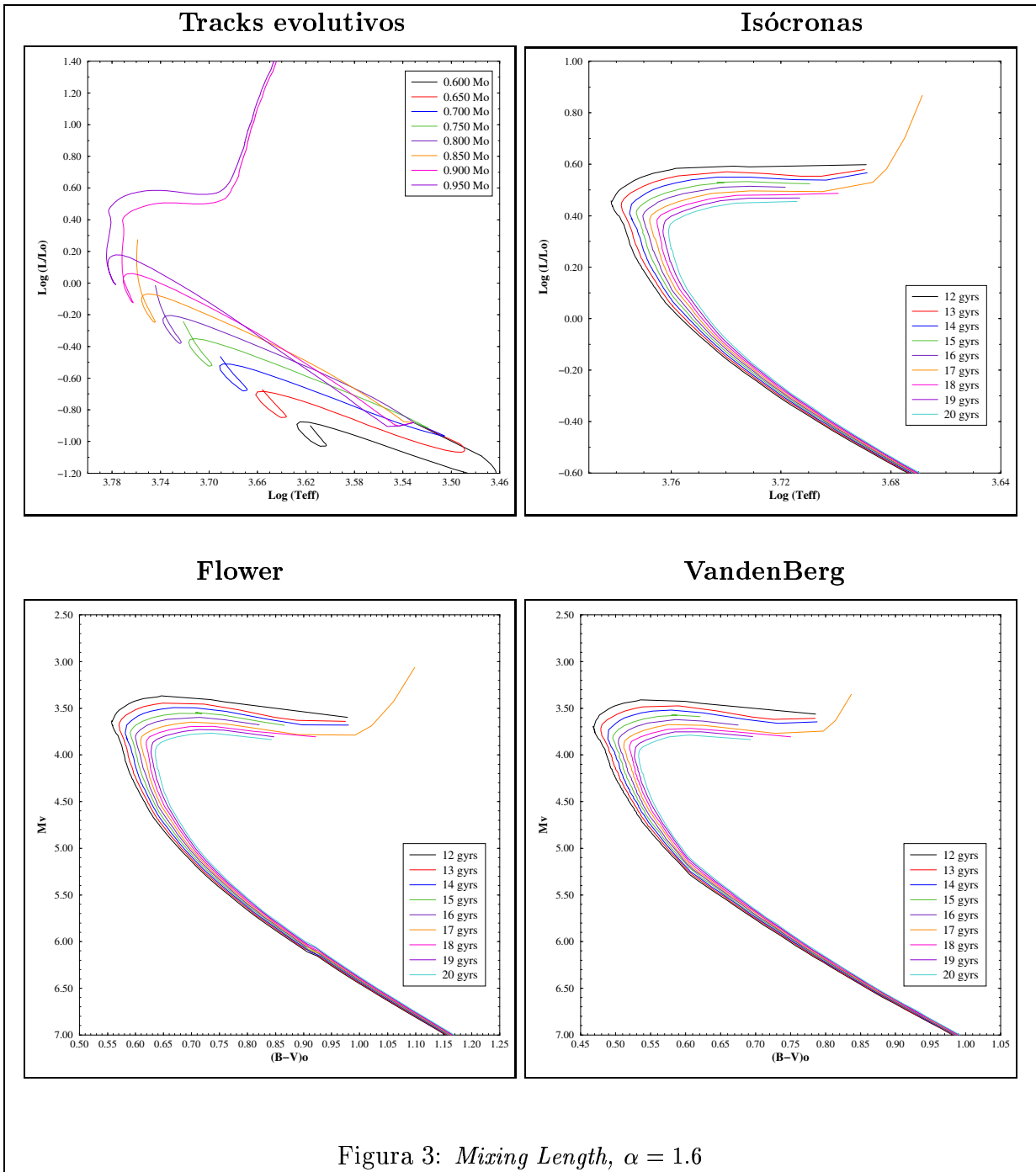
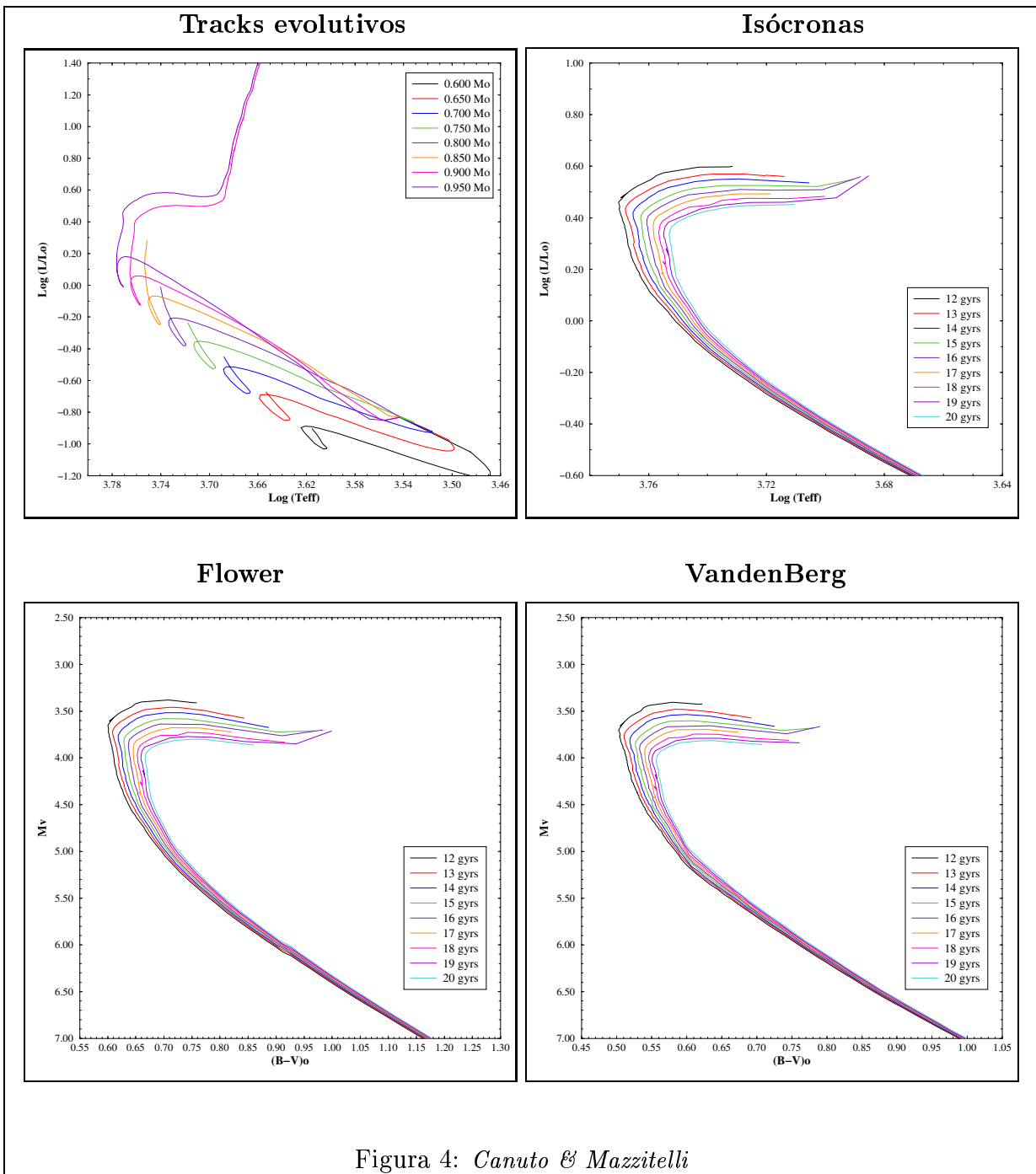


