Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

CURSO DE NIVELACIÓN DE VERANO

Observatorio Pedagógico
La Plata, 2018

Para los Ingresantes

Queremos darte la bienvenida a la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas donde has elegido comenzar tus estudios universitarios.

En el año 2010, el Consejo Directivo de esta Facultad, su órgano máximo de gobierno, donde todos los estamentos que conforman a la misma tienen participación activa, definió una modalidad de ingreso totalmente **libre e irrestricta** conforme a lo establecido en el Estatuto de la Universidad Nacional de La Plata.

En esa misma línea, para brindar igualdad de oportunidades a todos los ingresantes, la Facultad ofrece tres modalidades del **Curso de Nivelación**: "*Matemática Elemental*", "*Curso de Nivelación a Distancia*" estos dos primeros cursos se dictan durante el segundo semestre del ciclo lectivo y el "*Curso de Nivelación de verano*" de carácter intensivo durante el mes de febrero.

El material que tenés en tus manos fue pensado y elaborado para abordar contenidos y conceptos matemáticos, la mayoría de ellos trabajados en la escuela secundaria, cuyo conocimiento será central para alcanzar los aprendizajes de las materias de primer año.

Nuestra concepción de enseñanza y aprendizaje nos lleva a proponerte una metodología de estudio teórico-práctica, de trabajo colaborativo, con la lectura de los textos y resolución de actividades propuestas en los capítulos siempre acompañados por los Instructores y auxiliares.

La base de este trabajo en equipo será la confianza: de nosotros hacia vos, en que has asumido la responsabilidad de aprender y superarte, y de vos a nosotros, en que estaremos ahí cuando lo necesiten.

El camino que comenzas a transitar es el que vos eligiste, por lo tanto consideramos que cursar, rendir, estudiar, serán parte de las opciones que vas haciendo para tu formación como futuro científico y profesional y que obligarte no tiene sentido.

Esperamos que esta idea sea también la tuya.

Las Autoridades de esta Facultad entendemos las dificultades que existen al momento de adaptarse a este cambio, por tal motivo es que te hacemos llegar una fuerte recomendación de realizar este curso, y de contar con la Prosecretaría de Asuntos Estudiantiles estudiantiles@fcaglp.unlp.edu.ar y el Observatorio Pedagógico pedagogica@fcaglp.unlp.edu.ar, para canalizar cualquier duda o inquietud.

Autoridades de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas.

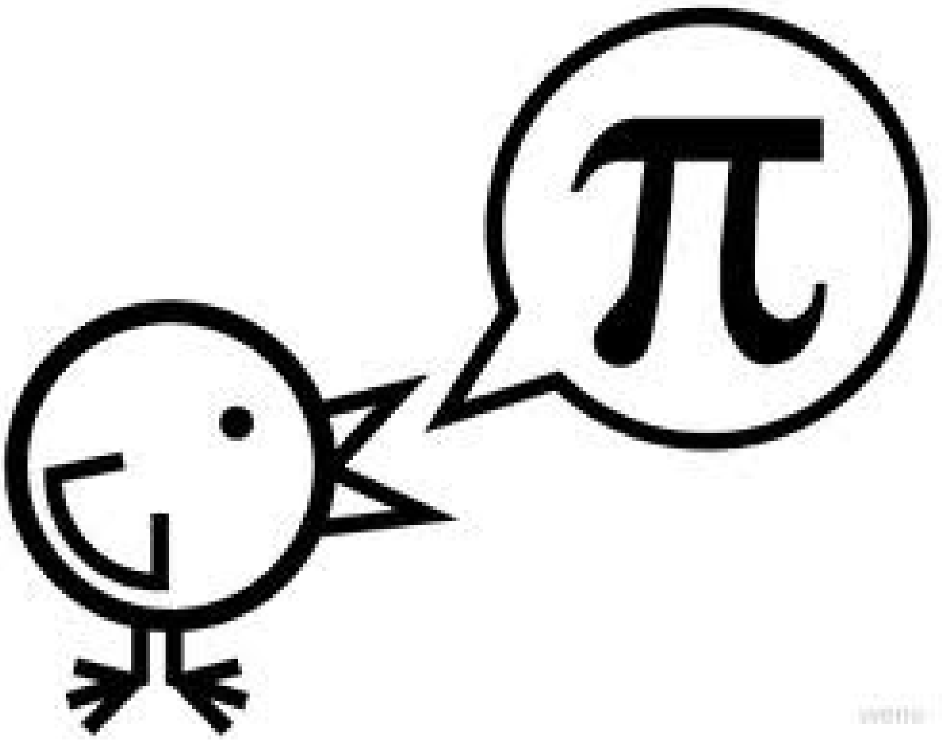
Agradecimientos

La mayor parte de este documento fue elaborado por la Lic. Yael Aidelman. Las revisiones y correcciones fueron realizadas por la Lic. Marina Sosa, la Srta. Ivon Witteveen y la Lic. Nélida N. González, bajo la coordinación de la Prof. Carla De Zan y el Lic. Alejandro Paola.

Índice general

Capítulo 1

Números Reales



Facultad de Ciencias
Astronómicas
y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Capítulo 1

Números Reales

1.1. Teoría de conjuntos

Se define a un **conjunto** como una colección de elementos. Para describir qué tipo de elementos pertenecen al conjunto existen dos maneras: por extensión y por comprensión. Supongamos que los elementos del conjunto A son el número 2, el número 4 y el número 6, entonces,

Por extensión: Un conjunto se describe **por extensión** cuando se escriben explícitamente todos los elementos que conforman el conjunto entre llaves y separados por comas (o punto y coma). En este caso el conjunto A descrito por extensión sería:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Por comprensión: Un conjunto se describe **por comprensión** cuando se escriben, entre llaves, una relación entre los elementos del conjunto. Por ejemplo:

$$A = \{x/\, x \,\text{es par y}\, 2 \leq x \leq 6\}$$

esto se lee "el conjunto A es igual a todos los x tales que x es un número par y es mayor o igual que 2 y menor o igual que 6".

Supongamos ahora que el conjunto B tiene infinitos elementos, y que sus elementos son los números pares mayores o iguales a 2. **Sólo podemos escribir al conjunto B por comprensión** ya que resulta imposible escribir a todos sus elementos.

$$B = \{x/\, x \,\text{es par y}\; x \geq 2\}$$

En algunos casos, se puede escribir un conjunto infinito de forma abreviada:

$$B = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

Pero esto sólo es posible cuando la secuencia de números representada por los puntos suspensivos no resulta ambigua.

Ejemplos:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{\text{Argentina, Perú, Bolivia, Chile}\}$
$C = \{x \,/\, x \text{ es una letra del abecedario}\}$
$D = \{A, B, C\}$ donde A, B y C son los conjuntos anteriores

---

Cuando un conjunto carece de elementos se llama **conjunto vacío** y se simboliza del siguiente modo:

$$C = \{\} = \varnothing$$

Es importante notar que el símbolo $\varnothing$ no se escribe entre llaves. Si escribimos, por ejemplo, $D = \{\varnothing\}$, estamos diciendo que el conjunto D tiene como único elemento al conjunto vacío (por lo tanto $D \neq \varnothing$).

Para expresar que un determinado elemento pertenece (o no pertenece) a un conjunto dado utilizamos la siguiente notación:

$$2 \in A, \quad \text{se lee : } 2 \text{ pertenece al conjunto } A$$

$$5 \notin A, \quad \text{se lee : } 5 \text{ no pertenece al conjunto } A$$

Análogamente diremos que **un conjunto B está incluido en el conjunto A si y sólo si todos los elementos de B pertenecen a A**, es decir:

$$B \subset A \Longleftrightarrow \forall x \in B,\ x \in A$$

Si B no está incluido en A escribiremos, $B \not\subset A$.

Es importante notar que el símbolo de pertenencia $\in$ hace referencia a un elemento que "pertenece" a un conjunto, en cambio el símbolo de inclusión $\subset$ hace referencia a un subconjunto que esta "incluido" en otro conjunto.

En la última ecuación hemos utilizado algunos símbolos como $\Longleftrightarrow$ y $\forall$. Veamos su significado así podremos utilizarlo más adelante.

- $p \Longleftrightarrow q$ significa: p es verdadera si q es verdadera y p es falsa si q es falsa. Se lee: "si y sólo si"; "sii".
- $\forall$ es un cuantificador universal, $\forall x$: $P(x)$ significa: $P(x)$ es verdadero para cualquier x. $\forall$ se lee: "para todos, para cualquier, para cada".

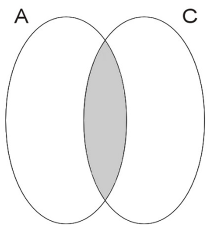
  Otros símbolos matemáticos que nos serán muy útiles son los siguientes:
- $\exists$ es un cuantificador existencial $\exists\, x : P(x)$ significa: existe por lo menos un x tal que $P(x)$ es verdadera. Se lee: existe por lo menos uno.
- $p \Longrightarrow q$ significa: si p es verdadero entonces q es verdadero también; si q es verdadero entonces nada se dice sobre p. Se lee: "implica"; " entonces"; "por lo tanto".

1.1.1. Operaciones entre conjuntos

Intersección: El conjunto "A intersección C" es el conjunto tal que sus elementos pertenecen a A **y** a C, en símbolos es:

$$A \cap C = \{x/\, x \in A \ \text{ y } \ x \in C\} \tag{1.1}$$

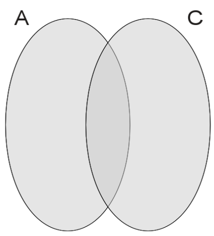
Una manera de simbolizar los conjuntos y las operaciones entre ellos es a través de diagramas de Venn. En este caso la intersección entre dos conjuntos cualesquiera A y C es la región sombreada de la siguiente figura:



Unión: El conjunto "A unión C" es el conjunto tal que sus elementos pertenecen a A **o** a C, en símbolos es:

$$A \cup C = \{x/\, x \in A \ \text{ ó } \ x \in C\} \tag{1.2}$$

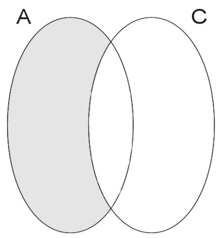
En la siguiente figura vemos su representación con diagramas de Venn:



Resta: El conjunto "A menos C" es el conjunto tal que sus elementos pertenecen a A **y no** pertenecen a C, en símbolos es:

$$A - C = \{x/\, x \in A \ \text{ y } \ x \notin C\} \tag{1.3}$$

Y su representación con diagramas de Venn es:



1.2. Conjuntos de Números

Números Naturales, $\mathbb{N}$: Son los números que se utilizan para contar

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

En este curso consideraremos que el número cero no está incluido en el conjunto de números naturales. En el caso de incluirlo usaremos la siguiente notación:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Números Enteros, $\mathbb{Z}$: este conjunto está conformado por los números naturales, sus correspondientes negativos y el cero:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Números Racionales, $\mathbb{Q}$: El conjunto de los números racionales se define a partir del cociente entre dos números enteros, esto es:

$$\mathbb{Q} = \{x/\, x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\}$$

a $\boldsymbol{p}$ se lo llama **numerador** y a $\boldsymbol{q}$ se lo llama **denominador** de la fracción $\frac{p}{q}$.

Ejemplo: *Los siguientes son números racionales:*

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{10}{8} \quad \frac{262}{1} \quad \frac{15}{10} \quad \frac{0}{15847} \quad \frac{89654}{1452147}$$

Esta definición incluye a los números enteros ya que si $q = 1$ tendremos que:

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{1} = p, \quad \text{y } p \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Los números fraccionarios, $\mathbb{F}$, son aquellos números racionales que no son enteros.

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$$

Los números racionales se pueden escribir como una fracción o como un número decimal. El número decimal cosrrespondiente a un número racional escrito de la forma $\frac{p}{q}$ es igual al resultado de dividir el numerador por el denominador. Por ejemplo, la fracción $\frac{1}{2}$ es igual al número decimal 0.5; $\frac{1}{4} = 0.25$; $\frac{3}{2} = 1.5$.

Existen casos en que el resultado de la división del numerador por el denominador da un número con infinitos decimales que se repiten con una secuencia determinada. Por ejemplo, $\frac{1}{3} = 0.33333333...$, $\frac{8}{33} = 0.252525...$, $\frac{299}{66} = 4.53030303030....$ A estos números decimales se los llama periódicos. La notación que suele utilizarse para las cifras que se repiten es la siguiente: $0,33333333...$ se escribe $0.\widehat{3}$, del mismo modo $0.252525... = 0.\widehat{25}$ y $4.5303030... = 4.5\widehat{30}$.

Hay que tener en cuenta que cuando decimos que un número tiene infinitos decimales estamos excluyendo el caso de tener infinitos ceros, ya que todos los números decimales se pueden escribir con infinitos ceros a la derecha. Por ejemplo, $0.5 = 0.500 = 0.5000000000 = 0.5\widehat{0}$.

Cómo pasar un número decimal a fracción

La estrategia que utilizaremos para poder hacer el pasaje a fracción va a depender de la cantidad (finita o infinita) de decimales que tenga el número. Vamos a explicarlas con algunos ejemplos.

Ejemplo 1: *Números con finitos decimales*

Para pasar un número con finitos decimales a fracción (una división de números enteros) hacemos lo siguiente: sea n el número decimal, para obtener su equivalente como división de enteros multiplicamos y dividimos a n por la unidad seguida de cero correspondiente a la cantidad de decimales. Es decir que si n tiene un decimal multiplicamos y dividimos por 10, si tiene dos decimales multiplicamos y dividimos por 100, y así siguiendo.

- **Ejemplo 1a:** *Sea* $n = 1.56$ *entonces:*

$$1.56 = 1.56\,\frac{100}{100} = \frac{1.56 \times 100}{100} = \frac{156}{100}$$

- **Ejemplo 1b:** *Sea* $n = 12.328$

$$12.328 = 12.328\,\frac{1000}{1000} = \frac{12328}{1000}$$

Ejemplo 2: *Números periódicos*

Pasar un número periódico a fracción es un poco más complicado.

- **Ejemplo 2a:** *Tomemos el número periódico* $n = 1.\widehat{3}$ *y multipliquémoslo por 10, esto es* $10\,n = 13.\widehat{3}$*, luego, para deshacernos de la parte periódica, hacemos la resta:*

$$10\,n - n = 13.\widehat{3} - 1.\widehat{3}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $13.\widehat{3} = 13 + 0.\widehat{3}$ *y* $1.\widehat{3} = 1 + 0.\widehat{3}$ *resulta que:*

$$10\,n - n = 13.\widehat{3} - 1.\widehat{3} = 13 + 0,\widehat{3} - (1 + 0.\widehat{3}) = 13 + \cancel{0.\widehat{3}} - 1 \cancel{- 0.\widehat{3}} = 12$$

Luego, como $10\,n - n = 9\,n$ *encontramos que:*

$$9\,n = 12$$

Finalmente, despejando n *encontramos su expresión como división de enteros*

$$n = \frac{12}{9}$$

- **Ejemplo 2b:** *Tomamos* $n = 2.5\widehat{4}$, *entonces siguiendo una idea similar a la anterior hacemos la resta:*

  $$100\,n - 10\,n = 254.\widehat{4} - 25.\widehat{4} = 254 - 25$$

  Luego, teniendo en cuenta que $100\,n - 10\,n = 90\,n$ *y despejando* n *de la relación anterior encontramos que:*

  $$n = \frac{254 - 25}{90} = \frac{229}{90}$$

Números Irracionales, $\mathbb{I}$: Son los números que no pueden expresarse como un cociente de números enteros. Por lo tanto tienen infinitos decimales no periódicos.[1]

Números Reales, $\mathbb{R}$: Es la unión del conjunto de los números racionales y los irracionales:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Esquemáticamente, los conjuntos de números pueden representarse del siguiente modo:

$$\mathbb{R}\begin{cases} \mathbb{Q} & \begin{cases} \mathbb{Z} & \begin{cases} \mathbb{N} \\ \{0\} \\ \mathbb{Z}^- \end{cases} \\ \\ \mathbb{F} \end{cases} \\ \\ \mathbb{I} \end{cases}$$

[1] Qué conjunto será más grande, el de los números racionales o el de los irracionales? Puede ser que un conjunto sea más grande que el otro, si ambos tienen infinitos elementos? encontrar una respuesta aquí `http://www.youtube.com/watch?v=yX97MMWh944`.

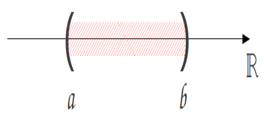
1.3. Intervalos

Los intervalos representan conjuntos infinitos de números reales contenidos en un cierto rango. Los intervalos se representan por un par de números que serán los que indiquen los extremos del rango. Para definir los distintos tipos de intervalos vamos a suponer que a y b son dos números reales tales que $a < b$.

- **Intervalo abierto, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$:** Es el conjunto de números mayores que a y menores que b (no incluye a sus extremos), y se simboliza escribiendo los extremos (de menor a mayor) entre paréntesis:

$$\boxed{(a, b) = \{x/\, a < x < b\}} \tag{1.4}$$

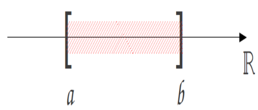
También puede representarse en la recta numérica, como se muestra a continuación.



- **Intervalo cerrado, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$:** Es el conjunto de números mayores o iguales que a y menores o iguales que b (incluye a sus extremos), y se simboliza escribiendo los extremos (de menor a mayor) entre corchetes:

$$\boxed{[a, b] = \{x/\, a \leq x \leq b\}} \tag{1.5}$$

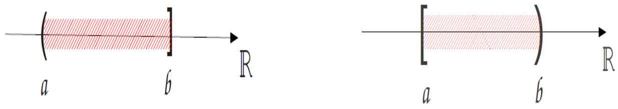
La representación en la recta numérica es la siguiente:



- **Intervalo semiabierto o semicerrado, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ ó $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$:** Es el conjunto de números que incluye a uno de sus extremos, y se simboliza escribiendo los extremos (de menor a mayor) entre un paréntesis y un corchete, el paréntesis va en el extremo no incluído en el conjunto y el corchete va en el que se incluye:

$$\boxed{\begin{array}{c} (a, b] = \{x/\, a < x \leq b\} \\ [a, b) = \{x/\, a \leq x < b\} \end{array}} \tag{1.6}$$

La representación en la recta numérica es, respectivamente:



1.4. Operaciones con números reales

A continuación vamos a estudiar las operaciones entre números reales: suma (y resta), valor absoluto, producto (y división), factorial, potenciación, radicación y logaritmo. Para esto vamos a considerar que x, y y z son números reales.