Figura 2: *Mixing Length*, $\alpha = 1.5$



Figura 4: *Canuto & Mazzitelli*

7.2 Z=0.0001

Aquí expondremos los resultados hallados al calcular los tracks evolutivos para una fracción de metales $Z = 0.0001$.

Las mismas consideraciones respecto a la convergencia de los tracks para $Z = 0.0010$, son aplicables aquí, para $Z = 0.0001$.

7.2.1 Mixing Length, $\alpha = 1.4$

En la figura (7,5) vemos en el gráfico superior izquierdo, los tracks correspondientes 0.600, 0.650, 0.700, 0.750, 0.800, 0.850, 0.900, y 0.950 masas solares calculados con el código de evolución estelar utilizando la teoría de la *Mixing Length* para $\alpha = 1.4$.

En el gráfico superior derecho, se muestran las isócronas 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 15×10^9 , 16×10^9 , 17×10^9 , 18×10^9 , 19×10^9 , y 20×10^9 años, en el plano teórico.

En los gráficos inferiores vemos las mismas isócronas, pero en el plano observacional, obtenidas mediante el algoritmo de Flower (izquierda), y usando las tablas de VandenBerg (derecha).

Debido a que los modelos no convergieron, hemos descartado los tracks correspondientes a 0.815, 0.856, 0.940, 0.965, 0.995, y 1.000 masas solares.

Luego de calcular las isócronas, eliminamos los valores correspondientes a 0.970 masas solares de las isócronas de 12×10^9 , 13×10^9 , y 14×10^9 años. Además eliminamos los valores de 0.915 masas solares en la de 14×10^9 años, los de 0.899 masas solares en la de 15×10^9 años y los de 0.870 masas solares en la de 18×10^9 años.

7.2.2 Mixing Length, $\alpha = 1.5$

En la figura (7,6) vemos el gráfico de los tracks correspondientes 0.600, 0.650, 0.700, 0.750, 0.800, 0.850, 0.900, y 0.950 masas solares calculados con el código de evolución estelar utilizando la teoría de la *Mixing Length* para $\alpha = 1.5$ (arriba a la izquierda).

En el gráfico superior derecho se muestran las isócronas de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 15×10^9 , 16×10^9 , 17×10^9 , 18×10^9 , 19×10^9 , y 20×10^9 años, en el plano teórico.

En los gráficos inferiores vemos las mismas isócronas, pero en el plano observacional, obtenidas mediante el algoritmo de Flower (izquierda), mientras que al lado vemos a las isócronas obtenidas usando las tablas de VandenBerg.

Debido a que los modelos no convergieron, hemos descartado los tracks correspondientes a 0.856, 0.890, 0.959, 0.960, y 0.965 masas solares.

Luego de determinar las isócronas, eliminamos los valores correspondientes a 0.970 masas solares de las de 12×10^9 , 13×10^9 , y 14×10^9 años. También descartamos los valores de 0.951 masas solares en la de 12×10^9 años, los de 0.914 masas solares en la de 14×10^9 años, y los de 0.870 y 0.875 masas solares en la de 18×10^9 años.

7.2.3 Mixing Length, $\alpha = 1.6$

En la figura (7,7) arriba a la izquierda, vemos los tracks correspondientes 0.600, 0.650, 0.700, 0.750, 0.800, 0.850, 0.900, y 0.950 masas solares calculados con el código de evolución estelar utilizando la teoría de la *Mixing Length* para $\alpha = 1.6$.

En el gráfico superior derecho se muestran las isócronas de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 15×10^9 , 16×10^9 , 17×10^9 , 18×10^9 , 19×10^9 , y 20×10^9 años, en el plano teórico.

En la parte inferior, como antes, vemos las isócronas en el plano observacional, obtenidas mediante el algoritmo de Flower (izquierda), y mediante las tablas de VandenBerg (derecha).

Debido a que los modelos no convergieron, hemos descartado los tracks correspondientes a 0.856, 0.890, 0.959, 0.960 y 0.965 masas solares.

Después de obtener las isócronas, eliminamos los valores correspondientes a 0.970 masas solares en las isócronas de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , y 15×10^9 años. También eliminamos los valores de 0.951 masas solares en la de 12×10^9 años, los de 0.916 y 0.917 masas solares en la de 14×10^9 años, los de 0.874 y 0.882 masas solares en la de 17×10^9 años, y los de 0.853 masas solares en las de 19×10^9 y 20×10^9 años.

7.2.4 Canuto & Mazzitelli

En la figura (7,8), en la parte superior izquierda, vemos los tracks correspondientes 0.600, 0.650, 0.700, 0.750, 0.800, 0.850, 0.900, y 0.950 masas solares calculados con el código de evolución estelar utilizando la teoría de la *Canuto & Mazzitelli*.

En el gráfico vecino, se muestran las isócronas de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 15×10^9 , 16×10^9 , 17×10^9 , 18×10^9 , 19×10^9 , y 20×10^9 años, en el plano teórico.