1.4.1. Suma Algebraica

Es una operación que consiste en adicionar dos o más números. Cada uno de los números que se suman se denominan términos. Las propiedades de la suma algebraica son:

1. *La suma es cerrada en* $\mathbb{R}$*:* El significado de que la suma sea cerrada en el conjunto de los números reales es que la suma de dos números reales da como resultado otro número real. En símbolos es:

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R},\ x+y\ \in \mathbb{R}} \tag{1.7}$$

2. *Propiedad conmutativa:*

$$\boxed{x+y=y+x} \tag{1.8}$$

3. *Propiedad asociativa:*

$$\boxed{(x+y)+z=x+(y+z)=x+y+z} \tag{1.9}$$

4. *Existencia de elemento neutro:*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\, 0/\ x+0=0+x=x} \tag{1.10}$$

5. *Existencia del opuesto:*

   Dado cualquier número real x, existe un número real $-x$ tal que la suma de ellos es igual al elemento neutro, $x_0=0$. En símbolos es:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exists -x\ \in \mathbb{R}/\ x+(-x)=(-x)+x=x_0=0} \tag{1.11}$$

   Se puede demostrar (utilizando la definición del opuesto) que **el opuesto del opuesto es el mismo número: $-(-x)=x$.**

   Es importante notar que $-x$ es el opuesto de x, pero de ningún modo podemos decir que esto significa que el número $-x$ es negativo. Es decir si x es un número positivo, $x>0$, entonces su opuesto será negativo, $-x<0$. Por ejemplo: el opuesto de 2 es -2. Pero si x es menos que cero (negativo), entonces su opuesto será positivo, por ejemplo: el opuesto de -6 es $-(-6) = 6$. **El único número que es igual a su opuesto es el cero.**

$$\boxed{x = -x \Longleftrightarrow x = 0} \tag{1.12}$$

Por esta razón la resta se puede pensar como la suma del opuesto: x más el opuesto de y es igual a restarle y a x. Es decir que:

$$\boxed{x + (-y) = x - y} \tag{1.13}$$

6. *Propiedad cancelativa:*

   Esta propiedad es una consecuencia de la existencia del opuesto y del elemento neutro.

$$\boxed{x + y = x + z \Longleftrightarrow y = z} \tag{1.14}$$

   Esta propiedad permite cancelar un mismo término en ambos miembros:

$$x + y = x + z \Longrightarrow y = z$$

   o agregarlo:

$$y = z \Longrightarrow x + y = x + z$$

   La propiedad cancelativa permite hacer pasaje de términos en una igualdad.

$$x + y = z$$

   Por propiedad de la igualdad

$$x + y + (-y) = z + (-y)$$

   Por definición del opuesto

$$x + 0 = z - y$$

   Por definición del elemento neutro

$$x = z - y$$

1.4.2. Módulo o Valor Absoluto

Esta operación se define de la siguiente manera: “El módulo de un número cualquiera es igual a dicho número si éste es positivo o cero, y es igual a su opuesto si es negativo”.

El valor absoluto se denota poniendo dos líneas verticales a ambos lados del número. Una forma simbólica de representar lo que acabamos de decir es:

$$|número\,cualquiera| = \begin{cases} número\,cualquiera & \text{si } número\,cualquiera \geq 0 \\ -(número\,cualquiera) & \text{si } número\,cualquiera < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo: $|2| = 2$ y $|-4| = -(-4) = 4$.

Una vez comprendida la idea del valor absoluto daremos su definición formal:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}} \tag{1.15}$$

Notemos que el módulo de cualquier número es siempre positivo, $|x| \geq 0$. Además tenemos:

$$\boxed{|x| = 0 \iff x = 0} \tag{1.16}$$

Este tema lo retomaremos en el Capítulo 4, donde estudiaremos funciones.

1.4.3. Producto

El producto entre dos números reales cualesquiera, representados por x e y, se simboliza con un punto, $x \,.\, y$, o con una cruz, $x \times y$. Generalmente estos símbolos suelen omitirse, por lo que "x multiplicado por y" puede escribirse simplemente como xy.

Las propiedades del producto entre números reales son las siguientes:

1. *El producto es cerrado en* $\mathbb{R}$*:*

   El producto de dos números reales da como resultado otro número real. En símbolos es:

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \; xy \in \mathbb{R}} \tag{1.17}$$

2. *Propiedad conmutativa:*

$$\boxed{x\,y = y\,x} \tag{1.18}$$

   "El orden de los factores no altera el producto".

3. *Propiedad asociativa:*

$$\boxed{(x\,y)\,z = x\,(y\,z) = x\,y\,z} \tag{1.19}$$

4. *Existencia de unidad:*

   Dado cualquier número real x, existe un número real 1 tal que el producto entre ellos es igual a x. Esto se simboliza de la siguiente manera:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \; \exists 1/ \; x \,.\, 1 = 1 \,.\, x = x} \tag{1.20}$$

5. *Existencia del recíproco:*

   Dado cualquier número real x distinto de cero, existe un número real x^{-1} tal que el producto entre ellos es igual a la unidad, $x'_0 = 1$. En símbolos es:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} - \{0\},\ \exists\, x^{-1} \,/\, x\, x^{-1} = x^{-1}\, x = x'_0 = 1} \tag{1.21}$$

Notemos que **no existe el recíproco del cero**, ya que cualquier número real multiplicado por cero es igual a cero.

Más adelante veremos que se puede escribir que $x^{-1} = \frac{1}{x}$. De este modo **se puede definir el cociente entre $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{\frac{x}{y}}$, como el producto entre $\boldsymbol{x}$ y el recíproco de $\boldsymbol{y}$ (siempre que $\boldsymbol{y \neq 0}$):**

$$\boxed{x\, y^{-1} = x\,\frac{1}{y} = \frac{x}{y}} \tag{1.22}$$

Es importante observar que la división por cero no está definida

De acuerdo a la definición dada para el recíproco de un número real tenemos que:

- El recíproco de la unidad es la unidad:

$$1 = \frac{1}{1} \tag{1.23}$$

- El recíproco del recíproco es el mismo número:

$$\frac{1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{1.24}$$

- El producto de los recíprocos es el recíproco del producto:

$$\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{(xy)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{1.25}$$

6. *El producto de cualquier número por cero es cero.*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0} \tag{1.26}$$

Notemos que si en la propiedad 5 no hubiésemos excluido el cero, tendríamos una contradicción entre las propiedades 5 y 6. Por esta razón es que **"cero sobre cero" está indeterminado, y por esta razón nunca lo escribimos**.

7. *Propiedad cancelativa:*

Esta propiedad es una consecuencia de la existencia del inverso y del elemento neutro.

$$\boxed{\forall x \neq 0,\ x\, y = x\, z \Longleftrightarrow y = z} \tag{1.27}$$

Por lo tanto, esta propiedad permite agregar o cancelar un factor distinto de cero en ambos miembros:

$$\forall x \neq 0,\ x\, y = x\, z \Longrightarrow y = z$$
$$y = z \Longrightarrow x\, y = x\, z,\ \forall x \neq 0$$

Si ese factor fuese cero tendríamos un absurdo:

$$0 \cdot 3 = 0 \cdot 258 \Longleftrightarrow 3 = 258$$

La propiedad cancelativa es la que permite el pasaje de factores en una igualdad:

$$x\,y = z$$

Por propiedad de la igualdad

$$x\,y\,\frac{1}{y} = z\,\frac{1}{y}$$

Por definición del recíproco

$$x\,1 = z\,\frac{1}{y}$$

Por definición del elemento neutro

$$x = z\,\frac{1}{y}$$

8. *Regla de los signos:*

Sean a y b dos números reales y positivos:

$$\boxed{\begin{array}{c} a \cdot b = ab > 0 \\ -a \cdot b = a \cdot (-b) = -ab < 0 \\ -a \cdot (-b) = ab > 0 \end{array}} \tag{1.28}$$

Coloquialmente uno recuerda esta regla como:

"*más por más es más; más por menos es menos; menos por más es menos; y menos por menos es más*".

Es necesario aclarar que nunca se multiplican los símbolos de la suma o de la resta, se multiplican los números positivos o negativos.

Debido a la segunda igualdad (y a la existencia del elemento neutro), resulta que el opuesto de cualquier número real se puede escribir como dicho número multiplicado por -1:

$$\boxed{-x = (-1) \cdot x} \tag{1.29}$$

Como dijimos que la división se puede expresar como un producto, **esta regla también es válida para el cociente de números reales**.

Para poder lograr un mejor entendimiento de esta "regla de signos" hemos introducido, en la lectura adicional "Menos por menos es más ... ¿Seguro?", un texto de Adrián Paenza[2], donde se explica esta regla.

[2]Adrián Arnoldo Paenza (n. Buenos Aires, 9 de mayo de 1949) es licenciado y doctor en ciencias matemáticas por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA). Una de sus actividades consiste en la divulgación de la matemática. Entre otras cosas se pueden encontrar los libros de la colección "Matemática ... ¿estás ahí?". Buscalos en `http://cms.dm.uba.ar/material/paenza`.

9. *Distribución con respecto a la suma:*

$$\boxed{x\,(y+z) = x\,y + x\,z} \tag{1.30}$$

El producto es distributivo con respecto a la resta ya que la resta la podemos escribir como la suma del opuesto:[3]

$$\boxed{x\,(y-z) = x\,(y+(-z)) = x\,y + x\,(-z) = x\,y - x\,z} \tag{1.31}$$

1.4.4. Suma y producto de fracciones

Aquí vamos a ver en detalle cómo se aplican las propiedades de la suma y del producto a la operación con números racionales. Sean a, b, c y d números enteros y los consideraremos no nulos cuando sean denominadores.

1. *Suma de fracciones:*

Cuando las fracciones tienen el mismo denominador tendremos que (en este caso $b \neq 0$):

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}} \tag{1.32}$$

La forma de operar para llegar al resultado anterior es:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = a\,\frac{1}{b} + c\,\frac{1}{b} = (a+c)\,\frac{1}{b} = \frac{a+c}{b}$$

En el caso en que las fracciones no tengan el mismo denominador hay que llevar las fracciones a fracciones equivalentes[4] para obtener igual denominador. Esto es lo que conocemos como "sacar denominador común".

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + c\,b}{b\,d}} \tag{1.33}$$

donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$. La forma de operar en este caso es:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\,1 + \frac{c}{d}\,1 = \frac{a}{b}\,\frac{d}{d} + \frac{c}{d}\,\frac{b}{b} = \frac{a\,d}{b\,d} + \frac{c\,b}{d\,b} = \frac{a\,d + c\,b}{b\,d}$$

En general conviene elegir como denominador común el mínimo común múltiplo[5] de los denominadores.

[3] Otra manera de pensar el producto y la aplicación de esta propiedad la pueden encontrar en `http://www.youtube.com/watch?v=5JtliQVoOZo&feature=related`.

[4] Dos fracciones son equivalentes cuando representan al mismo número. Por ejemplo $0.5 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1000}{2000}$.

[5] El mínimo común múltiplo de dos números es el menor número que sea simultáneamente múltiplo de ambos.

Ejemplo: *Supongamos que cortamos una pizza en 8 porciones iguales. La pizza completa la podemos representar numéricamente como*

$$1 = \frac{8}{8}$$

Es decir, que de las ocho porciones, tenemos 8. Supongamos ahora que nos comemos 3 porciones y después de un buen rato nos comemos otras 2 porciones. En total nos comimos 5 porciones, si hacemos la cuenta tendremos

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$$

Ahora supongamos que nos comemos además la mitad de una de las porciones. Esta media porción equivale a cortar la pizza en 16 porciones iguales y comernos una de estas porciones, entonces en total nos hemos comido

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{16} = \frac{5}{8}\frac{2}{2} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10+1}{16} = \frac{11}{16}$$

Por lo tanto nos comimos "once dieciseisavos de pizza".

---

2. *Opuesto de una fracción:*

   El opuesto de una fracción puede escribirse de distintas maneras siguiendo la regla de los signos. Sea $b \neq 0$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\left(a\,\frac{1}{b}\right) \\ &= (-a)\frac{1}{b} = a\left(-\frac{1}{b}\right) \\ &= a\frac{-1}{b} = a\frac{1}{-b} = (-1)\frac{a}{b} \end{aligned} \tag{1.34}$$

3. *Producto de fracciones:*

   Se multiplica numerador con numerador y denominador con denominador.

$$\boxed{\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}} \tag{1.35}$$

   donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$. En este caso las operaciones que hicimos para obtener el resultado anterior son

$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \left(a\,\frac{1}{b}\right)\left(c\,\frac{1}{d}\right) = (a\,c)\,\left(\frac{1}{b}\,\frac{1}{d}\right) = (a\,c)\,\left(\frac{1}{b\,d}\right) = \frac{a\,c}{b\,d}$$

4. *Recíproco de una fracción:*

$$\boxed{\frac{1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)} = \frac{b}{a}} \tag{1.36}$$

con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{1}{a\,\frac{1}{b}} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{1}{a}\,b = \frac{b}{a}$$

5. *División de fracciones:*

Es lo que se conoce como "extremos con extremos y medios con medios".

$$\boxed{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a\,d}{b\,c}} \tag{1.37}$$

Los extremos serían a y d, mientras que los medios serían b y c ($b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$).

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a\,\frac{1}{b}}{c\,\frac{1}{d}} = a\,\frac{1}{b}\,\frac{1}{c}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{d}\right)} = a\,\frac{1}{b\,c}\,d = \frac{a\,d}{b\,c}$$

6. *Simplificación de fracciones:*

La simplificación es una división "encubierta". La operación consiste en descomponer el numerador y el denominador en factores y efectuar aquellas divisiones que tienen igual numerador y denominador.

Ejemplo: *Tomemos la fracción* $\frac{10}{6}$

$$\frac{10}{6} = \frac{2\,.\,5}{3\,.\,2} = \frac{2}{2}\,\frac{5}{3} = 1\,\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

De este modo, al simplificar, obtenemos una fracción equivalente, esto significa que: 10 dividido 6, es igual 5 dividido 3.

Lo que generalmente se hace para abreviar el cálculo es tachar el numerador y el denominador y poner arriba de cada uno el resultado de la división por el factor común. En este ejemplo el factor común es 2, entonces dividimos al numerador y al denominador por 2.

$$\frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{6}^{\,3}} = \frac{5}{3}$$

> *Es importante ver que sólo se pueden simplificar los factores del numerador con los del denominador. No se pueden simplificar términos y tampoco se pueden simplificar factores nulos.*

1.4.5. Factorial

Es una operación definida para los números naturales. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces el factorial de n se define como:

$$n! = n\,(n-1)(n-2)(n-3)\,\ldots\,3\,.\,2\,.\,1 \tag{1.38}$$

de aquí se puede ver que:

$$n! = n\,(n-1)! \tag{1.39}$$

Para que esta expresión sea válida también para $n = 1$ se define que:

$$0! = 1 \tag{1.40}$$

1.4.6. Potenciación

Esta operación se define de la siguiente manera. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}(n \neq 0)$, x a la potencia n (o x elevada a la n), x^n, se define como:

$$\boxed{x^n = \underbrace{x.x\ldots x}_{n \text{ veces}}} \tag{1.41}$$

y se dice que ***x* es la base** de la potencia, y ***n* es el exponente**. De esta definición surge que:

- Cero elevado a cualquier potencia es igual a cero.

$$0^n = 0 \tag{1.42}$$

- Uno elevado a cualquier potencia es igual a uno.

$$1^n = 1 \tag{1.43}$$

Propiedades:

Siempre consideraremos bases reales y exponentes naturales.

1. *La potencia es distributiva con respecto al producto y al cociente*

$$\boxed{\begin{aligned} (x\,y)^n &= x^n\,y^n \\ \left(\frac{x}{y}\right)^n &= \frac{x^n}{y^n} \end{aligned}} \tag{1.44}$$

Las demostraciones son las siguientes

$$(x\,y)^n = \underbrace{(x\,y)(x\,y)\ldots(x\,y)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{(x\,x\ldots x)}_{n \text{ veces}}\underbrace{(y\,y\ldots y)}_{n \text{ veces}} = x^n\,y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\ldots\left(\frac{x}{y}\right)}_{n \text{ veces}} = \frac{\overbrace{x\,x\ldots x}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{y\,y\ldots y}_{n \text{ veces}}} = \frac{x^n}{y^n}$$

De este modo demostramos que la potencia es distributiva respecto al producto y a la división.

De aquí que:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1^n}{x^n} = \frac{1}{x^n}$$

Tener muy en cuenta que:

- **NO ES DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA SUMA**

$$(x \pm y)^n \neq x^n \pm y^n$$

- **NO ES CONMUTATIVA**

$$x^n \neq n^x$$

2. *Producto de potencias de igual base.*

$$\boxed{x^n x^m = x^{n+m}} \tag{1.45}$$

Demostración:

$$x^n\, x^m = \underbrace{x\, x \ldots x}_{n \text{ veces}}\, \underbrace{x\, x \ldots x}_{m \text{ veces}} = \underbrace{x\, x \ldots x}_{n+m \text{ veces}} = x^{n+m}$$

Así hemos demostrado que el producto de potencias de igual base es igual a dicha base elevada a la suma de los exponentes.

3. *Cociente de potencias de igual base.*

$$\boxed{\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}} \tag{1.46}$$

Para demostrar esta propiedad vamos a separar en tres casos posibles.

- Si $n \neq m$

$$\frac{x^n}{x^m} = \frac{\overbrace{x\, x \ldots x}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{x\, x \ldots x}_{m \text{ veces}}}$$

pero podemos escribir que $n = m+(n-m)$ resultando que $x^n = x^{m+(n-m)} = x^m\, x^{n-m}$ (por la propiedad anterior). Entonces, reemplazando esto en la expresión obtenemos que:

$$\frac{x^n}{x^m} = \frac{x^m\, x^{n-m}}{x^m} = \left(\frac{x^m}{x^m}\right) x^{n-m} = x^{n-m}$$

$$\therefore \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \quad \forall n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m$$

- Si $n = m$ obtenemos, utilizando el resultado anterior, que

$$\frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0$$

$$\therefore \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \quad \forall n, m \in \mathbb{N},\ n = m$$

Pero por otro lado sabemos que:

$$\frac{x^n}{x^n} = 1$$

Por lo tanto, encontramos que **todo número real, distinto de cero, elevado a la potencia nula es igual a 1.**

$$\boxed{x^0 = 1} \tag{1.47}$$

Notemos que como $x^0 = 1$ y $0^n = 0$, **no podemos definir** 0^0**.**

De este modo hemos demostrado que el cociente de potencias de igual base es igual a dicha base elevada a la diferencia de los exponentes.

4. *Exponentes negativos*

Cualquier número real distinto de cero elevado a una potencia negativa es igual a su recíproco elevado a la potencia opuesta.

$$\boxed{x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}} \tag{1.48}$$

La demostración de esta propiedad es la siguiente. Consideremos el cociente entre x^n y x^m donde n y m son dos naturales cualesquiera tales que $m > n$. Teniendo en cuenta que podemos escribir que $m = n + (m - n)$ encontramos que:

$$\frac{x^n}{x^m} = \frac{x^n}{x^n\, x^{m-n}} = \left(\frac{x^n}{x^n}\right)\frac{1}{x^{m-n}} = \frac{1}{x^{m-n}}$$

Pero, utilizando la propiedad anterior, tenemos que:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} = x^{-(m-n)}$$

Luego, juntando estos dos resultados obtenemos que

$$\frac{1}{x^{m-n}} = x^{-(m-n)}$$

Ahora, $(m-n) \in \mathbb{N}$ (porque $m > n$), luego podemos llamar $t = m-n$ obtenemos que:

$$x^{-t} = \frac{1}{x^t}$$

De este modo se extiende la potenciación a exponentes enteros.