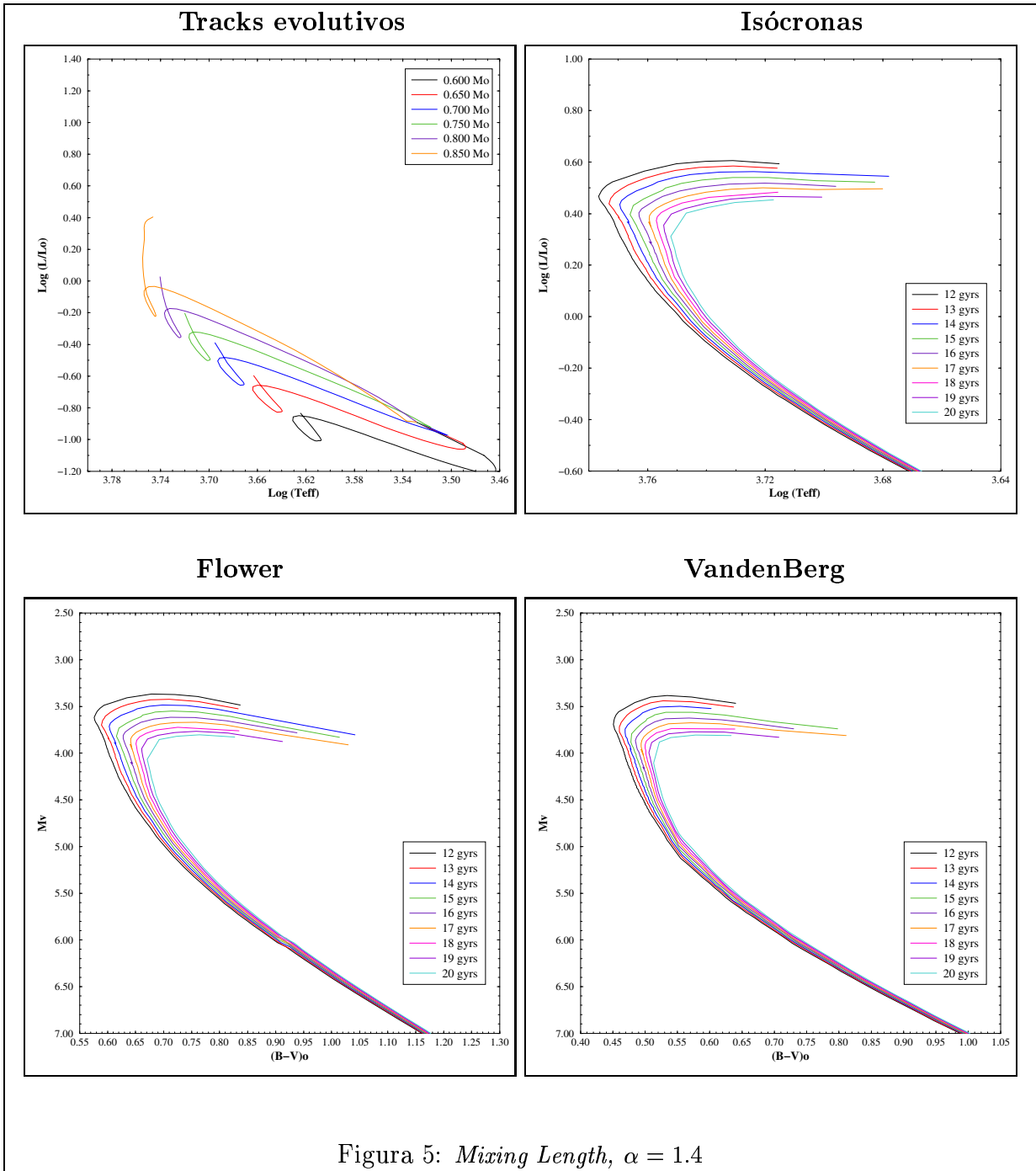
Abajo vemos las mismas isócronas, pero en el plano observacional, según el el algoritmo de Flower (izquierda), y según las tablas de VandenBerg (derecha).

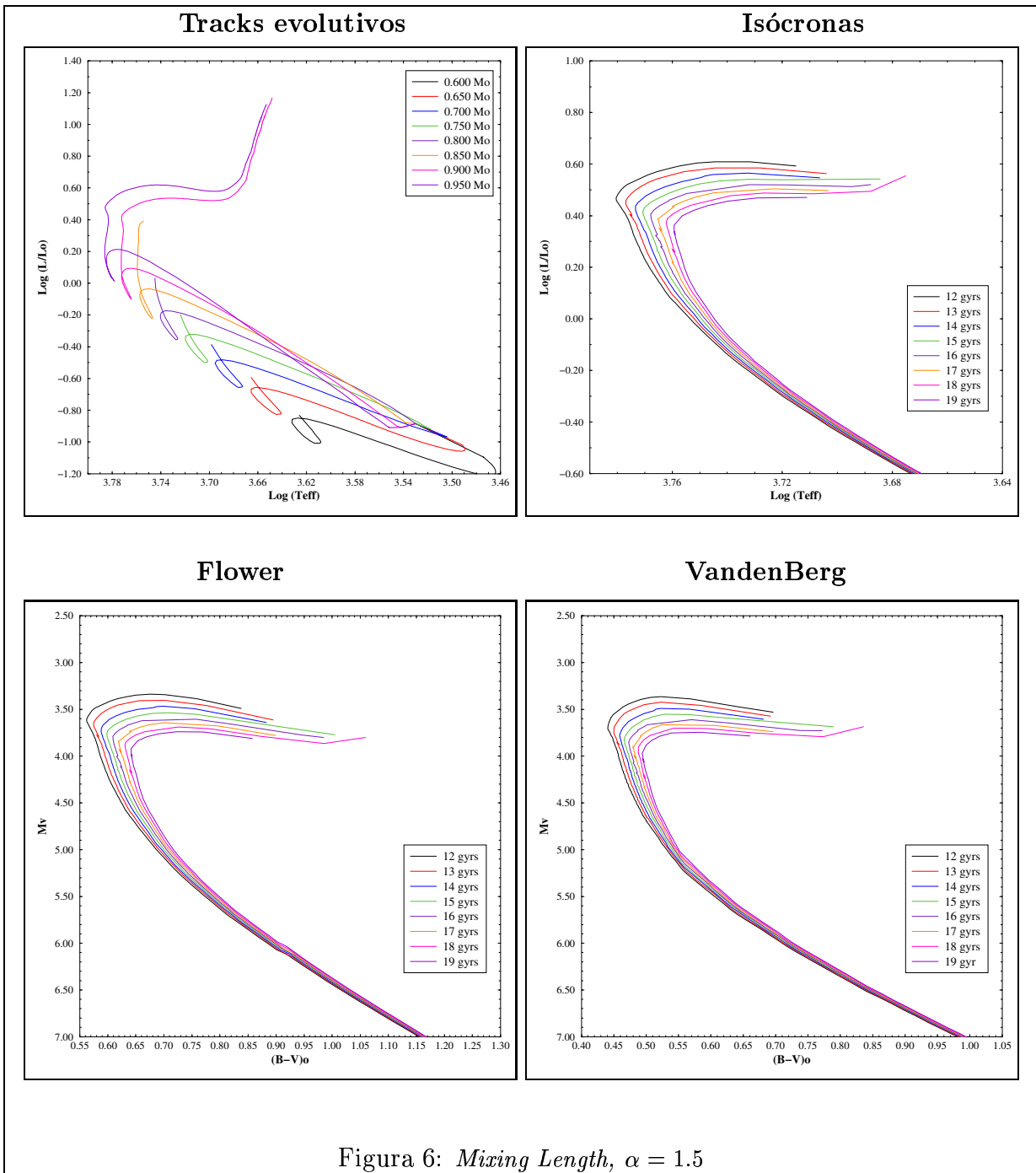
Debido a que los modelos no convergieron, hemos descartado los tracks correspondientes a 0.815, 0.851, 0.854, 0.891, 0.896, 0.899, 0.940, 0.965, 0.995 y 1.000) masas solares.