Utilizando este resultado se tiene que:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \frac{1}{(x/y)^n} = \frac{1}{\left(\dfrac{x^n}{y^n}\right)} = \frac{y^n}{x^n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$$

5. *Potencia de una potencia*

$$\boxed{(x^n)^m = x^{n\,m}} \tag{1.49}$$

Esta propiedad se demuestra utilizando la definición de potencia:

$$(x^n)^m = \underbrace{x^n\,x^n\ldots x^n}_{m \text{ veces}} = \underbrace{(\underbrace{x\,x\ldots x}_{n \text{ veces}})(\underbrace{x\,x\ldots x}_{n \text{ veces}})\ldots(\underbrace{x\,x\ldots x}_{n \text{ veces}})}_{m \text{ veces}} = x^{n\,m}$$

De este modo demostramos que la potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de las potencias. Como el producto es comnutativo resulta que los exponentes son conmutables, es decir, que:

$$(x^n)^m = x^{n\,m} = x^{m\,n} = (x^m)^n \tag{1.50}$$

Notemos que:

$$\begin{array}{rcl} (x^n)^m & \neq & x^{(n^m)} \\ x^{(n^m)} & = & x^{n^m} \end{array}$$

Con esta propiedad se puede ver que **un número negativo elevado a cualquier potencia par es siempre positivo.** Para demostrarlo tomemos un número real positivo cualquiera $x > 0$, así $(-x < 0)$, y un número entero par n. Para que un número sea par debe ser múltiplo de dos, esto es, $n = 2k$ donde $k \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$\begin{array}{rcl} (-x)^n & = & (-x)^{2k} \\ & = & [(-x)^2]^k \\ & = & [(-x)(-x)]^k \\ & = & (x^2)^k \\ & = & x^{2k} \\ & = & x^n \end{array}$$

Y como dijimos que $x > 0$, resulta que $x^n > 0$.

Notación científica:

Este tipo de notación se basa en potencias (positivas y negativas) de 10, es decir:

$$\begin{array}{rcl} & \ldots & \\ 10^{-3} & = & 0.001 \\ 10^{-2} & = & 0.01 \\ 10^{-1} & = & 0.1 \\ 10^{0} & = & 1 \\ 10^{1} & = & 10 \\ 10^{2} & = & 100 \\ 10^{3} & = & 1000 \\ & \ldots & \end{array}$$

De este modo cualquier número real se puede escribir como un número decimal o entero multiplicado por una potencia de 10. En particular esta notación es una manera práctica de escribir números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo:

$$0.0000000425 = \frac{4.25}{10^8} = 4.25 \,\mathrm{x}\, 10^{-8}$$
$$5890000000000000 = 5.89 \,\mathrm{x}\, 10^{15}$$

Como estos números son reales siguen valiendo todas las propiedades de todas las operaciones.

Ejemplo:

$$4.25 \,\mathrm{x}\, 10^{-8} + 5.78 \,\mathrm{x}\, 10^{-8} = (4.25 + 5.78\,)\mathrm{x}\, 10^{-8} = 10.03 \,\mathrm{x}\, 10^{-8} = 1.003 \,\mathrm{x}\, 10^{-7}$$
$$(1.25 \,\mathrm{x}\, 10^{6})(7 \,\mathrm{x}\, 10^{-8}) = (1.25 \,\mathrm{x}\, 7)(10^{6} \,\mathrm{x}\, 10^{-8}) = 8.75 \,\mathrm{x}\, 10^{6-8} = 8.75 \,\mathrm{x}\, 10^{-2}$$
$$(6.91 \,\mathrm{x}\, 10^{15})^2 = (6.91)^2 \,\mathrm{x}\, (10^{15})^2 = 47.7481 \,\mathrm{x}\, 10^{15\mathrm{x}2} = 47.7481 \,\mathrm{x}\, 10^{30} = 4.77481 \,\mathrm{x}\, 10^{31}$$

1.4.7. Radicación

Sean $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se define la raíz de índice n de x como:

$$\boxed{\sqrt[n]{x} = y \Longrightarrow y^n = x} \tag{1.51}$$

y se dice que ***x* es el radicando e *y* es la raíz.** Si $n = 2$ decimos que $\sqrt[2]{x}$ es la raíz cuadrada de x y se escribe $\sqrt{x}$.

ATENCIÓN

Es muy común leer la definición que dimos en sentido opuesto, es decir, uno podría pensar que si $y^n = x$ entonces $\sqrt[n]{x} = y$. Luego uno podría decir que como $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$ entonces $\sqrt{4} = \pm 2$. Pero esto trae muchas ambigüedades a la hora de operar. Esta ambigüedad viene de una mala interpretación de la definición que dimos, $\sqrt[n]{x} = y \Longrightarrow y^n = x$, esto significa que si $\sqrt[n]{x} = y$ entonces, obligadamente $y^n = x$, pero como la definición tiene una flecha en un sólo sentido **no es correcto decir que** si $y^n = x$ entonces $\sqrt[n]{x} = y$. Por esta razón, vale la igualdad:

$$\sqrt{4} = 2$$

mientras que:

$$\sqrt{4} \neq -2$$

Se toma como convención que **el resultado de toda raíz de índice par de un número real positivo es único y positivo**. (Como veremos más adelante esta convención tiene sentido ya que de este modo conseguimos que la raíz sea una función.) En símbolos sería:

$$\boxed{x \in \mathbb{R} \;\text{ y }\; n \in \mathbb{N}: \quad \sqrt[2n]{x} \geq 0} \tag{1.52}$$

De la definición de raíz, también podemos ver que, **en reales, no existe la raíz de índice par de un número negativo**, ya que cualquier número elevado a una potencia par da **siempre** positivo.

$$\boxed{x \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}\, \text{y}\, x < 0: \quad \nexists \sqrt[2n]{x}} \tag{1.53}$$

Finalmente, la última combinación que nos queda es la raíz de índice impar, que por las propiedades de la potenciación podemos deducir que **la raíz de índice impar tiene un único resultado: es positivo si el radicando es positivo, y negativo si el radicando es negativo**.

$$\boxed{\begin{array}{ll} x \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N},\, n\,\text{impar}\,\text{y}\, x < 0: & \sqrt[n]{x} < 0 \\ x \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N},\, n\,\text{impar}\,\text{y}\, x \geq 0: & \sqrt[n]{x} \geq 0 \end{array}} \tag{1.54}$$

Ejemplo: *De acuerdo a la definición y a la convención tomada para la radicación tendremos lo siguiente. Para el caso de raíces de índice par:*

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{4} & = & 2 \\ -\sqrt{4} & = & -2 \\ \sqrt{-4} & & \text{no existe en } \mathbb{R} \end{array}$$

Las raíces de índice impar siempre están definidas:

$$\begin{array}{rl} \sqrt[3]{8} = 2 & \text{ya que} \quad 2^3 = 8 \\ \sqrt[3]{-8} = -2 & \text{ya que} \quad (-2)^3 = -8 \end{array}$$

La raíz se puede escribir en forma de potencia:

$$\boxed{\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}} \tag{1.55}$$

Luego podemos generalizar este resultado, utilizando las propiedades de la potencia, del siguiente modo:

$$\boxed{\sqrt[n]{x^p} = (x^p)^{\frac{1}{n}} = x^{p\,\frac{1}{n}} = x^{\frac{p}{n}}} \tag{1.56}$$

Así, **la utilización de la raíz extiende la potenciación a números fraccionarios.** Por esto, en general, las propiedades de la potenciación se pueden extender a la radicación. Pero hay que tener cuidado con algunos detalles.

Propiedades:

Vamos a considerar que $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Además vamos a suponer que los radicandos son tales que siempre sus raíces están definidas en los reales.

1. *La raíz es asociativa y distributiva con respecto al producto y al cociente*

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt[n]{x\,y} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} \\ \sqrt[n]{\left(\dfrac{x}{y}\right)} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\end{array}} \tag{1.57}$$

Veamos cómo se llegó a esto:

$$\sqrt[n]{x\,y} = (x\,y)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}}y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$$

$$\sqrt[n]{\left(\frac{x}{y}\right)} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Obviamente que la segunda igualdad vale siempre que $y \neq 0$.

ATENCIÓN

Para utilizar esta propiedad **hay que tener mucho cuidado en el caso de tener índice par** ya que, por ejemplo:

$$\sqrt{(-9)(-16)} = \sqrt{144} = 12$$

$$\sqrt{(-9)(-16)} \neq \sqrt{-9}\sqrt{-16} \text{ porque } \nexists \sqrt{-9}, \sqrt{-16}$$

La propiedad distributiva vale siempre y cuando las raíces queden definidas.

Tener muy en cuenta que:

- **NO ES DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA SUMA**

$$\sqrt[n]{x \pm y} \neq \sqrt[n]{x} \pm \sqrt[n]{y}$$

- **NO ES CONMUTATIVA**

$$\sqrt[n]{x} \neq \sqrt[x]{n}$$

2. *Se puede intercambiar el orden de las operaciones*

$$\boxed{\sqrt[n]{x^p} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p} \tag{1.58}$$

Demostración:

$$\sqrt[n]{x^p} = (x^p)^{\frac{1}{n}} = x^{p\,\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}\,p} = (x^{\frac{1}{n}})^p = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p$$

ATENCIÓN

Esta propiedad no vale en el caso de índice par y radicando negativo. Veamos esto con un ejemplo.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 \\ \left(\sqrt{-4}\right)^2 \nexists\end{array}\right\} \sqrt{(-4)^2} \neq \left(\sqrt{-4}\right)^2$$

Por esta misma razón hay que tener cuidado al simplificar exponentes fraccionarios:

$$(-8)^{\frac{3}{9}} = (-8)^{\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{9}_{3}}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$(-8)^{\frac{2}{4}} = (-8)^{\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}}} = (-8)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-8} \nexists$$

Dentro del conjunto de los reales, este ejercicio tiene solución si se realiza primero la potencia y luego la raíz. Luego verán en Álgebra I, cuando trabajen con números complejos, que podrán resolverlo de ambas formas.

Es importante notar que cuando uno tiene un exponente fraccionario, se pueden aplicar todas las propiedades que valen para la potenciación **siempre y cuando la raíz quede definida.**

Caso particular: Índice y exponente iguales

En este caso vamos a estudiar qué pasa cuando el índice es igual al exponente. Para hacer este análisis vamos a separar en dos casos: en el primero tendremos índice y exponente impar, y en el segundo tendremos índice y exponente par.

- Primero analicemos el caso cuando el exponente está dentro de la raíz.

  a) Índice y exponente impar.

  $$\begin{array}{llllll}\text{Si}\, x \geq 0 & \Longrightarrow & \sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}} = x & \Longrightarrow & \sqrt[n]{x^n} \geq 0 \\ \text{Si}\, x < 0 & \Longrightarrow & \sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}} = x & \Longrightarrow & \sqrt[n]{x^n} < 0\end{array}$$

  Por lo tanto resulta que:

  $$\boxed{\sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{si}\, n\, \text{es impar.}} \tag{1.59}$$

  b) Índice y exponente par.

  $$\begin{array}{llllll}\text{Si}\, x \geq 0 & \Longrightarrow & \sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}} = x & \Longrightarrow & \sqrt[n]{x^n} \geq 0 \\ \text{Si}\, x < 0 & \Longrightarrow & \sqrt[n]{x^n} = (\underbrace{x^n}_{>0})^{\frac{1}{n}} = -x & \Longrightarrow & \sqrt[n]{x^n} > 0\end{array}$$

  Por lo tanto, encontramos que:

  $$\text{Si}\, n\, \text{es par} \Longrightarrow \sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x & \text{si}\, x \geq 0 \\ -x & \text{si}\, x < 0 \end{cases}$$

  Entonces:

  $$\boxed{\sqrt[n]{x^n} = |x| \quad \text{si}\, n\, \text{es par}} \tag{1.60}$$

- Ahora veamos qué pasa cuando el exponente está fuera de la raíz.

  a) Índice y exponente impar.

$$\begin{aligned} \text{Si}\, x \geq 0 &\implies \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \\ \text{Si}\, x < 0 &\implies \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \end{aligned}$$

  Por lo tanto:

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x \;\; \text{si}\, n\, \text{es impar.}} \tag{1.61}$$

  b) Índice y exponente par.

$$\begin{aligned} \text{Si}\, x \geq 0 &\implies \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \\ \text{Si}\, x < 0 &\implies \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \nexists \end{aligned}$$

  Por lo tanto, si n es par, tendremos que:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n \neq \sqrt[n]{x^n} \;\; \text{y} \;\; \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \neq |x|$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Si}\, x \geq 0 &\implies \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \\ \text{Si}\, x < 0 &\implies \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \nexists \end{aligned}} \tag{1.62}$$

  La importancia de analizar el caso particular de índice y exponente iguales radica en la resolución de ecuaciones (ver lectura adicional “Resolución de ecuaciones”).

3. *Raíz de raíz*

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[nm]{x}} \tag{1.63}$$

   Demostración:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{n}\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{x}$$

Hasta aquí hemos visto las operaciones básicas entre números reales y sus propiedades. Descubrimos que restar es lo mismo que sumar del opuesto de un número y dividir es lo mismo que multiplicar por el recíproco. Luego vimos que a partir del producto se puede definir la potenciación con exponentes naturales, con el cociente extendimos las potencias a los enteros y, finalmente, con la radicación, extendimos la potencia a los números fraccionarios.

La última operación que veremos también está basada en la potenciación y se llama **logaritmo**.

1.4.8. Logaritmo

El logaritmo es una operación que se define, como mencionamos anteriormente, a partir de la potenciación de la siguiente manera: se dice que el logaritmo en base a de b es igual a c si y sólo si a elevado a la potencia c es igual a b. En símbolos es:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Se define base del logaritmo al número a y se llama argumento al número b.

Ejemplo: *Supongamos que queremos calcular el logaritmo en base 2 de 8. Esto es:*

$$\log_2 8 =$$

De acuerdo a la definición dada, para resolver el cálculo debemos encontrar un número tal que 2 elevado a dicho número sea igual a 8. El número buscado es el 3 ya que $2^3 = 8$. Por lo tanto encontramos que:

$$\log_2 8 = 3$$

Para que el resultado del logaritmo sea un número real hay que restringir los valores del argumento y de la base.

Vamos a definir que **la base del logaritmo debe ser positiva y distinta de cero**, por lo tanto $a > 0$ (o $a \in \mathbb{R}^+$). Entonces, si $a > 0$ y $c \in \mathbb{R}$, tendremos que $a^c = b > 0$, luego **el argumento del logaritmo debe ser positivo**, esto es $b \in \mathbb{R}^+$.

Finalmente, la última restricción es que **la base debe ser distinta de 1**, dado que $1^c = 1$, por lo que $\log_1 1$ sería igual a cualquier número real, así $a \neq 1$ para que el logaritmo quede definido.

Por lo tanto la definición completa de logaritmo es:

$$\boxed{\forall a,\, b \in \mathbb{R}^+ \text{ y } a \neq 1,\, \log_a b = c \Longleftrightarrow a^c = b} \tag{1.64}$$

En general, los logaritmos que más se usan son los llamados:

Logaritmo decimal: es cuando se toma el logaritmo en base 10, y se escribe como $\log x$. Es decir que:

$$\log x \equiv \log_{10} x$$

Logaritmo natural o neperiano: es cuando se toma el logaritmo en base e (el número neperiano es un número irracional, $e = 2.718281828\ldots$)[6], y se escribe como $\ln x$. Es decir que:

$$\ln x \equiv \log_e x$$

Propiedades

Vamos a considerar que la base y el argumento son positivos y que la base es distinta de 1.

1. *El logaritmo de uno en cualquier base es igual a cero.*

$$\boxed{\forall x,\, \log_x 1 = 0 \;\; \text{ya que}\, x^0 = 1} \tag{1.65}$$

[6] Nuevamente recurrimos a un video de Paenza para conocer un poco más al número neperiano. (`http://www.youtube.com/watch?v=MKgjf-1XcNM&feature=related`)

2. *Si la base y el argumento del logaritmo son iguales, entonces el logaritmo de ese número, en esa base, es igual a uno.*

$$\boxed{\forall x,\, \log_x x = 1 \;\text{ ya que}\, x^1 = x} \tag{1.66}$$

3. *Logaritmo de un producto.*

$$\boxed{\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y} \tag{1.67}$$

Demostración:

Sean p y q tales que $\log_a x = p$ y $\log_a y = q$. Por lo tanto:

$$p + q = \log_a x + \log_a y \tag{1.68}$$

Por otro lado, de la definición de logaritmo tenemos que $a^p = x$ y $a^q = y$. Luego, el producto de x por y será igual a:

$$x\, y = a^p\, a^q = a^{p+q} \tag{1.69}$$

Utilizando otra vez la definición de logaritmo tenemos que:

$$x\, y = a^{p+q} \Longrightarrow \log_a(x\, y) = p + q \tag{1.70}$$

Así, de las ec. 1.68 y 1.70 encontramos que:

$$\log_a(xy) = p + q = \log_a x + \log_a y \tag{1.71}$$

Por lo tanto:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \tag{1.72}$$

4. *Si el argumento del logaritmo es una potencia, entonces el logaritmo es igual al producto entre el exponente y el logaritmo de la base de la potencia.*

$$\boxed{\log_a(x^b) = b\, \log_a x} \tag{1.73}$$

Esto se demuestra de la siguiente manera. Llamemos $c = \log_a\left(x^b\right)$ y $c' = \log_a x$. Luego, por la definición de logaritmo, podemos escribir que $a^c = x^b$ y que $a^{c'} = x$. Por lo tanto

$$a^c = x^b = \left(a^{c'}\right)^b = a^{c'\, b}$$

De aquí resulta que:

$$a^c = a^{c'\, b} \Longrightarrow c = c'\, b$$

Finalmente obtenemos que:

$$\log_a\left(x^b\right) = c = c'\, b = b\, \log_a x$$

Utilizando este resultado y la propiedad 2 se puede demostrar fácilmente que:

$$\boxed{\log_a(a^x) = x} \tag{1.74}$$

ATENCIÓN

Hay que tener ciertos cuidados con la notación:

$$\log_a(x^b) = \log_a x^b = b \log_a x$$

$$\log_a^b x = (\log_a x)^b$$

Por ejemplo:

$$\log_2(2^3) = 3\ \log_2 2 = 3$$
$$\log_2^3 2 = (\log_2 2)^3 = 1^3 = 1$$

Por lo tanto:

$$\log_a^b x \neq \log_a x^b$$

5. *Logaritmo de un cociente.*

$$\boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y} \tag{1.75}$$

Esta propiedad se demuestra utilizando las propiedades de la potenciación y las propiedades 3 y 4 de los logaritmos.

6. *Cambio de base*

Cualquier logaritmo en una base dada, puede cambiarse a cualquier otra base que uno elija. Este "cambio de base" se realiza del siguiente modo. Por definición de logaritmo tenemos que:

$$\log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x$$

Supongamos que queremos cambiar la base a por otra base b. Para esto, a la relación $a^y = x$ le aplicamos logaritmo en base b en ambos miembros, esto es:

$$\begin{aligned} a^y &= x \\ \log_b(a^y) &= \log_b x \\ y \log_b a &= \log_b x \end{aligned}$$

Despejando y encontramos que:

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Pero al comienzo dijimos que $\log_a x = y$ por lo tanto,

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}} \tag{1.76}$$

Así podemos calcular el logaritmo en una base dada a utilizando una base cualquiera b.

Antilogaritmo

Se define como la operación inversa del logaritmo. Si tenemos $\log_a x$, el antilogaritmo es la operación a^x (en el capítulo de funciones es lo que llamaremos función exponencial).

El logaritmo y el antilogaritmo son operaciones inversas porque se cumple que:

$$\log_a(a^x) = x$$

$$\boxed{a^{\log_a x} = x} \tag{1.77}$$

Demostración:

La primera igualdad es una consecuencia de la cuarta propiedad del logaritmo (ecuación 1.74). Para demostrar la segunda igualdad vamos a considerar que $b = \log_a x$, luego:

$$a^{\log_a x} = a^b$$

Pero por la definición de logaritmo tenemos que $a^b = x$. Entonces,

$$a^{\log_a x} = a^b = x$$

1.5. Resolución de problemas

En esta sección veremos cómo utilizar las propiedades de las operaciones para resolver cálculos sin calculadora.

Para resolver este tipo de problemas hay que seguir las **reglas de operación:**

1. Separar en términos;
2. Resolver lo que está dentro de paréntesis, corchetes y/o llaves;
3. Resolver los productos; y
4. Resolver las sumas.

Problema 1: Calcule sin usar calculadora.

$$\frac{3^{2^3}}{3^{3^2}}\,\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{\frac{5}{3}}}}}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{3}}} + \frac{\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt[3]{-3^2}}\,\left(\sqrt[3]{9^2}\right)^{-1} =$$

Lo primero que hay que hacer para empezar a calcular, de acuerdo a las reglas de operación enunciadas, es separar en términos. En este caso tenemos dos:

$$\underbrace{\frac{3^{2^3}}{3^{3^2}}\,\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{\frac{5}{3}}}}}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{3}}}}_{\text{término 1}} + \underbrace{\frac{\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt[3]{-3^2}}\,\left(\sqrt[3]{9^2}\right)^{-1}}_{\text{término 2}}$$

Luego vamos a ir resolviendo los factores. En el primer término tenemos un producto de dos fracciones. Tomemos la primera fracción. ¿Es correcta la siguiente resolución?

$$\frac{3^{2^3}}{3^{3^2}} = \frac{3^{2\,.\,3}}{3^{3\,.\,2}} = 1$$

La respuesta es **NO**. Y ahora pregunto ¿por qué no es correcta? Porque el producto de los exponentes es válido cuando tenemos una potencia de potencia, es decir:

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

En este caso, la base del exponente m es x^n y la base de n es x. Sin embargo, en el cálculo tenemos la siguiente situación:

$$x^{n^m} = x^{(n^m)} \neq (x^n)^m$$

donde, ahora, la base de m es n, y la base de n^m es x. Por lo tanto la resolución de la primera fracción del primer término es:

$$\frac{3^{2^3}}{3^{3^2}} = \frac{3^8}{3^9} = 3^{8-9} = 3^{-1}$$

Ahora analicemos el segundo factor del primer término. En este caso ¿tenemos una potencia de potencia? Sí, en este caso el denominador es una potencia de potencia explícita, mientras que en el numerador tenemos una raíz de raíz (que es equivalente a la potencia de potencia). Entonces,

$$\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{\frac{5}{3}}}}}{\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3\,.\,5]{3^{\frac{5}{3}}}}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}(-\frac{1}{3})}} = \frac{\left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{15}}}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{9}}} = \frac{3^{\frac{5}{3}\,\frac{1}{15}}}{\left(\dfrac{1}{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{9}}} = \frac{3^{\frac{1}{9}}}{3^{\frac{1}{9}}} = 1$$

De este modo, el primer término se reduce a:

$$\frac{3^{2^3}}{3^{3^2}}\,\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{\frac{5}{3}}}}}{\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{3}}} = 3^{-1}\,1 = 3^{-1} \tag{1.78}$$

En el segundo término tenemos una fracción; este tipo de expresiones suele traer bastantes complicaciones. Propongamos la siguiente resolución y después discutamos si es correcta.

$$\frac{\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt[3]{-3^2}} = \frac{(-3)^{\frac{2}{2}}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{-3}{9^{\frac{1}{3}}}$$

¿Hay algún error en este razonamiento? Sí, hay más de un error. El error del numerador consiste en haber simplificado el exponente con el índice de la raíz. En el denominador el error está en haber supuesto que el exponente 2 tiene como base al número (-3). Analicémoslo por partes. Primero el numerador. Habíamos visto que cuando el índice y el exponente son iguales a un mismo número par, $2n$, resulta que $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$, por lo tanto:

$$\sqrt{(-3)^2} = |3| = 3$$

Mientras que en el denominador tenemos que:

$$\sqrt[3]{-3^2} = \sqrt[3]{(-1)\,3^2} = \sqrt[3]{(-1)}\sqrt[3]{3^2} = (-1)3^{\frac{2}{3}} = -3^{\frac{2}{3}}$$

De este modo, el primer factor del segundo término es igual a:

$$\frac{\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt[3]{-3^2}} = \frac{3}{-3^{\frac{2}{3}}} = -3^{1-\frac{2}{3}} = -3^{\frac{3}{3}-\frac{2}{3}} = -3^{\frac{3-2}{3}} = -3^{\frac{1}{3}}$$

Por último, el segundo factor del segundo término lo escribimos de la siguiente manera:

$$\left(\sqrt[3]{9^2}\right)^{-1} = \left(9^{2\,\frac{1}{3}}\right)^{-1} = \left[(3^2)^{2\,\frac{1}{3}}\right]^{-1} = 3^{2\,.\,2\,.\,\frac{1}{3}\,.\,(-1)} = 3^{-\frac{4}{3}}$$

Luego el segundo término es igual a:

$$\frac{\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt[3]{-3^2}}\left(\sqrt[3]{9^2}\right)^{-1} = -3^{\frac{1}{3}}\,3^{-\frac{4}{3}} = -3^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} = -3^{\frac{-3}{3}} = -3^{-1} \tag{1.79}$$

Finalmente, de las operaciones 1.78 y 1.79 obtenemos el resultado:

$$\frac{3^{2^3}}{3^{3^2}}\,\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{\frac{5}{3}}}}}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{3}}} + \frac{\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt[3]{-3^2}}\left(\sqrt[3]{9^2}\right)^{-1} = 3^{-1} - 3^{-1} = 0$$

Obviamente que ésta no es la única manera de pensar el ejercicio, hay muchos caminos posibles. La idea básica de este tipo de cálculos es llevar todas las potencias a una misma base para poder utilizar las propiedades de la potencia.

Problema 2: Calcule sin usar calculadora.

$$\frac{\log_3 a^2}{\log_3 a} + 2^{\log_2 7}\,\log_b \sqrt[7]{b} - (\log_4 2)^2\,\log_x x^4 =$$

Nuevamente, como en el ejercicio anterior, lo primero que debemos hacer es separar en términos:

$$\underbrace{\frac{\log_3 a^2}{\log_3 a}}_{\text{término 1}} + \underbrace{2^{\log_2 7}\,\log_b \sqrt[7]{b}}_{\text{término 2}} - \underbrace{(\log_4 2)^2\,\log_x x^4}_{\text{término 3}}$$

Ahora analicemos término por término.

- Primer término:

$$\frac{\log_3 a^2}{\log_3 a} = \frac{2\,\log_3 a}{\log_3 a} = \frac{2\cancel{\log_3 a}}{\cancel{\log_3 a}} = 2 \tag{1.80}$$

- Segundo término:

$$2^{\log_2 7}\ \log_b \sqrt[7]{b} \;=\; 7\ \log_b b^{\frac{1}{7}} \;=\; 7\,\frac{1}{7}\ \log_b b \;=\; 1 \tag{1.81}$$

- Tercer término:

$$(\log_4 2)^2\ \log_x x^4 \;=\; \left(\frac{\log_2 2}{\log_2 4}\right)^2\ 4\ \log_x x \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^2\ 4 \;=\; \frac{1}{4}\,4 \;=\; 1 \tag{1.82}$$

Finalmente de las operaciones 1.80, 1.81 y 1.82 obtenemos el resultado:

$$\frac{\log_3 a^2}{\log_3 a} \;+\; 2^{\log_2 7}\ \log_b \sqrt[7]{b} \;-\; (\log_4 2)^2\ \log_x x^4 = 2 \;+\; 1 \;-\; 1 = 2$$

Lectura complementaria

Menos por menos es más ... ¿Seguro?

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Menos por menos *es* más ... ¿Seguro?

Este texto es una transcripción textual del libro "Matemática ... ¿estás ahí?. Episodio 3.14" escrito por Adrián Paenza.

Una de las "verdades" que nos *enseñan* en la escuela o en el colegio es que

"Menos por menos es más"

Uno anota. Piensa. No entiende. Vuelve a pensar. Sigue sin entender. Mira al compañero de al lado. Él tampoco entiende. Y de pronto se oye a la maestra o el profesor, que otra vez nos taladran con:

"Menos por menos es más"

Uno tiene varias alternativas frente a esto. La más probable es que *bloquee la mente*, deje el cuerpo en el lugar, escriba como un autómata, pero en realidad ya nada más de lo que se oiga o se lea en esa habitación va a convocar su atención, al menos por un rato.

-¿Qué dijo? -dice uno preocupado.

-Dijo algo así como que... *menos por menos, es más* -contesta el compañero del banco de al lado.

-No entiendo -contesta el primero.

-Yo tampoco -dice el otro, pero al menos éste pudo repetir lo que había oído.

Entonces uno levanta la vista y ve en el pizarrón escrito:

Ejemplos:

$$(-3).(-2) = 6$$
$$(-7).(-3) = 21$$
$$(-15).(-1) = 15$$

Y un poco más abajo, uno advierte con horror que incluso se ¡aplica a fracciones!

$$(-1/2).(-6) = 3$$
$$(-9).(-2/3) = 6$$
$$(-2/5).(-3/4) = 3/10$$

El pizarrón escupe números, símbolos, letras que invitan a abandonar todo y escapar. ¿De qué habla esta persona?. Pero uno no tiene más remedio que aceptar. En la escuela o el colegio, acepta porque en general no se enseña con espíritu crítico (con las excepciones correspondientes), sin embargo aquí cabe preguntarse inmediatamente: ¿por qué?

De todas formas, el tiempo pasa, y uno termina aceptando el axioma (o lo que *parece* como un axioma o verdad absoluta) de que menos por menos es más, porque:

1. no le queda más remedio,
2. no se contrapone con nada de lo que uno ya sabe,
3. uno nunca necesitó usarlo en la vida cotidiana,
4. cierto o falso, no me afecta, y, por último,
5. no me interesa

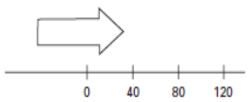
Mi idea es tratar de encontrar alguna explicación de por qué es cierto que menos por menos *tiene* que ser más.

Supongamos que está manejando su auto a 40 kilómetros por hora. Si le preguntara dónde va a estar dentro de 3 horas, usted contestará: “Voy a estar a 120 kilómetros de acá”. éste sería un ejemplo de que “más por más, *es* más”. O sea, aunque uno no escriba los símbolos (+) adelante, es como si estuviera diciendo:

$$(+40).(+3) = (+120)$$

Uno representa los 40 kilómetros por hora, con (+40) y lo que “va a pasar” dentro de 3 horas, con (+3). Multiplica y tiene (+120), o sea, uno estará 120 kilómetros más adelante de donde está ahora.

En una figura se ve así:



Si ahora, en luga de ir a 40 kilómetro por hora hacia adelante, empezara a manejar su auto *marcha atrás* a la misma velocidad (o sea, a 40 kilómetros por hora pero hacia atrás), podría preguntarle: ¿dónde va a estar dentro de 3 horas?

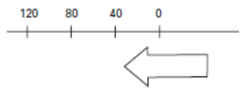
$$(-40).(+3) = (-120)$$

Otra vez, si uno quiere representar en símbolos que está yendo marcha atrás, lo que hace es escribir

$$(-40)$$

Por otro lado, como uno quiere saber, otra vez, "qué va a pasar dentro de 3 horas", usa el número (+3) para representarlo.

En una figura se ve así:



Es decir, si uno maneja el auto hacia atrás a 40 kilómetros por hora, dentro de 3 horas va a estar 120 kilómetros atrás del lugar del que partió. Esto corresponde -espero que se entienda con el ejemplo- a que menos por más *es* menos.

Ahora bien, lleguemos entonces a la última pregunta (que le pido que lea con cuidado y, sobre todo, que lo piense sola/o la respuesta).

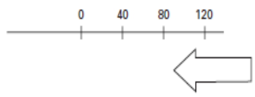
"Si usted viene como recién, manejando su auto a 40 kilómetros *marcha atrás* y yo, en lugar de preguntarle dónde va a estar *dentro de 3 horas*, le preguntara, *¿dónde estaba hace 3 horas?*. Usted, ¿qué contestaría?. (Por favor, más allá de responder, trate de convencerse de que me entendió la pregunta). Ahora sigo yo: la respuesta es que uno estaba ¡más adelante!. Más aún: estaba 120 kilómetros *más adelante* de donde está ahora.

Si sigo usando los símbolos de más arriba, tengo que escribir:

$$(-40).(-30) = 120$$

Es decir, escribo (-40) porque estoy yendo marcha atrás, y escribo (-3) porque pregunto qué pasó hace 3 horas. Y como se advierte, uno, hace 3 horas estaba 120 kilómetros más adelante del punto donde está ahora. Y eso explica -en este caso- por qué menos por menos *es* más.

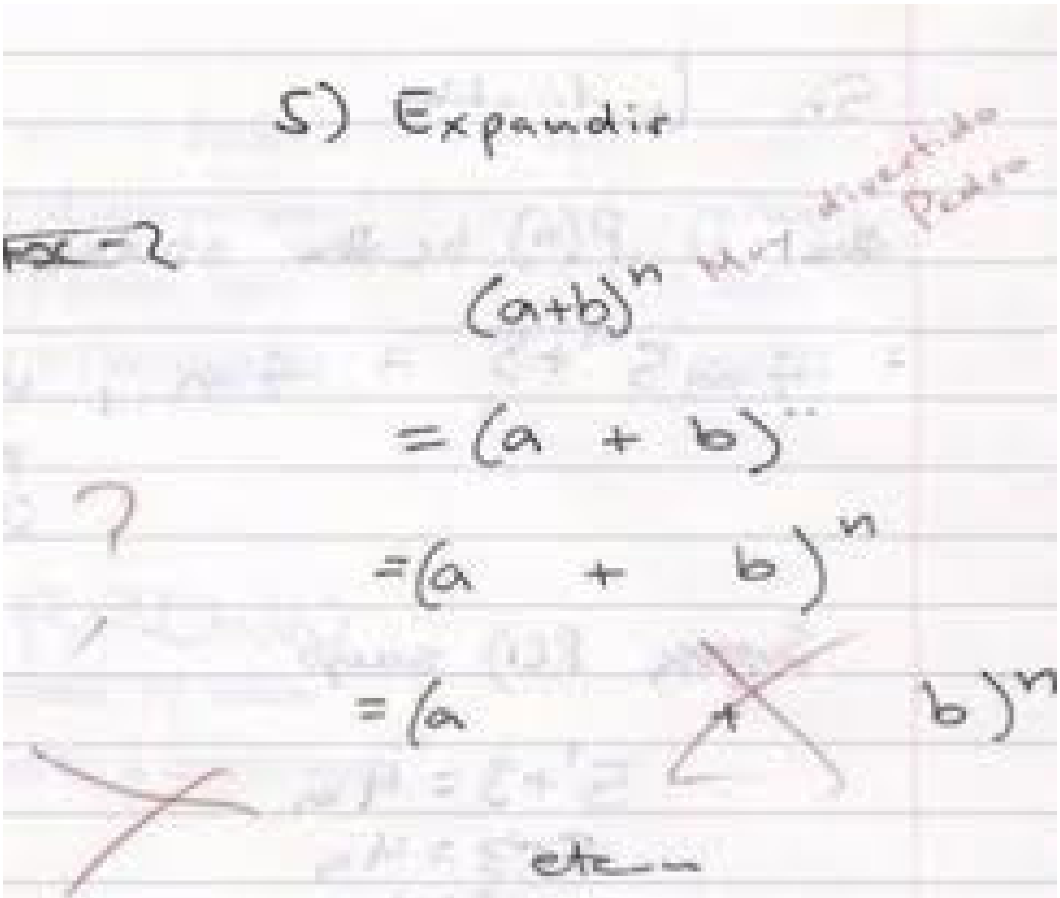
En el dibujo es:



Luego, en este caso, se ve que ¡menos por menos *es* más!

Lectura complementaria

Ejemplos simples de resolución de ecuaciones



Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Ejemplos simples de resolución de ecuaciones

Las ecuaciones que analizaremos aquí son aquellas en las cuales la incógnita es el argumento de una raíz o cuando es base de una potencia. En ambos casos, durante la resolución de la ecuación, nos vamos a encontrar con la situación de índice y exponente iguales.

Supongamos que queremos despejar el valor de x en los siguientes casos.