Luego de calcular las isócronas, descartamos los valores correspondientes a 0.881 y 0.970 masas solares de las isócronas de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 15×10^9 , y 16×10^9 años. Por

otro lado, también descartamos los valores de 0.950 masas solares en la de 12×10^9 años, los de 0.922 en la de 13×10^9 años, los de 0.867 masas solares en la de 18×10^9 años, y los de 0.864 en la de 19×10^9 años.

En los gráficos de todas las isócronas, ya sean en el plano teórico o en el plano observacional, no se han graficado los últimos tres o cuatro puntos de las mismas, correspondientes a la rama de las gigantes. Dado que en la etapa de salida de la secuencia principal hacia la rama de las gigantes es rápida, no disponemos de varios puntos para trazar esa parte de la isócrona en forma suave, y entonces en los gráficos aparecerían quebradas, y podrían generar confusiones.





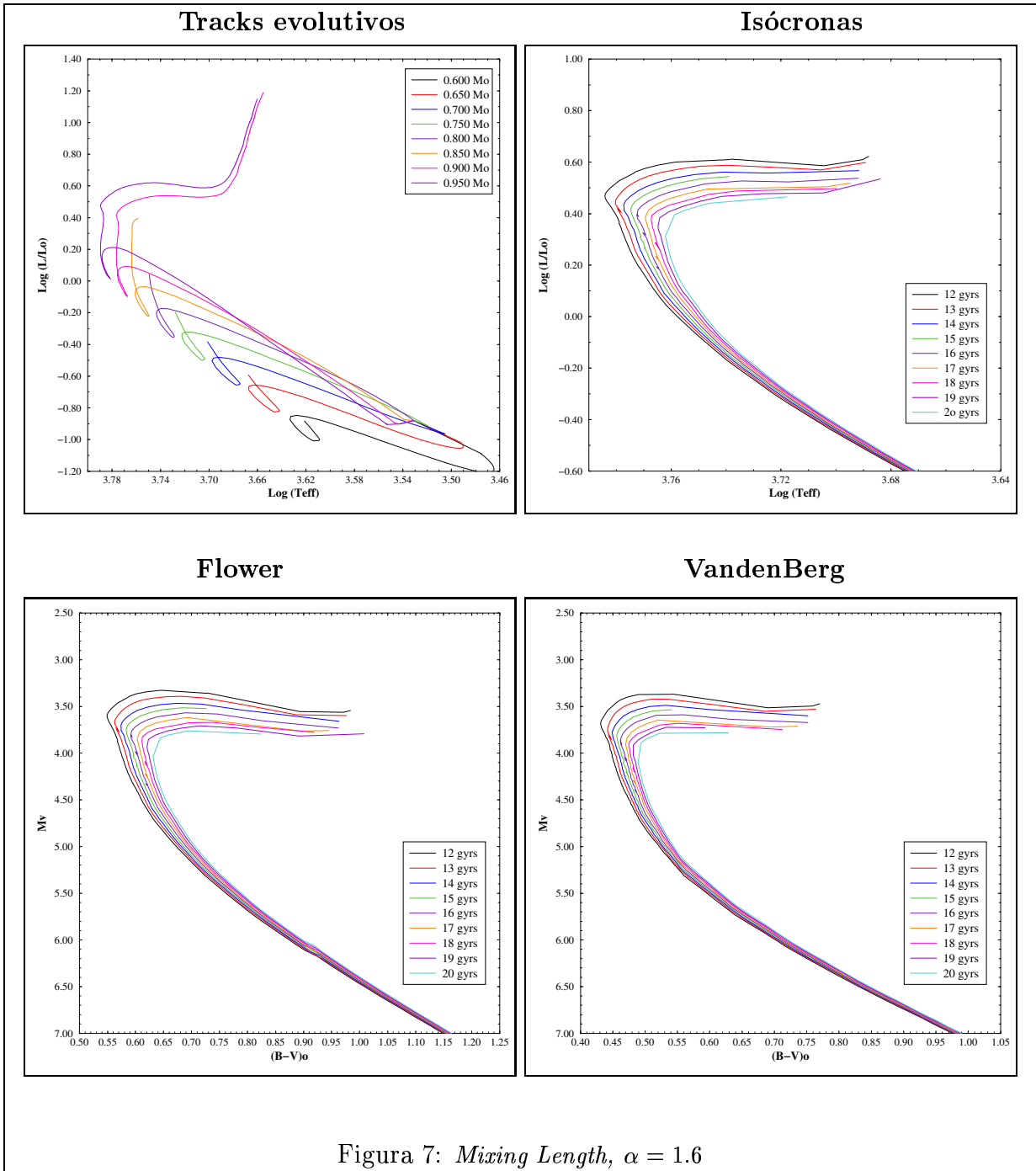
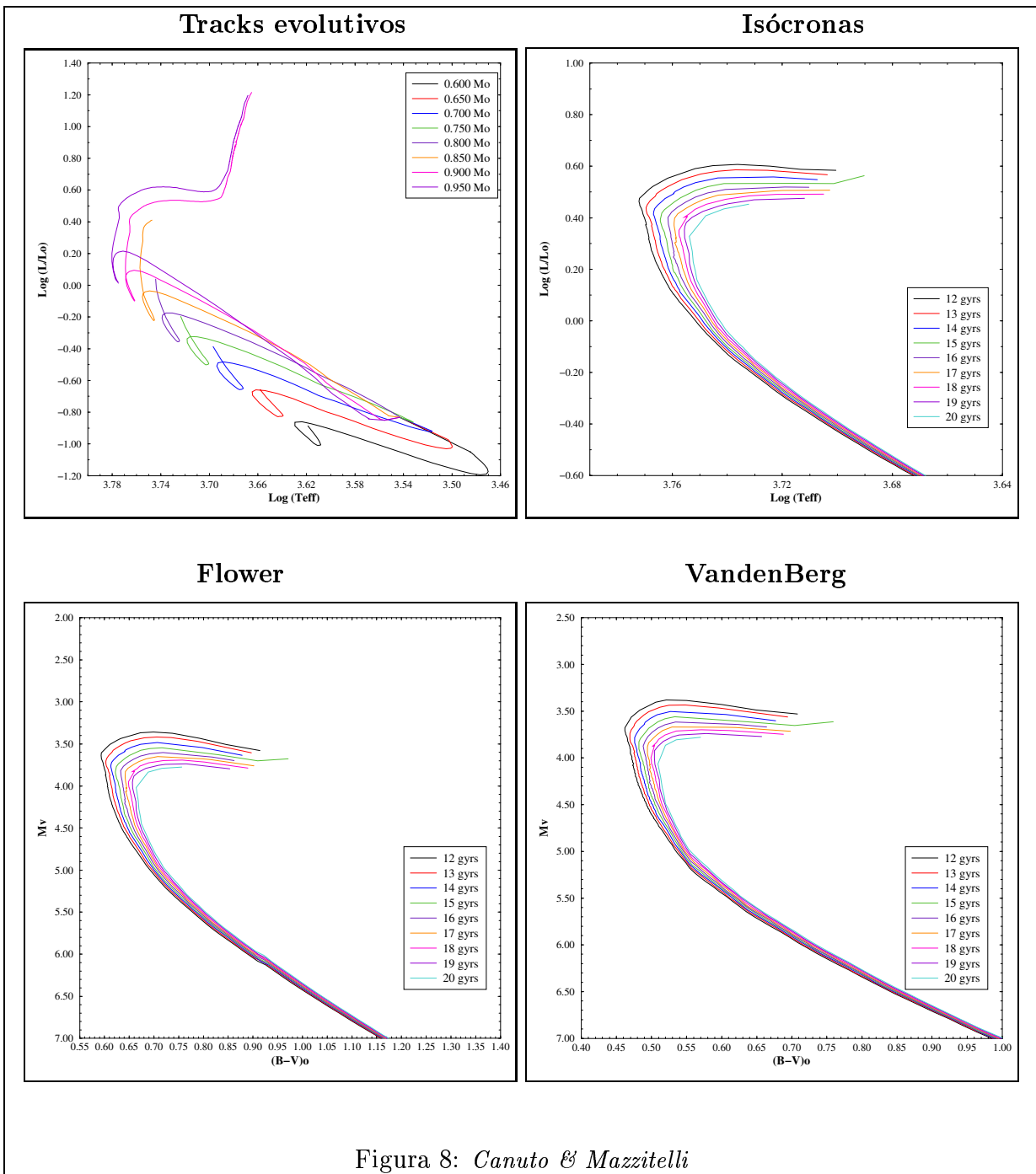