Índice y exponente impar:

- **Ejemplo 1:** La incógnita es el argumento de una raíz de índice impar.

  $$\sqrt[3]{x} = 8$$

  Elevamos al cubo en ambos miembros

  $$\begin{aligned} \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 &= 8^3 \\ x^{\frac{3}{3}} &= 8^3 \\ x &= 8^3 = 512 \end{aligned}$$

- **Ejemplo 2:** La incógnita es base de una potencia impar.

  $$x^3 = 8$$

  Aplicamos raíz cúbica en ambos miembros

  $$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3} &= \sqrt[3]{8} \\ x^{\frac{3}{3}} &= \sqrt[3]{8} \\ x &= \sqrt[3]{8} = 2 \end{aligned}$$

Índice y exponente par:

- **Ejemplo 3:** La incógnita es el argumento de una raíz de índice par.

  $$\sqrt[4]{x} = 2$$

  Elevamos a la cuarta en ambos miembros

$$\left(\sqrt[4]{x}\right)^4 = 2^4$$

En este caso, para que la ecuación tenga solución, x debe ser mayor o igual que cero, entonces

$$\begin{aligned} x^{\frac{4}{4}} &= 2^4 \\ x &= 2^4 = 16 \end{aligned}$$

- **Ejemplo 4:** La incógnita es base de una potencia par.

$$x^4 = 16$$

Aplicamos raíz cuarta en ambos miembros

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^4} &= \sqrt[4]{16} \\ |x| &= \sqrt[4]{16} = 2 \end{aligned}$$

Por definición de módulo tendremos que

$$\begin{array}{l} \text{si}\, x \geq 0,\ |x| = x \Longrightarrow x = 2 \\ \text{si}\, x < 0,\ |x| = -x \Longrightarrow -x = 2 \Longrightarrow x = -2 \end{array}$$

Así encontramos que la ecuación tiene dos soluciones, $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

Esta situación en general suele escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^4} &= \sqrt[4]{16} \\ x &= \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2 \\ \therefore x_1 = 2 &\quad \text{y} \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

Es importante notar que el $\pm$ aparece por “culpa” de la potencia par y no por la raíz. Es decir que, si tomamos $n \in \mathbb{N}$

$$x^{2n} = y$$

podemos resolver de dos maneras

$$x = \pm\sqrt[2n]{y} \quad \text{ó} \quad |x| = \sqrt[2n]{y}$$

Práctica 1

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, \{3, 4\}, a, \{a, c\}\}$ determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

   a) $3 \subset A$

   b) $\{3\} \in A$

   c) $\{a, c\} \subset A$

   d) $\varnothing \subset A$

   e) $\{3, 4, a\} \in A$

2. Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera. Hallá los siguentes conjuntos utilizando diagramas de Venn.

   a) $A \cap C$

   b) $C \cup B$

   c) $A \cap B \cup C$

   e) $(A \cap B) \cup C$

   f) $A \cap (B \cup C)$

3. Cuáles de los siguientes números racionales son fraccionarios:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{10}{3} \quad \frac{262}{1} \quad \frac{15}{10} \quad \frac{0}{15847} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{12}{9} \quad \frac{229}{90}$$

4. Pasá los siguientes números racionales a fracción:

   a) 35.26

   b) 0.0034

   c) $12.\widehat{2}$

   d) $3.\widehat{9}$

   e) $50.0\widehat{25}$

   f) $0.25\widehat{7}$

5. Expresa las siguientes desigualdades en notación de intervalos y represéntalos en la recta numérica (El símbolo $\vee$ significa "o", o sea, $A \vee B$, se lee A o B, mientras que el símbolo $\wedge$ significa "y", por lo tanto, $A \wedge B$ se lee: A y B. Luego en Álgebra I vas a ver el significado lógico de estas expresiones):

a) $\{x\,/\,0 \leq x < \frac{3}{4}\}$

b) $\{x\,/\,-3.1 < x \leq 2\}$

c) $\{x\,/\,2 < x < 6 \,\vee\, 3 < x \leq 7\}$

d) $\{x\,/\,0 \leq x < 1 \,\wedge\, 1 < x < 2\}$

6. Representa en la recta numérica los siguientes conjuntos:

a) $(-1; 4)$

b) $(5; \frac{17}{2}]$

c) $(-2; 6) \cup [4; 9.7]$

d) $(\sqrt{2}; 5] \cap [3.2; 7]$

7. Calcula aplicando propiedades, sin utilizar calculadora:

a) $\left(-\dfrac{3}{5}\right) . \left(2 - \dfrac{5}{2}\right) + \dfrac{\left(\dfrac{1}{9} - \dfrac{5}{12}\right)}{\left(-\dfrac{1}{6}\right)} =$

b) $\dfrac{\left[\dfrac{0.6}{(-0.3)} + 0.3 - \dfrac{13}{10}\right]}{0.5 \,.\, \dfrac{15}{30}} =$

c) $(1 - 0,\widehat{6})\,.\,0,\widehat{3} - (1 - 0,\widehat{5}) =$

d) $\dfrac{\left(|-5| + \dfrac{4}{10}\right)}{(-|-2.5|)} =$

e) $\dfrac{100!}{99!} - \dfrac{99}{0!} - \dfrac{14+2}{2\,.\,8} =$

8. Escribe V (Verdadero) o F (Falso) según corresponda y justifica tu respuesta.

a) $a^3\,.\,a^2 = a^6$

b) $m\,.\,m\,.\,m = 3m$

c) $(b\,.\,b^2)^3 = b^9$

9. Resuelve aplicando **propiedades** de la potenciación

a) $\dfrac{4}{9}\,.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^{16} : \left(\dfrac{3}{2}\right)^{18} - 1^5 =$

b) $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{-6} . \left(-\dfrac{3}{5}\right)^{7} + \left(\dfrac{5}{2}\right)^{-1} - \left[\left(-\dfrac{6}{5}\right)^{-2}\right] : \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{-1} =$

c) $\dfrac{(a\,.\,a^2)^2}{a^5} =$

d) $(b\,.\,b^{-2})^3\,.\,b^2 =$

e) $\left(\frac{m}{n^3}\right)^5 . \left(\frac{m}{n}\right)^{-3} =$

10. Calcula sin utilizar calculadora:

 a) $9.5 \times 10^{-12} + (-5.28 \times 10^{-11}) =$

 b) $\frac{(-9.8 \times 10^{15})}{(-1.4 \times 10^{-9})} =$

 c) $10^{26} . \left(\frac{5.1}{10^{23}}\right) . (-2.5) =$

11. Calculá utilizando propiedades, sin usar calculadora. Dejá expresado el resultado en notación científica.

 a) $\left(\frac{8.4 \times 10^{19}}{10^{28}}\right) . 5 =$

 b) $-8.13 \times 10^{14} - (-3.17 \times 10^{15}) =$

 c) $(7.3 \times 10^{-12}) : (2.5 \times 10^{-24}) =$

12. Primero expresá los números decimales como fracción y luego calculá utilizando propiedades, sin usar calculadora.

 a) $0,\widehat{2} + 2,\widehat{15} - \sqrt[3]{0,\widehat{6} . 12} =$

 b) $\frac{0.05 + 0.75}{0.01 + 0.03} - \frac{0.2^3}{\sqrt[4]{0.0016}} =$

 c) $\sqrt{(0.1 . 0.3)^2 : (0.2 - 0.1)^2} - \sqrt{0.81} =$

 d) $\frac{0.7 + 1,\widehat{3}}{1.22} + 0,\widehat{12} . 3.3 - 0.9 . 0.1\widehat{7} + \sqrt{1,\widehat{7} . 0.25} =$

13. Escribe V (Verdadero) o F (Falso) según corresponda y justifica tu respuesta.

 a) $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

 b) $\sqrt{a^3} = a^{\frac{2}{3}}$

 c) $\sqrt{x^2} = x$

14. Resuelve aplicando propiedades de la radicación especificando para que valores son válidas las expresiones:

 a) $\sqrt{a^3}\,\sqrt{a}\,\sqrt{a^4} =$

 b) $\sqrt[9]{\frac{x^{12}}{y^{15}}} =$

 c) $\sqrt[3]{8\,x} + \sqrt[6]{x^4} - 5\,\sqrt[3]{x} =$

 d) $\frac{b - c}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} =$

15. Calculá utilizando propiedades, sin usar calculadora.

a) $\dfrac{2}{3} - 2\left(-\dfrac{1}{4}\right) . (-12) + 2^{-2} =$

b) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^9} : \left(-\dfrac{2}{9}\right)^{-1} + \dfrac{15}{2} : (-30) + \dfrac{4}{9} =$

c) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-4} : \left(-\dfrac{1}{18}\right) + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^6 : \left(-\dfrac{1}{3}\right)^7 + \sqrt[3]{\left(\dfrac{7}{8} - 1\right) . (-3)^3} =$

d) $\dfrac{\frac{4}{5} : \frac{6}{25}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} + \dfrac{2 - \frac{1}{3}}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-1}} =$

e) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1/3} . \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{1/3} . \dfrac{3^{3^{-1}}}{3^{-1^3}} . \left(-\dfrac{7}{3} + 2\right)^{-2/(-3)} . \sqrt[3]{27^{-2/3}} + \dfrac{(-3^4)^3}{\sqrt{(-3)^{3\,.\,2^3}}} =$

f) $\dfrac{\sqrt{(-2)^2}}{\sqrt{-2^2 + 2^3}} \cdot \dfrac{\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right)}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/3}\right]^{-3}} \cdot \dfrac{2^{2^3}}{2^{3^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}}{\left[\left(\sqrt{(3+0+4)^2}\right)^2\right]^0} =$

16. Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición:

a) $\log_4 64 =$

b) $\log_3 \dfrac{1}{3} =$

c) $\ln 1 =$

d) $\log 0.001 =$

e) $\log_{\frac{2}{3}} \dfrac{27}{8} =$

17. Utilizando la definición de **antilogaritmo**, despeja y halla con calculadora el valor de x.

a) $\log x = \dfrac{1}{2}$

b) $\log_2 x = 7.1$

c) $\log_x 8 = 3$

18. Indica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas justificando tu respuesta:

a) $(\log_3 4)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \log_3 4$

b) $\log_3 4^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \log_3 4$

c) $\dfrac{\log_3 2}{\log_3 5} = \log_3 2 - \log_3 5$

d) $\log_3 \dfrac{2}{5} = \log_3 2 - \log_3 5$

e) $\ln 2 = \dfrac{\log 2}{\log e}$

19. Sabiendo que $\log a = 2$, $\log b = 3$ y que $\log c = 4$, calcula los siguientes logaritmos:

    a) $\log(a^2 \,.\, b) \;=$

    b) $\log \sqrt{\dfrac{b}{c^3}} \;=$

    c) $\log \left(\dfrac{b^3}{\sqrt{a}} \,.\, c \right) \;=$

20. Sabiendo que $\log_a(x) = 2$, $\log_a(t) = 13$, $\log_a(y) = 3$ y $\log_a(z) = 3/2$ calculá:

    a) $\log_a(x \,.\, y^2) \;=$

    b) $\log_a \sqrt{x^3 \,.\, y} \;=$

    c) $\log_a \left(\dfrac{x}{y\,z} \right)^5 \;=$

    d) $\log_z \left(\dfrac{\sqrt{x}}{y^3\, z^4} \right)^6 \;=$

    e) $\log_t \left(\dfrac{t^3\, x^5\, \sqrt{y}}{x\, y\, t} \right) \;=$

21. Calculá sin utilizar calculadora suponiendo que las letras toman valores permitidos.

    a) $\dfrac{4\,\log_2 4}{3\,\log_3 3} \,.\, (\log_5 25)^{-1} \;-\; \dfrac{1}{3} \;=$

    b) $\dfrac{(\log_2 8)^2}{\log_2 \sqrt{2} \,+\, \frac{1}{2}} \;=$

    c) $\log_3 \left[\dfrac{3\,a \,+\, 9}{a \,+\, 3} \right]^3 \;=$

    d) $\dfrac{(\log_3 a)^2 \,+\, \frac{\log_9 a^2}{\log_a 9}}{\log_{2+1}(2\,a \,-\, a)} \,.\, e^{\ln(\frac{1}{3})} \;=$

    e) $\log_a(a \,.\, b) \,+\, \log_{\frac{1}{a}}(b) =$

    f) $\log_2 w \,-\, \log_2 \left(\dfrac{w}{q} \right) \,+\, (\log_{q^2}(4^{-1}))^{-1} \,-\, 2^{2\,\log_2 1} \;=$

    g) $\ln e^2 \,+\, \dfrac{1}{2}\,(\log_a a^8)^{1/3} \;=$

    h) $\log_3(27)^{2/3} \,-\, \log_{4^3} 4 \;=$

    i) $\dfrac{\log_{11}(1/11)}{\log_b(b^{-2})} \,-\, \log_3 \sqrt{3} \;=$

    j) $\dfrac{\log_5 15}{\log_5 3} \,+\, \log_3 \left(\dfrac{1}{5} \right) \,+\, \left(5^{\frac{1}{2}\,\log_5 3} \right)^2 \,\log_{a+b} \sqrt[3]{a \,+\, b} \;=$

22. Problemas con logaritmos

a) Una de las aplicaciones de la función logarítmica es el cálculo del pH de una sustancia a partir de la concentración de iones positivos de Hidrógeno ($[H]^+$). Así, pH = - log $[H]^+$.

1) Calculá el pH de una solución cuya concentración de iones de hidrógeno es: $[H]^+ = 10^{-8}$; $[H]^+ = 0.03 \times 10^{-4}$; $[H]^+ = 5 \times 10^{-14}$; $[H]^+ = 5 \times 10^{-7}$ y $[H]^+ = 3 \times 10^{-3}$.
2) Calculá $[H]^+$ para soluciones cuyo pH es: pH = 7, pH = 11, pH = 3 y pH = 6.

b) La magnitud R (en la escala de Richter) de un terremoto de intensidad I se define como: $R = \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, donde I_0 es la intensidad mínima utilizada como referencia.

1) Un terremoto tiene una intensidad de 4×10^8 veces I_0 ¿Cuál es su magnitud en la escala Richter?
2) El terremoto de Anchorage, Alaska, del 27 de marzo de 1964, tuvo una intensidad de 2.5×10^8 veces I_0 ¿Cuál es su magnitud en la escala Richter?
3) ¿Cuál es la intensidad de un terremoto que en la escala Richter llega a los 5 puntos? ¿Y uno que llega a los 7,8 puntos?

c) Una escala utilizada para medir la magnitud de un sismo es la escala de Richter. La cantidad de energía liberada en un movimiento sísmico está dada por la fórmula: $\log E = 1.5R + 11.8$, donde E es la energía liberada medida en ergios y R es la magnitud del sismo en grados en la escala de Richter.

1) Expresá la energía liberada en su forma exponencial.
2) ¿Qué cantidad de energía se libera en un temblor de grado 4?, ¿y en uno de grado 5?
3) ¿Cuál es la relación numérica entre ambos valores?
4) El aumento de un grado en la escala Richter, ¿Qué aumento representa, aproximadamente, en la cantidad de energía liberada? Y si el aumento fuera de dos grados, ¿qué incremento se produce en la energía liberada?
5) Desde que se dispone de instrumentos de medición sísmica, el terremoto de mayor magnitud registrada es el de Valdivia en el año 1960, que tuvo una magnitud de 9.5 grados en la escala de Richter. Compará la energía liberada en este terremoto con la de Caucete del año 1977 que fuera de 7.4 grados de la misma escala.

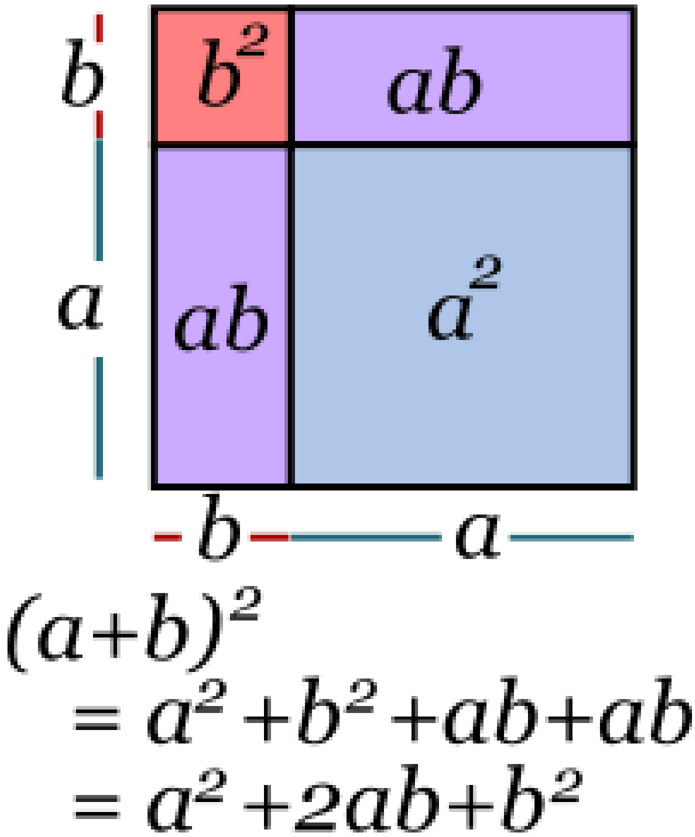
d) La magnitud aparente, m, de una estrella mide el brillo observado de la misma, mientras que la magnitud absoluta, M, mide el brillo que observaríamos si la estrella estuviera a 10 pc[7] de distancia. Cuanto más chica es la magnitud (absoluta o aparente), más brillante será la estrella. Conociendo ambas magnitudes se puede calcular la distancia, d, a la estrella como $m - M = -5 + 5\ \log(d)$.

[7] El parsec (pc) es una medida astronómica de distancia, es aproximadamente igual a 3.26 años luz (3.09×10^{13} km)

1) Calculá la distancia al Sol sabiendo que su magnitud aparente es igual a -26.7 y su magnitud absoluta es 4.9.
2) Sabiendo que la magnitud absoluta de Sirio es 1.4 y se encuentra a una distancia aproximada de 2.7 pc y que para la estrella Antares $M = -4.8$ y $d = 130$ pc. ¿Cuál de las dos estrellas se ve más brillante?

Capítulo 2

Expresiones polinómicas. Factorización



Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Capítulo 2

Expresiones polinómicas. Factorización

2.1. Aspectos preliminares.

En esta sección repasamos algunos conceptos que, aunque bastante elementales, conviene tener claros. Comencemos por recordar que en el lenguaje matemático, una letra representa una cantidad que puede ser conocida o desconocida. En otras palabras, cada letra representa un número. Pero, ¿por qué no utilizamos directamentes los números? Las razones son varias. En primer lugar debemos consignar que aveces no conocemos el número, por lo que la letra representa nuestra "incógnita". Otras veces por economía, ya que si nuestro número fuera 3586411.03652200 resultaría muy molesto para manipularlo en operaciones algebraicas. Entonces lo representamos por b y lo reemplazamos al final de las operaciones. Otra razón podría ser que nos reservemos el derecho de asignar distintos valores a un misma letra. Supongamos que T representa la temperatura promedio del día y toma parte en una expresión matemática de uso en meteorología. La expresión será la misma siempre, pero T tomará valores distintos cada día. Siguiendo con las razones, también ocurre que los números irracionales no pueden escribirse porque poseen infinitas cifras decimales no periódicas. Entonces sólo cabe representarlos por un símbolo. Algunos irracionales son muy famosos como π o e (base de los logaritmos naturales). Finalmente, digamos que si los números a representar son fijos y sencillos (como 2, 5 o 17) podemos optar por excribirlos directamente, evitando representarlos por una letra.

2.2. Expresiones polinómicas

Consideremos dos números cualquiera o sus respectivas representaciones mediante letras. Si se escriben uno a continuación del otro, sin que medie entre ellos ningún símbolo que represente una operación, entenderemos que los dos números toman parte como "factores" de un producto usual (o multiplicación). Veamos algunos ejemplos:

$12\ 5$ significa 12 por 5 y podría reemplazarse por 60.

$7a$ significa 7 multiplicado por el valor que represente a.

bx significa que los valores que representen b y x deben multiplicarse entre si.

Ahora extendemos el concepto a una secuencia de símbolos que contenga cualquier número de ellos, interpretando que la ausencia de operaciones indicadas representa implícitamente productos. Por ejemplo, la secuencia $5bax4xaa$ debe interpretarse como la multiplicación de los números indicados y los representados por la letras. Una forma de escribir en forma más compacta la secuencia de factores puede obtenerse haciendo lo siguiente:

$$5\,b\,a\,x\,4\,x\,a\,a \;=\; 20\,a^3bx^2 \tag{2.1}$$

Cualquier expresión simbólica que pueda escribirse como producto de cantidades conocidas o desconocidas, ya sea en forma explícita o simbólica, la denominaremos "expresión monómica". Como ejemplo tenemos:

$$24\,x^2 \qquad -5\,hb^4 \qquad xxyz \qquad 27\,my^6f^3 \tag{2.2}$$

Ahora estamos en condiciones de dar un paso más. Si proponemos una expresión formada por la suma de varios expresiones monómicas, decimos que la misma es una "expresión polinómica". Veamos algunos ejemplos:

$$\begin{array}{l} 16\,a^2 \;+\; 5\,b^3c \;-\; 8\,abc^5 \\ x^3 \;+\; x^2 \;+\; x \;+\; 1 \\ 6\,ay^4 \;-\; 12\,a^2y^3 \;+\; 18\,a^3y \end{array} \tag{2.3}$$

Como forma abreviada del lenguaje, a las expresiones polinómicas se las suele referir como "polinomios", aunque esta palabra a veces es utilizada en un sentido más estricto. Nosotros adoptaremos esta terminología con las debidas reservas. Por extensión inmediata, decimos que, dependiendo del número de expresiones monómicas que componen el polinomio, estos serán monomios, binomios, trinomios, cuatrinomios, etc.