Figura 7: *Mixing Length*, $\alpha = 1.6$

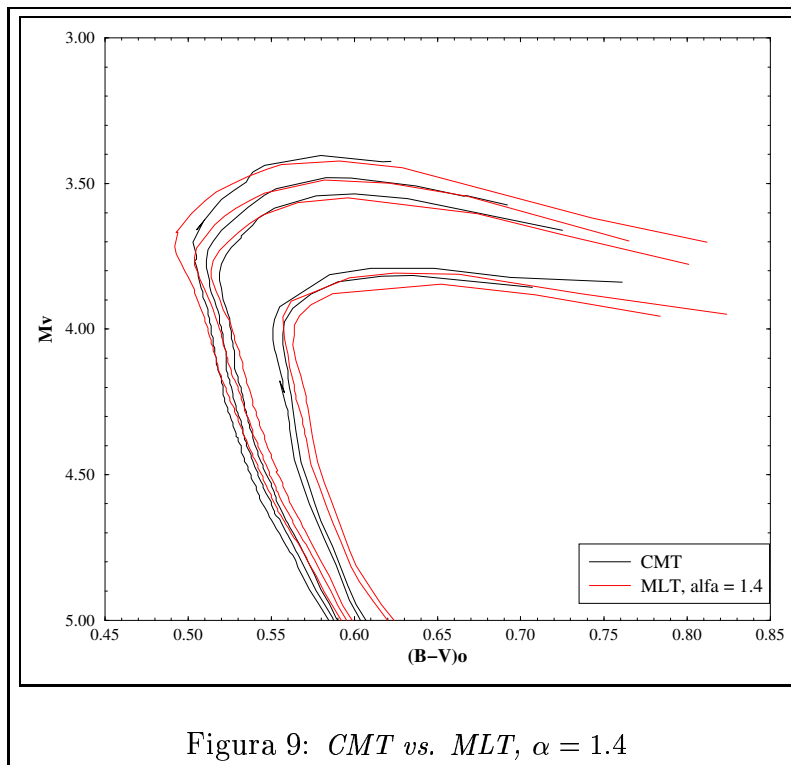
Figura 8: *Canuto & Mazzitelli*

7.3 Comparación de las isócronas calculadas con las distintas teorías de convección

En el gráfico de la figura (7,9), hemos graficado las isócronas en el plano observacional (VandenBerg), de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 19×10^9 y 20×10^9 años, calculadas usando la teoría de *Canuto & Mazzitelli* (CMT) y la teoría de la *Mixing Length* (MLT) con $\alpha = 1.4$.

En él, podemos ver que la isócrona de 13×10^9 años de la MLT se ubica entre las de 12×10^9 y 13×10^9 años de la CMT. Así mismo, la de 14×10^9 , se halla entre las de 13×10^9 y 14×10^9 años, mientras que la de 19×10^9 se encuentra entre las de 19×10^9 y 20×10^9 años.

Esto nos está indicando que para una dada isócrona calculada con la MLT, le correspondería una de la CMT aproximadamente 0.5×10^9 años **más joven**.

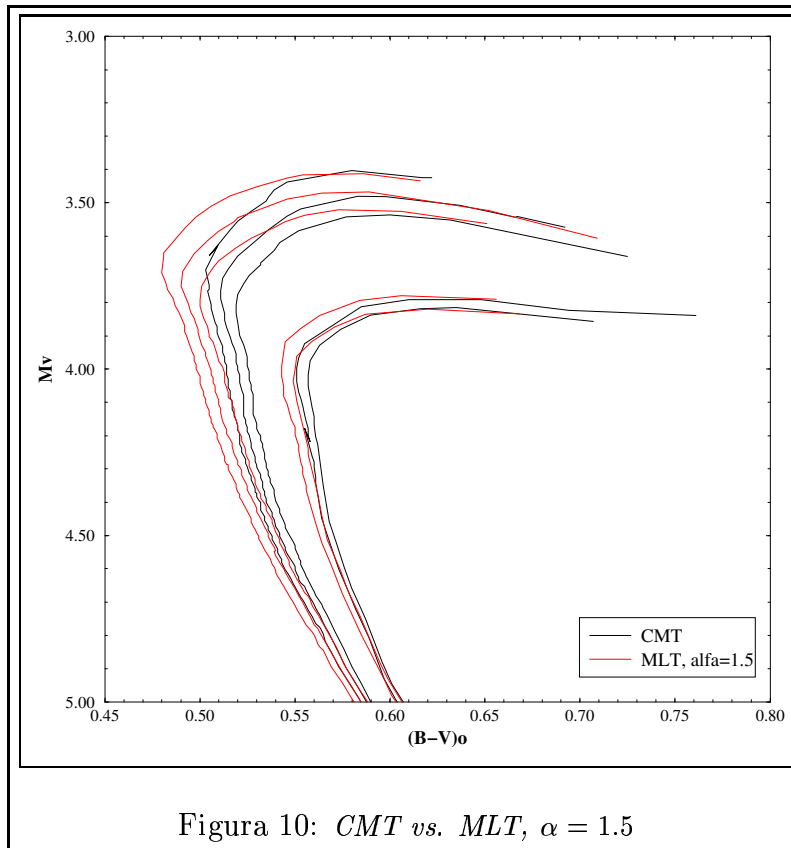


En el gráfico de la figura (7,10), hemos graficado las isócronas en el plano observacional (VandenBerg), de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 19×10^9 y 20×10^9 años, calculadas usando la teoría de *Canuto & Mazzitelli* (CMT) y la teoría de la *Mixing Length* (MLT) pero esta vez con $\alpha = 1.5$.