2.3. Factorización

Comencemos por dar algunas precisiones terminológicas. En primer lugar recordemos que la palabra "factor" se utiliza en matemática para denominar a cada una de las cantidades que toman parte en un producto o multiplicación. Los factores pueden ser números o sus representaciones. Por ejemplo, la expresión

$$24\,ax^3\,\left(b+4y^2\right)^2 \tag{2.4}$$

representa el producto de cuatro factores. Estos son

$$24 \qquad a \qquad x^3 \qquad \left(b+4y^2\right)^2 \tag{2.5}$$

Al lector le debe quedar claro que estas cuatro cantidades son "factores", sólo en el contexto de la expresión (2.4), dado que la misma es un producto.

Ahora recordemos el significado de la palabra “término”. En matemática, la palabra término se aplica a las cantidades que toman parte en una suma algebraica, por ejemplo:

$$x + 38 - h^2 + \left(7s^2 - a\right) \tag{2.6}$$

es una expresión formada por cuatro términos, ellos son

$$x \qquad 38 \qquad h^2 \qquad \left(7s^2 - a\right) \tag{2.7}$$

Nuevamente, las cuatro cantidades anteriores son “términos”, porque la expresión (2.6) es una suma algebraica.

Ahora estamos en condicones de abordar el concepto de factorización. Consideremos inicialmente una expresión polinómica. Decimos que la misma admite ser factorizada, si mediante operaciones se la puede convertir en un producto de al menos dos factores. Esto no siempre será posible, por lo que resulta muy importante que el estudiante aprenda a reconocer los casos en que tal operación puede realizarse. Nosotros aquí presentaremos algunos casos clásicos que no agotan todas las posibilidades, pero pueden ser abordados mediante recursos matemáticos muy básicos. Pospondremos por el momento los casos de factorización que requieran recursos aún no repasados. En sentido práctico, podemos reconocer en general que el proceso de factorización consiste en recorrer el camino inverso de la propiedad distributiva del producto en la suma. Por tanto, aplicar la propiedad distributiva en el resultado de la factorización, siempre es un buen método para comprobar que las cuentas estén bien hechas.

2.4. Primer caso: Factor común.

Los polinomios que pueden ser factorizados con esta técnica no tienen ninguna restricción respecto del número de monomios que contienen. La condición de aplicabilidad es que existan factores repetidos en todos los monomios, ya sean simbólicos o numéricos. Para poder distinguir si existe un factor común entre los números, utilizaremos como regla, que dicho factor común es el máximo común divisor entre los números de todos los monomios. Cuando algún monomio no presenta factor numérico asumiremos que dicho factor es la unidad (1), y será suficiente para asumir que el factor común numérico es 1 (y por tanto no se escribe). Los factores simbólicos que se repiten en todos los monomios, pueden aparecer con distintos exponentes. La regla es elegir como factor común al factor repetido con su menor exponente (recuerde que cuando no se escribe el exponente, se asume que el mismo vale 1). Practiquemos con un ejemplo

$$18\,a^3bx^2 \;+\; 48\,a^2b^2y \;+\; 30\,a^2b^3y^2 \tag{2.8}$$

Comencemos por reconocer que el máximo común divisor entre 18, 48 y 30 es 6. Por tanto 6 es el factor común numérico. Luego observamos que los factores simbólicos repetidos son a y b que, c que con sus menores exponentes son a^2 y b. Entonces, estos últimos son los factores comunes simbólicos. Ya tenemos todo lo necesario. Ahora la técnica consiste en escribir los factores comunes, y a continuación escribimos entre paréntesis el polinomio remanete. El ejercicio completo tiene el siguiente aspecto:

$$18\,a^3bx^2 \;+\; 48\,a^2b^2y \;+\; 30\,a^2b^3y^2 \;=\; 6\,a^2b\left(3\,ax^2 \;+\; 8\,by \;+\; 5\,b^2y^2\right) \tag{2.9}$$

Observe que siempre el polinomio remanente tiene el mismo número de monomios que el original y cada monomio del mismo se obtiene manteniendo “lo que queda” al extraerle el factor común. En sentido estricto, decimos que el monomio remanente se obtiene del cociente entre el monomio original y el factor común.

2.5. Segundo caso: Factor común en grupos.

Los polinomios que se encuadran en este caso, deben cumplir el requisito de tener un número par de monomios[1]. La técnica consiste en seperar el polinomio en dos partes con igual número de monomios. Luego, en cada uno de los grupos procedemos con el método de la sección anterior. Con esto llegamos a la mitad del proceso. Trabajemos con un ejemplo hasta este punto.

$$20\,s^2b^2 \;-\; 28\,ab^2 \;+\; 15\,s^2c \;-\; 21\,ac \tag{2.10}$$

Elegimos los dos primeros monomios como primer grupo, y los restantes como segundo grupo. Luego, operamos extrayendo los factores comunes de cada grupo. Entonces tenemos

$$20\,s^2b^2 \;-\; 28\,ab^2 \;+\; 15\,s^2c \;-\; 21\,ac \;=\; 4\,b^2\left(5\,s^2 \;-\; 7\,a\right) \;+\; 3\,c\left(5\,s^2 \;-\; 7\,a\right) \tag{2.11}$$

En este punto debemos observar lo más restrictivo que requiere la técnica. Los polinomios remanentes de cada grupo “deben ser iguales”. Esto ocurre en nuestro ejemplo por lo que podemos seguir adelante. Si no ocurriera, el método no puede aplicarse y decimos que el polinomio en cuestión no puede ser factorizado con esta técnica. Volvamos al ejemplo. Como los polinomios remanentes de cada grupo son iguales, y cada uno de ellos es un “factor” de los respectivos “monomios” en que se convirtió cada grupo original, resultan factores comunes entre dichos monomios. Entonces los extraemos como factores comunes. Así obtenemos la factorización final siguiente:

$$20\,s^2b^2 \;-\; 28\,ab^2 \;+\; 15\,s^2c \;-\; 21\,ac \;=\; \left(5\,s^2 \;-\; 7\,a\right)\left(4\,b^2 \;+\; 3\,c\right) \tag{2.12}$$

2.6. Tercer caso: Trinomio cuadrado perfecto.

Como el nombre indica, esta técnica se aplica a polinomios con tres términos. De estos términos, dos deben ser cuadrados perfectos. ¿Cómo los reconocemos? Es bastante fácil. Estos monomios deben tener todos sus factores simbólicos con exponentes pares, mientras que sus factores numéricos deben ser cuadrados perfectos $(1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ ...)$. Si se cumple esto tenemos la mitad hecha. Veamos un ejemplo

$$25\,a^2 \;+\; 30\,abc^2 \;+\; 9\,b^2c^4 \tag{2.13}$$

[1] En realidad, esta condición no es excluyente, sino que en los casos más habituales se cumple. El estudiante podrá inferir sobre los casos más complicados, cuando adquiera experiencia práctica en resoluciones básicas.

Aquí observamos que el primer y tercer monomios son cuadrados perfectos, por lo que estamos en condiciones de seguir adelante. Luego, obtenemos la raíz cuadrada de los dos monomios seleccionados, y construimos el doble del producto de estas raices. La secuencia está indicada en lo que sigue:

$$\left\{\begin{array}{l} 25\,a^2 \\ 9\,b^2c^4 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 5\,a \\ 3\,bc^2 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad 2\;(5\,a)\left(3\,bc^2\right) \;=\; 30\,abc^2 \tag{2.14}$$

Ahora verificamos si esta última operación coincide con el monomio restante del polinomio original. El estudiante observará que el segundo término de nuestro ejemplo coincide con la última operación propuesta. Entonces podemos en condiciones de decir que nuestro ejemplo constituye un "trinomio cuadrado perfecto".

Hasta aquí, el procedimiento es para verificar las condiciones de aplicabilidad de la técnica. Como esto ha sido verificado, estamos en situación de escribir el resultado. Este consiste en el cuadrado de un binomio cuyos monomios son las raíces de los cuadrados perfectos. Entendiendo que dichas raíces son elegidas como positivas, el signo entre los monomios del resultado, debe coincidir con el signo del monomio original que no es cuadrado perfecto. Así tenemos

$$25\,a^2 \;+\; 30\,abc^2 \;+\; 9\,b^2c^4 \;=\; \left(5\,a \;+\; 3\,bc^2\right)^2 \tag{2.15}$$

2.7. Cuarto caso: Cuatrinomio cubo perfecto.

Aquí nuevamente el título nos indica que los polinomios que pueden tratarse con esta técnica, deben tener cuatro términos. El procedimiento es análogo al del caso anterior. Primero tenemos que reconocer que dos de los cuatro términos sean cubos perfectos. Para reconocerlos, observamos que todos los factores simbólicos tengan exponentes múltiplos de 3. Por su parte, los factores numéricos deben ser cubos perfectos $(1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ ...)$. Veamos un ejemplo

$$27\,s^3x^6 \;+\; 108\,s^2x^4a \;+\; 144\,sx^2a^2 \;+\; 64\,a^3 \tag{2.16}$$

Observemos que el primer y el cuarto término son cubos perfectos. Entonces podemos seguir adelante. La segunda etapa consiste en obtener la raíz cúbica de estos monomios. Luego, hacemos dos operaciones:

a) El triple del producto entre el cuadrado de la primera raíz y la segunda.

b) El triple del producto entre la primera raíz y el cuadrado de la segunda.

En la secuencia siguiente, mostramos el procedimiento para nuestro ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{l} 27\,s^3x^6 \\ 64\,a^3 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 3\,sx^2 \\ 4\,a \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} 3\;(3\,sx^2)^2\,(4\,a) & = & 108\,s^2x^4a \\ 3\;(3\,sx^2)\,(4\,a)^2 & = & 144\,sx^2a^2 \end{array}\right. \tag{2.17}$$

Aquí el estudiante debe corroborar que los resultados de los productos a y b, coincidan con los dos términos restantes del polinomio inicial, esto se verifica con el segundo y tercer monomio de la Ec. (2.16). Entonces comprobamos que dicho polinomio es un cuatrinomio cubo perfecto. Ahora estamos en condiciones de escribir el resultado. El mismo es el cubo de un binomio cuyos términos son las raíces cúbicas de los cubos perfectos. Así tenemos

$$27\,s^3x^6 \;+\; 108\,s^2x^4a \;+\; 144\,sx^2a^2 \;+\; 64\,a^3 \;=\; \left(3\,sx^2 \;+\; 4\,a\right)^3 \tag{2.18}$$

2.8. Quinto caso: Diferencia de cuadrados.

Este es un caso cuya factibilidad de aplicación es muy fácilmente reconocible. Sólo es aplicable a binomios diferencia, cuyos términos sean cuadrados perfectos. Trabajemos con un ejemplo

$$49\,w^2h^4 \;-\; 16\,r^6b^2 \tag{2.19}$$

Que el binomio es una diferencia, lo reconocemos por el signo "menos". Luego, que los términos son cuadrados perfectos lo corroboramos mediante la técnica de reconocimiento propuesta para los trinomios cuadrados perfectos (sección 2.6). Para este ejemplo se verifica, por lo que estamos habilitados a efectuar la factorización. Para ello, buscamos las raices cuadradas de cada monomio. Esto es

$$\left\{\begin{array}{l} 49\,w^2h^4 \\ 16\,r^6b^2 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 7\,wh^2 \\ 4\,r^3b \end{array}\right. \tag{2.20}$$

Luego el resultado es el producto de dos monomios. Uno es la suma de las raices, y el otro es la diferencia de las mismas. El ejemplo se completa como sigue:

$$49\,w^2h^4 \;-\; 16\,r^6b^2 \;=\; \left(7\,wh^2 \;-\; 4\,r^3b\right)\left(7\,wh^2 \;+\; 4\,r^3b\right) \tag{2.21}$$

2.9. Casos combinados.

Muchas veces, los polinomios admiten más de un proceso de factorización. Estos suelen ser los casos más interesantes, porque permiten ejercitar cierta destreza matemática muy útil en innumerables tratamientos a desarrollar en el futuro. Desarrollemos pues, un ejemplo que combine varios casos, donde sólo indicaremos en cada paso, el caso de factorización que aplicamos. Consideremos el polinomio siguiente:

$$10\,as^5 \;-\; 180\,as^3b^2 \;+\; 810\,ab^4s \;+\; 5\,bs^5 \;-\; 90\,s^3b^3 \;+\; 405\,b^5s \tag{2.22}$$

Extraemos factores comunes (primer caso).

$$5\,s\,\left(2\,as^4 \;-\; 36\,as^2b^2 \;+\; 162\,ab^4 \;+\; bs^4 \;-\; 18\,s^2b^3 \;+\; 81\,b^5\right) \tag{2.23}$$

Identificamos grupos para aplicar el segundo caso, y extraemos factores comunes en cada grupo.

$$5\,s\,\left[2\,a\,\left(s^4\;-\;18\,s^2b^2\;+\;81\,b^4\right)\;+\;b\,\left(s^4\;-\;18\,s^2b^2\;+\;81\,b^4\right)\right] \tag{2.24}$$

Luego factorizamos completando el procedimiento del segundo caso, tenemos.

$$5\,s\,\left(2\,a\;+\;b\right)\left(s^4\;-\;18\,s^2b^2\;+\;81\,b^4\right) \tag{2.25}$$

Ahora reconocemos un trinomio cuadrado perfecto en el segundo paréntesis. Aplicamos tercer caso.

$$5\,s\,\left(2\,a\;+\;b\right)\left(s^2\;-\;9\,b^2\right)^2 \tag{2.26}$$

El binomio del segundo paréntesis es una diferencia de cuadrados. Aplicamos quinto caso.

$$5\,s\,\left(2\,a\;+\;b\right)\left[\,(s\;+\;3\,b)\,(s\;-\;3\,b)\right]^2 \tag{2.27}$$

Finalmente, escribimos la forma más factorizada posible.

$$5\,s\,\left(2\,a\;+\;b\right)\left(s\;+\;3\,b\right)^2\left(s\;-\;3\,b\right)^2 \tag{2.28}$$

Práctica 2

1. Factorizá las siguientes expresiones mediante extracción de factor común o factor común en grupos según corresponda.

    a) $2\,x^4 - x^3 - 6\,x^2 =$

    b) $y^6 - y^2 =$

    c) $-w^3 + 16\,w =$

    d) $3\,n^5 + n^4 - 3\,n - 1 =$

    e) $-2\,h^5 + 12\,h^4 - 18\,h^3 + 2\,h^2 - 12\,h + 18 =$

2. Escribe V o F según corresponda y justifica tu respuesta.

    a) $c^2 - 2\,c + 1 = (c + 1)^2$

    b) $d^2 + 8\,d + 16 = (d + 4)^2$

    c) $f^2 - 1 + 2\,f = (1 - f)^2$

3. Expresá cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.

    a) $4\,z^2 - 4\,z + 1 =$

    b) $3\,k + k^2 + \dfrac{9}{4} =$

    c) $4 + a^6 + 4\,a^3 =$

    d) $-\dfrac{4}{3}\,s + \dfrac{4}{9} + s^2 =$

4. Escribe V o F según corresponda y justifica tu respuesta.

    a) $1 + 3\,m^2 - 3\,m - m^3 = (1 - m)^3$

    b) $-27\,v^2 + v^3 - 27 + 9\,v = (v - 3)^3$

    c) $w^3 - 9\,w^2 + 27\,w + 27 = (w + 3)^3$

5. Expresá cada cuatrinomio cubo perfecto como el cubo de un binomio.

    a) $p^3 + 15\,p^2 + 75\,p + 125 =$

    b) $\dfrac{1}{8}\,x^3 - 1 - \dfrac{3}{4}\,x^2 + \dfrac{3}{2}\,x =$

    c) $48\,h - 12\,h^2 - 64 + h^3 =$

d) $\dfrac{3}{2}\,q^2 + \dfrac{3}{4}\,q + q^3 + \dfrac{1}{8} =$

6. Resolvé aplicando diferencia de cuadrados:

   a) $1 - g^2 =$

   b) $b^4 - 36 =$

   c) $x^2 - \dfrac{49}{121} =$

   d) $25\,m^2 - 4 =$

   e) $r^4 - 625 =$

7. Factorizá cada una de estas expresiones:

   a) $6\,a\,b + 14\,a\,c - 2\,a\,d =$

   b) $36\,a^2\,b^5\,z^2 + 6\,a^5\,b^2\,z + 3\,a^2\,b^4\,z^3 =$

   c) $a\,b - a - b + 1 =$

   d) $2\,x + 3\,y - 6\,x\,y - 9\,y^2 =$

   e) $a^4\,m^8 - b^6\,c^8 =$

   f) $z^2 - 2\,z + 1 =$

   g) $64\,x^3\,y^3 + 3\,x\,y - \dfrac{1}{8} - 24\,x^2 y^2 =$
   Ayuda: Usar cuatrinomio cubo perfecto

   h) $a\,c\,m + a\,d\,m + b\,c\,m + b\,d\,m + a\,c\,n + a\,d\,n + b\,c\,n + b\,d\,n =$

8. Factorizá las siguientes expresiones especificando en cada caso el conjunto de validez y luego simplificá.

   a) $\dfrac{x^2 + 4\,x + 4}{x^2 + 2\,x} =$

   b) $\dfrac{-r^2 + r^3}{-2\,r^2 + r^3 + r} =$

   c) $\dfrac{t^5 - 16\,t}{-2\,t + t^2} =$

   d) $\dfrac{2}{-3\,n + n^2} \cdot \dfrac{n - 3}{n} =$

   e) $\dfrac{4\,k + k^2 + 4}{-4 + k^2} : \dfrac{6\,k^3 + 3\,k^4}{6\,k^2 - 12\,k} =$

   f) $\dfrac{\left(\dfrac{q^2 - 9}{q^4 - 16}\right)}{\left(\dfrac{q^2 + q\,4 + 4}{2 + q}\right)} =$

g) $\dfrac{6\,x^2}{4\,x\,-\,8}\,+\,\dfrac{12\,x}{8\,-\,4\,x}\,=$

h) $\dfrac{2\,y\,-\,y^3}{y^2}\,-\,\dfrac{y\,(y\,+\,2)}{y^2}\,=$

i) $-\dfrac{9\,+\,6\,u\,+\,u^2}{-3\,-\,u}\,+\,\dfrac{u^2\,-\,9}{-3\,+\,u}\,=$

j) $\dfrac{2\,+\,l^2}{(l\,-\,2)\,(l^4\,-\,1)}\,-\,\dfrac{3\,l}{-l\,+\,2\,+\,l^5\,-\,2\,l^4}\,=$

k) $\dfrac{\dfrac{m}{m\,-\,3}\,+\,\dfrac{2}{-6\,m\,+\,m^2\,+\,9}}{-\dfrac{2\,-\,m}{m\,-\,3}}\,=$

l) $\dfrac{\left(\dfrac{h\,-\,7}{h^2\,-\,16}\right)}{\left(\dfrac{49\,-14\,h\,+\,h^2}{4\,+\,h}\right)}\,-\,\dfrac{h\,+\,4}{\left(-\dfrac{16\,-\,h^2}{4}\right)}\,=$

m) $\left(\dfrac{x}{\frac{1}{x}}\,:\,\dfrac{x^2}{\frac{1}{x^2}}\right)\,+\,\left(\dfrac{\frac{1}{x}\,-\,\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}}\right)\,=$

n) $\dfrac{-(25\,-\,f^2)}{f^2\,+\,9\,-\,6\,f}\;\dfrac{f\,-\,3}{10\,f\,+\,25\,+\,f^2}\,-\,\dfrac{f\,-\,5}{f^2\,-\,25}\,=$

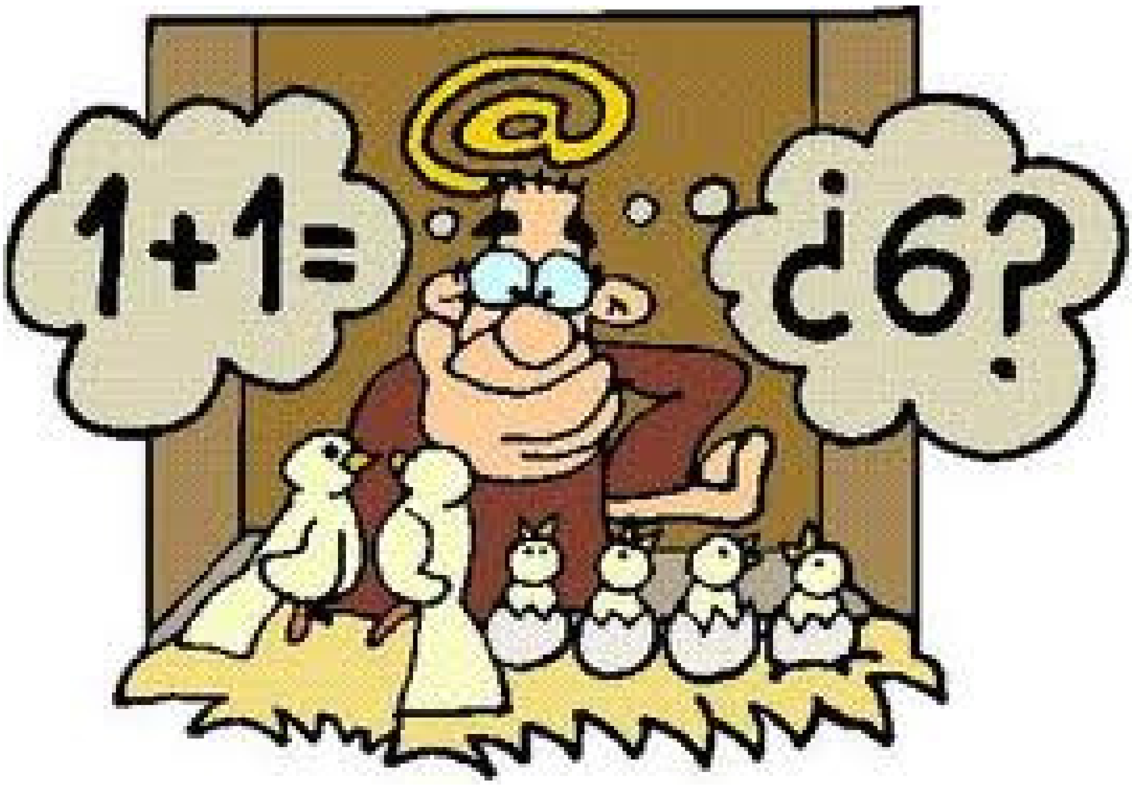
ñ) $\dfrac{x^2\,+\,m\,x\,+\,x^2\,+\,2\,m\,x\,+\,m^2}{2\,x\,+\,m}\,=$

o) $\dfrac{100\,-\,x^2}{20\,+\,\dfrac{x}{2}}\;\dfrac{a\,-\,x}{10\,a\,-\,10\,x\,-\,x\,a\,+\,x^2}\,=$

p) $\dfrac{a\,b\,t\,-\,t\,c\,g\,+\,a\,t\,g\,-\,b\,t\,c}{a^2\,-\,c^2}\;\dfrac{2\,a\,+\,2\,c}{2\,t\,b^2\,+\,2\,t\,g^2\,+\,4\,t\,g\,b}\,=$

Capítulo 3

Ecuaciones algebraicas



Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Capítulo 3

Ecuaciones Algebraicas

Decimos que **una igualdad son dos expresiones vinculadas por el signo igual**, aquí a cada expresión se la llama miembro, el **primer miembro corresponde a la expresión que está a la izquierda del signo igual y el segundo miembro es la expresión que está a la derecha.**

Una igualdad que se verifica para cualquier conjunto de valores de las variables es una identidad.

Ejemplo: *Las siguientes igualdades son identidades*

$$\begin{array}{rcl} a & = & a \\ (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\ 2 & = & 2 \end{array}$$

Una igualdad que se verifica para ciertos valores de las variables es una ecuación. Los valores que satisfacen la ecuación se llaman raíces de la ecuación.

Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen la misma solución.

Para resolver una ecuación hay que operar miembro a miembro para despejar la o las variables.

En el caso particular de tener una ecuación igualada a cero (esto implica que uno de los miembros de la igualdad es cero) a los valores de las variables que satisfacen la ecuación se los llama **RAÍCES** de la ecuación.

ATENCIÓN

Operar miembro a miembro garantiza que la nueva ecuación es una igualdad pero NO GARANTIZA que sea una ecuación equivalente. Por ejemplo

$$x = 2 \Longrightarrow 2 \text{ es raíz}$$

elevando al cuadrado en ambos miembros (manteniendo la igualdad) obtenemos una nueva ecuación

$$x^2 = 4 \Longrightarrow 2 \text{ y } -2 \text{ son raíces}$$

como las raíces son distintas las ecuaciones no son equivalentes. Este hecho hay que tenerlo muy presente a la hora de resolver ecuaciones.

3.1. Ecuaciones lineales

Las ecuaciones lineales son polinomios de grado 1 igualados a cero, es decir, que la máxima potencia de la variable debe ser igual a la unidad.

$$a\,x + b = 0$$

Notar que a es distinto de cero, porque si $a = 0$ no tendríamos un polinomio de grado 1 igualado a cero.
Este tipo de ecuaciones tiene una única solución. Para despejar la variable primero se resta b en ambos miembros y luego se divide, en ambos miembros, por a:

$$\begin{aligned} a\,x + b - b &= 0 - b \\ \frac{a\,x}{a} &= \frac{-b}{a} \\ x &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

Entonces **la única solución de una ecuación lineal $\boldsymbol{ax + b = 0}$ es:**

$$\boxed{x = -\frac{b}{a}} \tag{3.1}$$

Notar que a es distinto de cero, porque si $a = 0$ no tendríamos un polinomio de grado 1 igualado a cero.

3.1.1. Pérdida de soluciones:

Una ecuación puede resolverse de diferentes formas. Sin embargo, hay veces que según el camino elegido se puede obtener un resultado equivocado cuando no se opera cuidadosamente. Veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo: *Tomemos la ecuación lineal*

$$3\,x + 3 = 4\,(x + 1)$$

y vamos a resolverla de dos maneras diferentes:

Caso 1:

$$\begin{aligned} 3\,x + 3 &= 4\,(x + 1) \\ 3\,(x + 1) &= 4\,(x + 1) \\ 3\,\cancel{(x + 1)} &= 4\,\cancel{(x + 1)} \\ 3 &= 4 \Longrightarrow \nexists\ \text{solución} \end{aligned}$$

Caso 2:

$$\begin{aligned} 3\,x+3 &= 4\,(x+1) \\ 3\,x+3 &= 4\,x+4 \\ 3-4 &= 4\,x-3\,x \\ -1 &= x \implies \exists \text{ solución} \end{aligned}$$

¿Cuál es la solución correcta? ¿Dónde está el error?

En realidad, las dos resoluciones son posibles pero se llega a distintos resultados porque ***el caso 1 está incompleto****. Lo que sucede es que para poder simplificar el factor* $(x+1)$ *hay que aclarar que la simplificación es posible siempre y cuando* $(x+1) \neq 0$*, ya que simplificar es equivalente a dividir por* $(x+1)$ *en ambos miembros, pero para poder hacer esto hay que garantizar que no se está dividiendo por cero. Entonces, la primera resolución tendría que hacerse de la siguiente manera:*

Caso 1:

$$\begin{aligned} 3\,x+3 &= 4\,(x+1) \\ 3\,(x+1) &= 4\,(x+1) \end{aligned}$$

Aquí hay que separar en dos casos:

Caso 1a: *si* $(x+1) \neq 0$ *entonces podemos simplificar*

$$\begin{aligned} 3\cancel{(x+1)} &= 4\cancel{(x+1)} \\ 3 &= 4 \implies \nexists \text{ solución} \end{aligned}$$

Caso 1b: *si* $(x+1) = 0$ *entonces* $x = -1$*. Probemos si el valor* $x = -1$ *satisface la ecuación* $3\,x+3 = 4\,(x+1)$*. Para esto hay que reemplazar a* x *por su valor correspondiente y ver si obtenemos una igualdad.*

$$\begin{aligned} 3\,.\,(-1)+3 &= 4\,(-1+1) \\ -3+3 &= 0 \\ 0 &= 0 \implies \exists \text{ solución} \end{aligned}$$

Luego, como $x = -1$ *satisface la ecuación tenemos que* -1 *es raíz. De este modo conseguimos, a través del caso 1 y el caso 2, obtener la misma solución.*

La pérdida de raíces se puede dar en cualquier tipo de ecuación. Por esto es importante resolver cuidadosamente las ecuaciones y a la hora de simplificar hay que analizar los casos individualmente.

3.1.2. Ecuaciones lineales de 1 incógnita que involucran módulo

Cuando tenemos una ecuación lineal donde la incógnita forma parte del argumento de un valor absoluto, hay que utilizar la definición del módulo para poder despejar la incógnita.

Ejemplo: *Supongamos que queremos encontrar los valores de z tales que:*

$$|z+1| = 2$$

Para poder despejar z de la ecuación tenemos que sacar las barras de módulo, para ello vamos a utilizar la definición de valor absoluto. La definición dada en el capítulo Números Reales es la siguiente:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ahora apliquemos la definición a nuestro caso:

$$\begin{array}{l} \text{si } z+1 \geq 0 \Longrightarrow |z+1| = z+1 \\ \text{si } z+1 < 0 \Longrightarrow |z+1| = -(z+1) \end{array}$$

De modo que para resolver nuestra ecuación lineal tenemos que separar en dos casos, un caso será cuando $z+1 \geq 0$ y el otro cuando $z+1 < 0$. Entonces

Caso 1: si $z+1 \geq 0 \Longrightarrow |z+1| = z+1$. *Reemplazando el valor del módulo en la ecuación obtenemos que:*

$$\begin{aligned} |z+1| &= 2 \\ z+1 &= 2 \\ z &= 2-1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

*Ahora, el valor $z = 1$ será solución de la ecuación siempre y cuando también se cumpla que $z+1 \geq 0$ para $z = 1$ (porque esta fue la condición con la que pudimos sacar la barras de módulo). Como $z+1 = 2 > 0$ cuando $z = 1$, resulta que **$z = 1$ es solución**.*

Caso 2: si $z+1 < 0 \Longrightarrow |z+1| = -(z+1)$. *Reemplazando el valor del módulo en la ecuación obtenemos que*

$$\begin{aligned} |z+1| &= 2 \\ -(z+1) &= 2 \\ -z-1 &= 2 \\ -1-2 &= z \\ -3 &= z \end{aligned}$$

*Nuevamente, antes de apresurarse a decir que $z = -3$ es solución hay que asegurarse que este valor satisfaga que $z+1 < 0$. Entonces, para $z = -3$, resulta que $z+1 = -3+1 = -2 < 0$. Ahora sí podemos decir que **$z = -3$ es solución**.*

Finalmente tenemos dos valores de z que satisfacen la ecuación $|z+1| = 2$, estos valores son $z = 1$ y $z = -3$.

3.2. Sistemas de ecuaciones lineales

¿Qué pasa si una ecuación lineal tiene dos incógnitas?. Supongamos que tenemos la ecuación:

$$2\,r - p = 6$$

Lo único que se puede hacer en una situación como esta es escribir una variable en función de la otra, es decir, despejar alguna de las variables. Por ejemplo, despejemos p (porque es más fácil que despejar r, pero si ustedes quieren, pueden despejar r). Entonces, nos quedaría que:

$$p = 2\,r - 6$$

¿Y cuál es la solución de la ecuación? Esta ecuación no tiene solución única, por el contrario, tiene infinitas soluciones: todos los pares de valores de r y p que satisfagan la ecuación serán solución, como por ejemplo:

r	p
0	-6
1	-4
4	2
1/2	-5

Para poder encontrar valores únicos de r y p necesitamos otra ecuación que relacione las dos incógnitas y que no sea equivalente a la anterior que encontramos. De este modo la segunda ecuación también tendrá infinitas soluciones, pero si existe algún par de valores que está en los dos conjuntos de soluciones, tendremos una solución que satisface las dos ecuaciones simultáneamente.

Ejemplo: *Tomemos como nueva ecuación $2\,r - 3\,p = 2$. De modo que el sistema de ecuaciones que queremos resolver es el siguiente*

$$\begin{cases} 2r - p = 6 \\ 2\,r - 3\,p = 2 \end{cases}$$

Despejamos p de la primera ecuación:

$$p = 2r - 6$$

Despejamos p de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 2\,r - 3\,p &= 2 \\ 2\,r - 2 &= 3\,p \\ \frac{2\,r - 2}{3} &= p \end{aligned}$$

Algunas de las infinitas soluciones de estas ecuaciones son:

Para la primera ecuación

r	p
0	6
1	-4
4	2
$1/2$	5

Para la segunda ecuación

r	p
0	$-2/3$
1	0
4	2
$1/2$	$-1/3$

Las ecuaciones $2\,r - p = 6$ y $2\,r - 3\,p = 2$ no son equivalentes porque sus conjuntos solución no son iguales, sin embargo los valores $r = 4$ y $p = 2$ satisfacen ambas ecuaciones. Entonces se dice que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\,r - p = 6 \\ 2\,r - 3\,p = 2 \end{cases}$$

tiene solución única y es el par $r = 4$ y $p = 2$.

De acuerdo a la cantidad de soluciones que tenga el sistema se clasifican en:

Sistema compatible: Se dice que un sistema de ecuaciones es compatible cuando tiene solución.

- **Sistema compatible determinado:** Se dice que un sistema de ecuaciones es determinado cuando tiene solución única. Este caso se da cuando se tiene la misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas, y además, las ecuaciones no son equivalentes.
- **Sistema compatible indeterminado:** Se dice que un sistema de ecuaciones es indeterminado cuando tiene infinitas soluciones. Este caso se da cuando se tienen menos ecuaciones que incógnitas, o cuando las ecuaciones son equivalentes.

Sistema incompatible: Se dice que un sistema de ecuaciones es incompatible cuando no tiene solución.

3.2.1. Métodos de resolución

Para resolver un sistema de ecuaciones existen distintos métodos:

- Sustitución
- Igualación
- Reducción por sumas y/o restas

Aquí sólo nos centraremos en el método por sustitución, los otros métodos están descriptos en la lectura adicional “Resolución de sistemas de ecuaciones”.

La idea del método es despejar una variable de una de las ecuaciones del sistema y reemplazar la expresión encontrada en otra de las ecuaciones. En el caso de tener un sistema con más de dos incógnitas, este proceso hay que repetirlo hasta que consigamos una expresión en función de una de las incógnitas. De esta expresión podemos despejar la primera incógnita. Luego, reemplazamos el valor encontrado en las expresiones anteriores para ir encontrando los valores de todas las incógnitas.

Ejemplos: *Para ejemplificar este método resolveremos un sistema compatible determinado, uno compatible indeterminado y por último uno incompatible.*

Ejemplo 1: *Sistema compatible determinado*

$$\begin{cases} 2\,r - p = 6 \quad (a) \\ 2\,r - 3\,p = 2 \quad (b) \end{cases} \tag{3.2}$$

De la ecuación 3.2 (a) *despejamos* p*:*

$$2\,r - 6 = p \quad (c) \tag{3.3}$$

y esta expresión la reemplazamos en la ecuación 3.2 (b)*:*

$$\begin{aligned} 2\,r - 3\,(2\,r - 6) &= 2 \\ 2\,r - 6\,r + 18 &= 2 \\ -4\,r + 18 &= 2 \quad (d) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Así conseguimos una expresión en función de una sola incógnita. De la ecuación 3.4 (d) *podemos despejar* r*:*

$$\begin{aligned} -4\,r + 18 &= 2 \\ r &= \frac{2 - 18}{-4} = \frac{-16}{-4} = 4 \end{aligned}$$

Para terminar de resolver el sistema reemplazamos el valor hallado para r *en la ecuación 3.3* (c)*:*

$$p = 2\,r - 6 = 2\,.\,4 - 6 = 2$$

De este modo vemos que el sistema tiene como solución el par de valores $r = 4$ *y* $p = 2$.

En este ejemplo queda clara la importancia de enumerar cada ecuación que vamos obteniendo y ser ordenados a medida que resolvemos el sistema de ecuaciones, de esta manera será más fácil encontrar un error en caso de que nos equivoquemos en la resolución.

Ejemplo 2: *Sistema compatible indeterminado*

$$\begin{cases} 2\,r + 7\,p = -10 \quad (a) \\ -14\,r - 49\,p = 70 \quad (b) \end{cases} \tag{3.5}$$

Despejamos r de la ecuación 3.5 (b):

$$\begin{aligned}
-14\,r - 49\,p &= 70 \\
r &= \frac{70+49\,p}{-14} = \frac{\cancel{7}^{1}(10+7\,p)}{-\cancel{14}^{2}} = -\frac{10}{2} - \frac{7}{2}\,p \\
r &= -5 - \frac{7}{2}\,p \qquad (c)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ahora reemplazamos la ecuación 3.6 (c) en la ecuación 3.5 (a):

$$\begin{aligned}
2\,r + 7\,p &= -10 \\
2\left(-5 - \frac{7}{2}\,p\right) + 7\,p &= -10 \\
\cancel{-10} - \cancel{7p} + \cancel{7p} &= \cancel{-10} \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Como llegamos a una identidad (una igualdad que se cumple para cualquier valor de p), resulta que existen infinitos valores de p y de r que satisfacen el sistema. Estas soluciones son de la forma $r = -5 - \frac{7}{2}\,p$.