En él, podemos ver que la isócrona de 14×10^9 años de la MLT se ubica prácticamente entre la de 12×10^9 y la de 13×10^9 años de la CMT. También vemos que la de 20×10^9 de

la MLT se superpone con la de 20×10^9 años.

Esto nos está indicando que para una dada isócrona calculada con la MLT, y $\alpha = 1.5$, le correspondería una de la CMT de entre 1×10^9 y 1.5×10^9 años **más joven**.



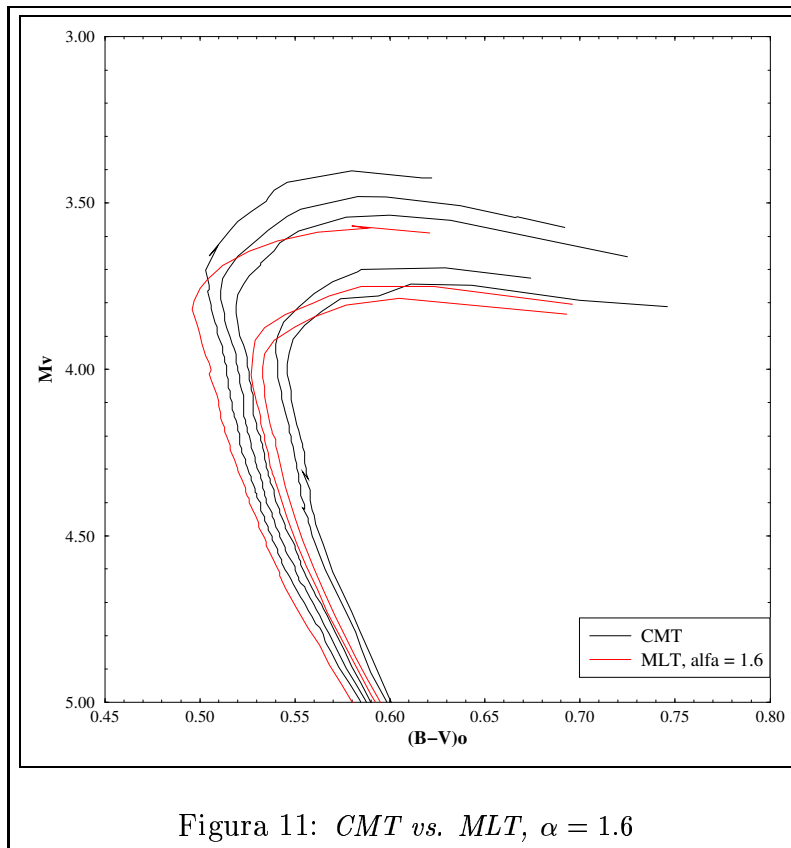
En el gráfico de la figura (7,11), hemos graficado las isócronas en el plano observacional (VandenBerg), de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 17×10^9 y 18×10^9 años, calculadas usando la teoría de *Canuto & Mazzitelli* (CMT) y las de 15×10^9 , 19×10^9 y 20×10^9 años, usando la teoría de la *Mixing Length* (MLT) con $\alpha = 1.6$.

En él, podemos ver que la isócrona de 15×10^9 años de la MLT no es fácil de comparar con las de la CMT. También vemos que la de 19×10^9 de la MLT está prácticamente entre las de 17×10^9 y 18×10^9 años.

Esto nos está indicando que para una dada isócrona calculada con la MLT, y $\alpha = 1.6$, le correspondería una de la CMT más o menos de 2.5×10^9 años **más joven**.

En los tres casos que hemos representado, las isócronas utilizadas poseen una fracción de masa de metales, $Z = 0.0010$.

Estos tres casos, nos están permitiendo demostrar que los cúmulos globulares a los que se les calcula la edad con isócronas calculadas utilizando la teoría de *Canuto & Mazzitelli*



tendrán edades menores que si se la calcula con isócronas calculadas con la teoría de la *Mixing Length*.

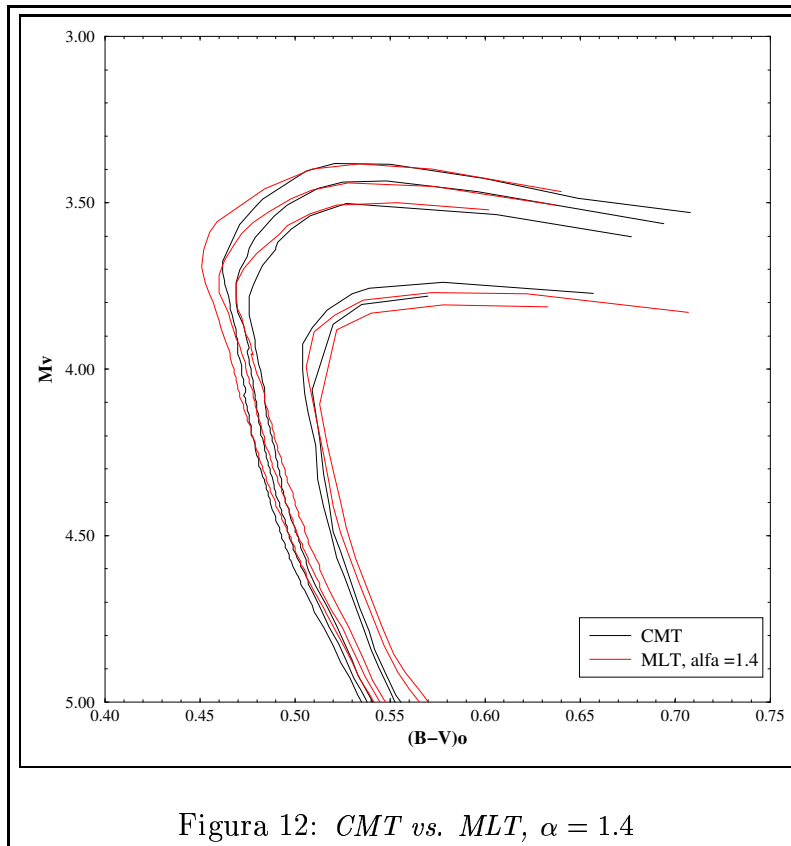
A resultados similares se llega con las isócronas con una fracción de masa de metales $Z = 0.0001$.

En el gráfico de la figura (7,12), graficamos las isócronas en el plano observacional (VandenBerg), de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 19×10^9 y 20×10^9 años, calculadas usando la teoría de *Canuto & Mazzitelli* (CMT) y la teoría de la *Mixing Length* (MLT) con $\alpha = 1.4$.

Vemos que a la isócrona de 12×10^9 años de la MLT es coincidente con una de menos de 12×10^9 años de la CMT en el *turn off* y que luego coincide con la de 12×10^9 años de la CMT. Además, podemos ver que la isócrona de 13×10^9 años de la MLT se ubica entre las de 12×10^9 y 13×10^9 años de la CMT en el *turn off* y luego coincide con la de 13×10^9 años de la CMT. Así mismo, la de 14×10^9 años, se halla entre las de 13×10^9 y 14×10^9 años en el *turn off* y luego casi se superpone con la de 14×10^9 años de la CMT. Por otro lado, la de 19×10^9 años se ubica entre la de 19×10^9 y la de 20×10^9 años de la CMT. Lo mismo ocurre con la de 20×10^9 años de la MLT.

Esto nos está indicando que para una dada isócrona calculada con la MLT, le correspon-

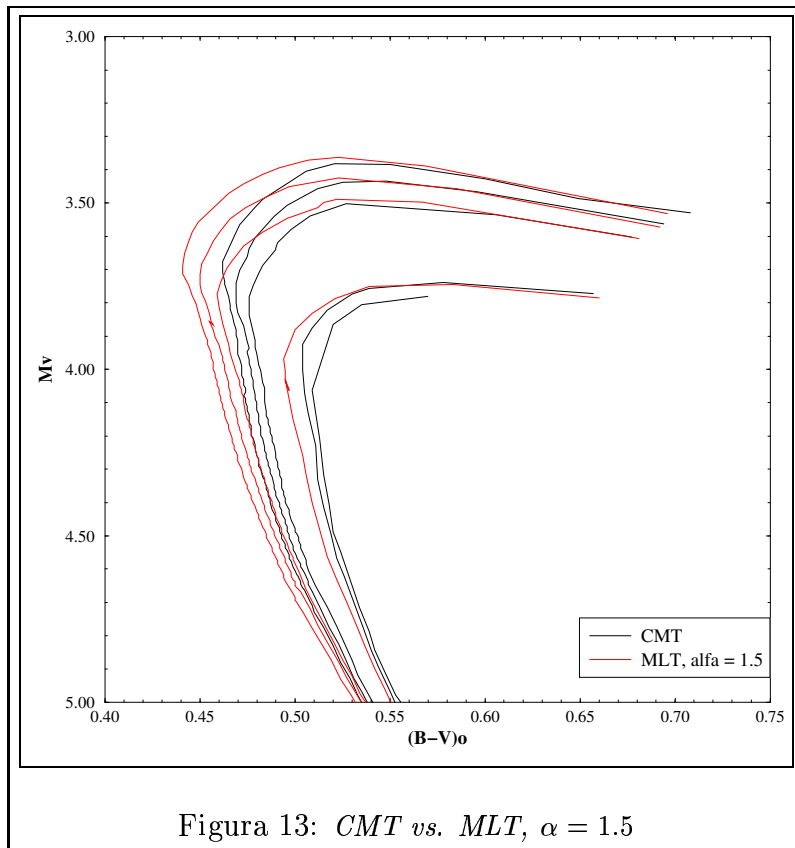
dería una de la CMT aproximadamente 0.5×10^9 años más joven, salvo en el caso de las isócronas más viejas que se corresponderían con una 0.5×10^9 años más vieja de la CMT.



En el gráfico de la figura (7,13), hemos graficado las isócronas en el plano observacional (VandenBerg), de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 19×10^9 y 20×10^9 años, calculadas usando la teoría de *Canuto & Mazzitelli* (CMT) y las de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , y 19×10^9 usando la teoría de la *Mixing Length* (MLT) pero esta vez con $\alpha = 1.5$.

En él, podemos ver que la isócrona 12×10^9 años de la MLT se ubica prácticamente entre una menor de 12×10^9 y la de 12×10^9 años de la CMT. Además, la de 13×10^9 años de la MLT está entre la una menor de 12×10^9 en la secuencia principal y luego prácticamente coincide con la de 13×10^9 años de la CMT. También vemos que la de 14×10^9 años de la MLT se ubica prácticamente entre las de 13×10^9 y 14×10^9 años de la CMT al salir de la secuencia principal. La de 19×10^9 años de la MLT se encuentra entre la de 18×10^9 y la de 19×10^9 años de la CMT al salir de la secuencia principal, coincidiendo con una aún más joven antes del *turn off*.

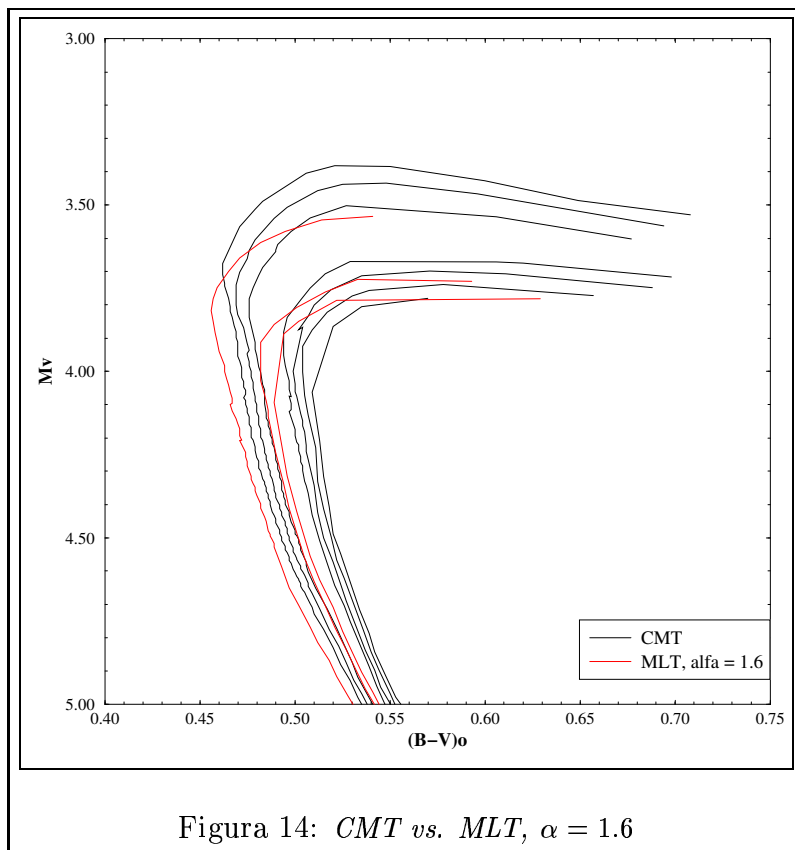
Esto nos está indicando que para una dada isócrona calculada con la MLT, y $\alpha = 1.5$, le correspondería una de la CMT de aproximadamente 0.5×10^9 años más joven.



En el gráfico de la figura (7,14), hemos graficado las isócronas en el plano observacional (VandenBerg), de 12×10^9 , 13×10^9 , 14×10^9 , 17×10^9 , 18×10^9 , 19×10^9 y 20×10^9 años, calculadas usando la teoría de *Canuto & Mazzitelli* (CMT) y las de 15×10^9 , 19×10^9 y 20×10^9 años, usando la teoría de la *Mixing Length* (MLT) con $\alpha = 1.6$.

En este caso vemos que la comparación es más dificultosa. Para la isócrona de 15×10^9 años de la MLT, en la zona de la secuencia principal se ubica como una isócrona de menos de 12×10^9 años de la CMT, y luego de salir de la secuencia principal, se coloca entre las de 14×10^9 y 15×10^9 años de la CMT. Algo similar ocurre con la de 19×10^9 de la MLT que coincide con la de 14×10^9 años de la CMT en la secuencia principal, y luego de salir de la misma se ubica entre las de 18×10^9 y 19×10^9 años de la CMT. Para la de 20×10^9 años de la MLT, coincide con la de 15×10^9 en la secuencia principal y luego sale entre las de 19×10^9 y 20×10^9 años de la CMT.

Es complejo el afirmarlo, pero podemos decir que una dada isócrona calculada con la MLT, y $\alpha = 1.6$, sería entre 0.5×10^9 y 4×10^9 años más joven si la calculamos con la CMT.

Figura 14: *CMT vs. MLT*, $\alpha = 1.6$

*Después de tanto tiempo y tanta tempestad
seguimos para siempre por este camino largo,
largo, por donde tu vas, por donde tu vas.
El fin de siglo anuncia una vieja verdad
los buenos y los malos tiempos
hacen una parte de la realidad, de la realidad.*

8 Conclusiones

Como conclusión del presente trabajo, diremos que hemos podido demostrar que utilizando isócronas calculadas con la teoría de *Canuto & Mazzitelli*, sería posible reducir la edad de los cúmulos globulares entre 0.5×10^9 y 2.5×10^9 años respecto de las edades calculadas usando la teoría de la *Mixing Length*, con distintos valores de α , a saber, 1.4, 1.5 y 1.6. Esto es un paso adelante en la resolución del problema de la edad de los cúmulos globulares referida a la edad del Universo, pero no del todo suficiente, ya que sería necesaria una mayor reducción.

En cuanto a la aplicación de las isócronas para la determinación de edades en cúmulos globulares, esta será una etapa posterior del trabajo. Para ello será necesario generar modelos de masas intermedias para representar mejor el pasaje a la rama de las gigantes rojas.

Para poder realizar el cálculo de las edades, ya disponemos de dos programas que nos permiten pasar del plano teórico al observacional. El primero, que usa el algoritmo de Flower, no sería aplicable al caso de cúmulos globulares, ya que es un algoritmo basado en observaciones de estrellas de metalicidades similares a la del Sol. El segundo, que usa las tablas de VandenBerg, nos sería muy útil dado que lo podemos aplicar para casi cualquier metalicidad.

Hemos de advertir que, estas isócronas sólo serían aplicables a cúmulos con metalicidades similares a las que hemos calculado. Una solución para esto, sería a partir de las tablas de opacidad para distintas metalicidades, generar por interpolación nuevas tablas para la metalicidad deseada, ya que obtener tablas de opacidades experimentales para cada metalicidad sería algo complicado y costoso en lo económico. Una vez obtenidas estas nuevas tablas, podríamos con ellas generar un nuevo conjunto de isócronas para la metalicidad deseada.

Referencias

- Allen, C. W.: 1976, *Astrophysical Quantities*, The Atholone Press. University of London
- Baum, W. A.: 1998, *The Astronomical Journal* **116**, 31
- Biermann, L.: 1948, *Zeitschrift Für Astrophysik* **25**, 135
- Böhm-Vitense, E.: 1958, *Zeitschrift Für Astrophysik* **46**, 108
- Bressan, A. and Tautvaivisiené, G.: 1996, *Baltic Astronomy* **5**, 239
- Canuto, V. M. and Mazzitelli, I.: 1991, *The Astrophysical Journal* **370**, 295
- Chan, K. L., Sofia, S., and Wolff, C. L.: 1982, *The Astrophysical Journal* **263**, 935
- Flower, P. J.: 1996, *The Astrophysical Journal* **469**, 355
- Heney, L. G., Forbes, J. E., and Gould, N. L.: 1964, *The Astrophysical Journal* **139**, 306
- Heney, L. G., Wilets, L., Böhm, K. H., Lelevier, R., and Levée, R. D.: 1959, *The Astrophysical Journal* **129**, 628
- Hossain, M. H. and Mullan, D. J.: 1990, *The Astrophysical Journal* **354**, L33
- Kavelaars, J. J., Harris, W. E., Hanes, D. A., Hesser, J. E., and Pritchett, C. J.: 2000, *The Astrophysical Journal* **533**, 125
- Kippenhahn, R., Weigert, A., and Hofmeister, E.: 1967, *Methods in Computational Physics* **7**, 129
- Krauss, L. M.: 1998, *The Astrophysical Journal* **501**, 461
- Kundić, T., Turner, E. L., Colley, W.Ñ., Gott, J. R., Rhoads, J. E., Wang, Y., Bergeron, L. E., Gloria, K. A., Long, D. C., Malhotra, S., and Wambsganss, J.: 1997, *The Astrophysical Journal* **482**, 75
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M.: 1987, *Fluid Mechanics*
- Lang, K. R.: 1991, *Astrophysical Data: Planets and Stars*
- Massey, P., Parker, J. W., and Garmany, C. D.: 1989, *The Astronomical Journal* **98**, 1305
- Monin, A. S. and Obukhov, A. M.: 1954, *USSR Acad. Sci. Geophys. Inst.* 24
- Prandtl, L.: 1925, *Zeitschrift Angew. Math. Mech.* **5(2)**, 136
- Tanvir, N. R., Shanks, T., Ferguson, H. C., and Robinson, D. T. R.: 1995, *Nature* **377**, 27
- Unsöld, A.: 1969, *The New Cosmos*
- VandenBerg, D. A.: 1992, *The Astrophysical Journal* **391**, 685
- Vitense, E.: 1953, *Zeitschrift Für Astrophysik* **32**, 135

Índice de Citas

- **Victor Manuel San Martín**, *Cruzar los brazos*.
- **León Gieco**, *La colina de la vida*.
- **Santiago Feliu**, *Vida*.
- **Horacio Demián Pertusi**, *Donde las aguilas se atreven*.
- **Miguel Cantilo**, *Gente del futuro*.
- **Chizo Nápoli**, *El rebelde*.
- **Norberto Napolitano**, *Longchamps Boogie*.
- **Carlos Varela**, *Ahora que los mapas cambian de color*.
- **Gerardo Alfonso**, *Son los sueños todavía*.