Ejemplo 3: *Sistema incompatible*

$$\begin{cases} 2\,r + 7\,p = -10 \qquad (a) \\ 2\,r + 7\,p = 3 \qquad (b) \end{cases} \tag{3.7}$$

Despejamos p de la ecuación 3.7 (a):

$$\begin{aligned}
2\,r + 7\,p &= -10 \\
p &= \frac{-10 - 2\,r}{7} = -\frac{10}{7} - \frac{2}{7}\,r \qquad (c)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

y reemplazamos la ecuación 3.8 (c) en la ecuación 3.7 (b):

$$\begin{aligned}
2\,r + 7\,p &= 3 \\
2\,r + 7\left(-\frac{10}{7} - \frac{2}{7}\,r\right) &= 3 \\
\cancel{2r} - 10 - \cancel{2r} &= 3 \\
-10 &= 3 \ \text{ ES ABSURDO}
\end{aligned}$$

Como llegamos a un absurdo resulta que no existe ningún valor para r ni ningún valor para p que satisfaga el sistema.

3.3. Ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas son expresiones polinómicas que pueden llevarse a la forma:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

donde a, b y c son constantes reales, con $a \neq 0$, a los que llamaremos coeficientes de la ecuación.

Este tipo de ecuaciones se resuelven utilizando lo que se conoce como **Fórmula de Bhaskara** dada por la expresión:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}} \tag{3.9}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}} \tag{3.10}$$

Donde x_1 y x_2 son las soluciones a la ecuación cuadrática y se obtuvieron de "despejar x" de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

La fórmula de Bhaskara es una fórmula que puede demostrarse, como veremos a continuación:

Demostración de la fórmula de Bhaskara

Lo que vamos a hacer es ir operando para poder llevar la ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ a una ecuación equivalente de la forma:

$$(\text{algo}\,.\,x + \text{ALGO}\,)^2 = \text{otra cosa}$$

ya que de aquí es bastante simple despejar x.

Lo primero que vamos a hacer es multiplicar por a ($a \neq 0$) en ambos miembros:

$$\begin{aligned} a\,(a\,x^2 + b\,x + c) &= a\,.\,0 \\ a^2\,x^2 + a\,b\,x + a\,c &= 0 \end{aligned}$$

Ahora multiplicamos y dividimos por 2 en el segundo término del primer miembro (de este modo seguimos manteniendo la igualdad porque estamos multiplicando el segundo término por uno):

$$\begin{aligned} a^2\,x^2 + \frac{2}{2}\,(a\,b\,x) + a\,c &= 0 \\ a^2\,x^2 + 2\,a\,\frac{b}{2}\,x + a\,c &= 0 \\ a^2\,x^2 + 2\,a\,\frac{b}{2}\,x &= -a\,c \end{aligned}$$

Sumamos $\dfrac{b^2}{4}$ en ambos miembros y reorganizamos:

$$\begin{aligned} a^2\,x^2 + 2\,a\,\frac{b}{2}\,x + \frac{b^2}{4} &= -a\,c + \frac{b^2}{4} \\ (a\,x)^2 + 2\,(a\,x)\left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= \frac{b^2}{4} - a\,c \end{aligned}$$

En esta última expresión podemos ver que el primer miembro es igual al cuadrado de un binomio (o un trinomio cuadrado perfecto). Por lo que podemos escribir que:

$$(a\,x)^2 + 2\,(a\,x)\left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(a\,x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Entonces, reemplazando esto en la ecuación, tenemos que:

$$\left(a\,x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - a\,c$$

Esta última expresión ya tiene la forma a la que queríamos llegar:

$$(\underbrace{\text{algo}}_{a}\,.\,x + \underbrace{\text{ALGO}}_{\frac{b}{2}})^2 = \underbrace{\text{otra cosa}}_{\frac{b^2}{4} - a\,c}$$

Ahora lo que falta es despejar x. Para esto debemos aplicar raíz cuadrada en ambos miembros:

$$\sqrt{\left(a\,x + \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - a\,c}$$

De acuerdo con la definición de módulo resulta que:

$$a\,x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - a\,c}$$

En el segundo miembro podemos sacar $\frac{1}{4}$ como factor común[1] y luego restar $\frac{b}{2}$ en ambos miembros. Utilizando la propiedad distributiva de la radicación obtenemos que:

$$\begin{aligned}
a\,x + \frac{b}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}\,(b^2 - 4\,a\,c)} \\
a\,x + \frac{b}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}}\,\sqrt{b^2 - 4\,a\,c} \\
a\,x + \frac{b}{2} &= \pm\frac{1}{2}\,\sqrt{b^2 - 4\,a\,c} \\
a\,x &= \pm\frac{1}{2}\,\sqrt{b^2 - 4\,a\,c} - \frac{b}{2}
\end{aligned}$$

Finalmente dividimos por a en ambos miembros, sacamos factor común $\frac{1}{2}$ en el numerador y reordenamos el segundo miembro, así llegamos a la expresión que estábamos

[1]Recuerden que el factor común es equivalente a la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma $a\,(b+c) = a\,b + a\,c$ pero leída de derecha a izquierda. Por lo tanto, uno puede sacar como "factor común" a un factor que no es común si se lo piensa como una distribución. En este caso $\frac{1}{4}(b^2 - 4\,a\,c) = \dfrac{b^2}{4} - a\,c$.

buscando:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4\,a\,c}-\frac{b}{2}}{a} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(-\,b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}\right)}{a} \\ &= \frac{-\,b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x=\frac{-\,b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}$$

Así demostramos que las dos soluciones buscadas se pueden expresar como función de los coeficientes de la ecuación.

Una consecuencia importante de la expresión encontrada para las soluciones es que para que sean números reales, el argumento de la raíz debe ser igual o mayor que cero. Por esta razón a este argumento se lo llama **discriminante** y es el que determina la naturaleza de las soluciones (si son números reales o no).

- **Si $\boldsymbol{b^2-4\,a\,c>0}$** $\Longrightarrow \sqrt{b^2-4\,a\,c}>0$ y por lo tanto, **tendremos dos soluciones reales y distintas**.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-\,b+\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a} \\ x_2 &= \frac{-\,b-\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a} \end{aligned}$$

- **Si $\boldsymbol{b^2-4\,a\,c=0}$** $\Longrightarrow \sqrt{b^2-4\,a\,c}=0$ y por lo tanto, **tendremos dos soluciones reales e iguales**.

$$x_1=x_2=\frac{-\,b\pm 0}{2\,a}=\frac{-b}{2\,a}$$

- **Si $\boldsymbol{b^2-4\,a\,c<0}$** $\Longrightarrow \nexists\sqrt{b^2-4\,a\,c}$ en reales y por lo tanto, **no tendremos soluciones reales**.

De este análisis se puede ver que para conocer la naturaleza de las soluciones no es necesario resolver la ecuación. Basta con conocer el discriminante.

Casos especiales

Por lo que vimos anteriormente sabemos que las soluciones de cualquier ecuación cuadrática se pueden encontrar utilizando la fórmula de Bhaskara (ecuaciones 3.9 y 3.10). Sin embargo hay algunas situaciones en que la ecuación puede resolverse de otra manera (que en general suele ser más sencilla). Por ejemplo, si se anulan uno o más

coeficientes de la ecuación, en cuyo caso se resuelve despejando x.
Ejemplo:

$$\begin{aligned} a\,x^2 + c &= 0 \\ x^2 &= \frac{-c}{a} \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{\frac{-c}{a}} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{aligned}$$

En este caso la ecuación tendrá soluciones reales si a y c tienen signos opuestos.

3.3.1. Ecuaciones bicuadráticas

Se llaman bicuadráticas a las ecuaciones de la forma:

$$a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0 \tag{3.11}$$

Este tipo de ecuaciones se puede resolver utilizando la fórmula de Bhaskara.
Sin embargo, la fórmula de Bhaskara sólo se puede utilizar para resolver ecuaciones cuadráticas.
Podemos empezar por definir una nueva incógnita y tal que:

$$y = x^2$$

Escribiendo la ecuación bicuadrática en función de nuestra nueva incógnita y obtenemos una ecuación cuadrática:

$$a\,x^4 + b\,x^2 + c = a\,(x^2)^2 + b\,(x^2) + c = a\,y^2 + b\,y + c = 0$$

Por lo tanto, la ecuación que ahora debemos resolver es:

$$a\,y^2 + b\,y + c = 0$$

Las soluciones de esta última ecuación se obtienen a partir de la fórmula de Bhaskara:

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$
$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

Luego, para hallar los valores de x que satisfacen la ecuación 3.11 vamos a utilizar la relación entre las incógnitas:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ x &= \pm\sqrt{y} \end{aligned}$$

Pero como tenemos dos expresiones para y tendremos 4 valores para x:

$$\boxed{x = \begin{cases} \sqrt{y} \Longrightarrow & \begin{cases} x_1 = \sqrt{y_1} = \sqrt{\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}} \\ x_2 = \sqrt{y_2} = \sqrt{\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}} \end{cases} \\ -\sqrt{y} \Longrightarrow & \begin{cases} x_3 = -\sqrt{y_1} = -\sqrt{\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}} \\ x_4 = -\sqrt{y_2} = -\sqrt{\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}} \end{cases} \end{cases}} \tag{3.12}$$

Estas son las 4 soluciones de la ecuación bicuadrática.

Ejemplo:

$$2\,x^4 + 5\,x^2 - 207 = 0$$

Defino la incógnita y tal que:

$$y \;=\; x^2$$

Entonces la ecuación bicuadrática queda:

$$2\,y^2 + 5\,y - 207 = 0$$

Aplicando la fórmula de Bhaskara obtengo:

$$y_1 = \frac{-5 + 41}{4} = 9$$
$$y_2 = \frac{-5 - 41}{4} = -11.5$$

Por lo tanto, como y_2 es negativo, sólo me quedan 2 soluciones:

$$x_1 = \sqrt{9} = 3$$
$$x_2 = -\sqrt{9} = -3$$

3.3.2. Sistemas de ecuaciones cuadráticas

Al igual que los lineales, los sistemas de ecuaciones cuadráticos constan de más de una ecuación y cada una de ellas tiene más de una incógnita (estas incógnitas son las mismas en todas las ecuaciones que forman el sistema).

Este tipo de sistemas de ecuaciones se resuelven con los mismos métodos que se utilizan para resolver las ecuaciones lineales.

Ejemplos: *Resolveremos dos sistemas de ecuaciones mixtos, es decir que una ecuación es cuadrática y la otra lineal. En ambos casos utilizaremos el método de sustitución descripto anteriormente.*

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} y = 3\,x + 1 & (a) \\ y = -x^2 + 2\,x + 7 & (b) \end{cases} \tag{3.13}$$

Como $y = 3\,x + 1$ de la primera ecuación, reeemplazamos $y = 3\,x + 1$ en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} -x^2 + 2\,x + 7 &= 3\,x + 1 \\ -x^2 + 2\,x + 7 - 3\,x - 1 &= 0 \\ -x^2 - \,x + 6 &= 0 \quad (c) \end{aligned} \tag{3.14}$$

La ecuación 3.14 (c) sabemos resolverla mediante Bhaskara. Por lo tanto hay dos posibles soluciones:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-2}$$

Entonces las soluciones al sistema serán:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Con estos valores reemplazamos x en las ecuaciones 3.13 (a) y 3.13 (b). Es decir, los pares (-3,-8) y (2,7) satisfacen el sistema.

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} y - x^2 = 4 & (a) \\ 4\,x + y = 0 & (b) \end{cases} \tag{3.15}$$

Para resolverlo despejamos y de la ecuación 3.15 (a):

$$\begin{aligned} y - x^2 = 4 & \\ y &= 4 + x^2 \quad (c) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Y la reemplazamos en la ecuación 3.15 (b):

$$4\,x + 4 + x^2 = 0$$

Entonces, resolvemos esta ecuación por Bhaskara,

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

Entonces las soluciones al sistema serán:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (-2, 8) \\ (x_2, y_2) &= (-2, 8) \end{aligned}$$

Las ecuaciones de grado mayor a 2 (excepto las bicuadráticas), son mucho más complicadas de resolver. De ser posible, hay que factorizar la expresión, así obtenemos un producto de factores de menor grado igualado a cero. Luego las soluciones se encuentran igualando a cero cada factor.

Veamos un ejemplo:

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^2 &= 0 \\ x^2(x^2-4) &= 0 \\ x^2(x-2)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora que tenemos factorizada la expresión, podemos resolverla, igualando cada factor a 0:

$$\begin{aligned} x^2 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_1 = 0 \\ (x-2) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_2 = 2 \\ (x+2) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

Hemos igualado a cero por que para que un producto sea igual a cero, alguno de sus factores debe ser igual a cero.

3.4. Ecuaciones racionales

Las ecuaciones racionales son aquellas que involucran divisiones de polinomios, es decir que son de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios cualesquiera (y $Q(x)$ debe ser distinto del polinomio nulo). En este tipo de ecuaciones, **las soluciones serán aquellas que anulen a $P(x)$ y no anulen a $Q(x)$. Los valores que anulen a $Q(x)$ NO SERÁN SOLUCIÓN**.

3.4.1. Raíces espúreas

Las raíces espúreas son "raíces falsas". En general, en este tipo de ecuaciones, son valores que anulan simultáneamente al numerador y al denominador.

Ejemplo: *Resolvamos la siguiente ecuación:*

$$\frac{x^2-1}{x-1} = 0$$

Para que una división se anule, es necesario que se anule el numerador, por lo tanto tendremos que:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Aquí es donde hay que tener cuidado porque si uno decide que las soluciones de la ecuación son los valores $x = 1$ *y* $x = -1$ *va a cometer un grave error.*

Veamos cuáles de estos valores satisfacen, realmente, la ecuación

$$\begin{array}{lllll} \text{Si } x = 1 & \Longrightarrow & \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{1-1}{1-1} \text{ Intederminado} & \Longrightarrow & x = 1 \text{ no es solución} \\ \text{Si } x = -1 & \Longrightarrow & \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{1-1}{-1-1} = \dfrac{0}{-2} = 0 & \Longrightarrow & x = -1 \text{ es solución} \end{array}$$

De aquí vemos que el valor $x = 1$ *es una raíz espúrea porque no puede ser solución ya que anula al denominador. Mientras que* $x = -1$ *es solución.*

Por esto es importante ***definir el conjunto de validez de la ecuación****, esto es indicar para qué valores está definida la expresión dada, es decir, si un número no pertenece al conjunto de validez, NO hay que reemplazarlo en la ecuación para ver si la verifica y tampoco es una raiz espúrea. En este caso serán los valores que no anulen al denominador. Entonces, la forma correcta de resolver la ecuación anterior sería la siguiente:*

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x-1} &= 0 \quad \text{con } x \neq 1 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Pero como $x \neq 1$, *resulta que* $x = -1$ *es la solución de la ecuación.*

3.4.2. Pérdida de raíces

En el caso anterior vimos que, de acuerdo al método elegido para resolver la ecuación, pueden aparecer raíces espúreas, pero también puede suceder que se pierdan raíces.

Ejemplo: *Resolvamos la siguiente ecuación:*

$$\frac{(x^2+3\,x)\,(x^2+2\,x)}{x^2-4} = \frac{8\,x+24}{2\,x-4}$$

La manera intuitiva de resolverla sería la siguiente: primero factorizar todas las expresiones y luego simplificar todos los factores que sean posibles:

$$\begin{aligned} \frac{(x^2+3\,x)\,(x^2+2\,x)}{x^2-4} &= \frac{8\,x+24}{2\,x-4} \\ \frac{[x\,(x+3)]\,[x\,(x+2)]}{(x+2)(x-2)} &= \frac{8\,(x+3)}{2\,(x-2)} \\ \frac{x^2\,\cancel{(x+3)}\,\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}} &= \frac{\cancelto{4}{8}\,\cancel{(x+3)}}{\cancelto{1}{2}\,\cancel{(x-2)}} \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Sin embargo $x = 2$ y $x = -2$ son raíces espúreas porque anulan los denominadores. Por lo tanto, siguiendo este camino la ecuación no tiene solución. Pero esto no es cierto ya que $x = -3$ satisface la ecuación. Para resolver este dilema nunca hay que perder de vista que simplificar es dividir, y para dividir hay que asegurarse que el divisor sea distinto de cero. Este hecho es lo que indica que ***la resolución anterior está incompleta****.*

Veamos cómo sería ***la resolución correcta****. Primero definimos el "conjuno de validez", en este caso, los elementos dentro de este conjunto son aquellos valores que no anulen el denominador, o sea, todos los reales excepto el 2 y -2. Volvemos a resolver el sistema:*

$$\begin{aligned}
\frac{(x^2+3\,x)\,(x^2+2\,x)}{x^2-4} &= \frac{8\,x+24}{2\,x-4} \\
\frac{[x\,(x+3)]\,[x\,(x+2)]}{(x+2)(x-2)} &= \frac{8\,(x+3)}{2\,(x-2)} \quad \text{con}\, x \neq 2,\ x \neq -2 \\
\frac{x^2\,\cancel{(x+3)}\,\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}} &= \frac{\cancelto{4}{8}\,\cancel{(x+3)}}{\cancelto{1}{2}\,\cancel{(x-2)}} \quad \text{si}\, x \neq -3 \\
x^2 &= 4 \\
x &= \pm 2
\end{aligned}$$

$x = \pm 2$ está fuera del conjunto de validez, por lo que no son solución. *Pero ahora* ***hay que ver qué pasa con $x = -3$*** *porque es un valor que excluimos por el método que elegimos para resolver la ecuación pero pertenece al conjunto de validez. Entonces si $x = -3$*

$$\begin{aligned}
\frac{[(-3)^2+3\,(-3)]\,[(-3)^2+2\,(-3)]}{(-3)^2-4} &= \frac{8\,(-3)+24}{2\,(-3)-4} \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x = -3$ es la solución de la ecuación.

Ecuaciones no algebraicas

En este tipo de ecuaciones la incógnita forma parte del argumento de alguna función no algebraica, como por ejemplo raíces, logaritmos, exponenciales o funciones trigonométricas. Algunos ejemplos se pueden ver en la lectura adicional "Ecuaciones no algebraicas".

Desigualdades o Inecuaciones

En álgebra, algunos problemas originan **desigualdades** en lugar de ecuaciones.

Una desigualdad es similar a una ecuación, sólo que en lugar de tener un signo igual hay uno de los símbolos $<$, $>$, $\geq$ ó $\leq$.

Aquí tenemos un ejemplo de una desigualdad:

$$4x + 7 \;\leq\; 19$$

Sólo algunos valores de x satisfacen esa desigualdad, por ejemplo:

$$x = 2 \implies 15 \ \leq \ 19$$
$$x = 3 \implies 19 \ \leq \ 19$$

Pero sí, por ejemplo, $x = 5$, la desigualdad no se cumple:

$$x = 5 \implies 27 \ \leq \ 19$$

Comprueben ustedes que si $x = 4$ tampoco se cumple que $4x + 7 \ \leq \ 19$.

Resolver una desigualdad que contiene una variable quiere decir determinar todos los valores de la variable que hacen que la desigualdad sea verdadera. Al contrario que en una ecuación, una desigualdad por lo general tiene infinitas soluciones, las cuales forman un intervalo o una unión de intervalos en la recta de los números reales.

Para resolver desigualdades, aplicamos las siguientes reglas que nos permiten aislar la variable a un lado del signo de la desigualdad. Estas reglas indican cuándo dos desigualdades son **equivalentes**. En estas reglas, los símbolos A, B, C y D son números reales o expresiones algebraicas. Aquí establecemos las reglas para desigualdades que contienen el símbolo $\leq$, pero se aplican a los cuatro símbolos de desigualdad.

Regla de desigualdades

1. $A \ \leq \ B \iff A + C \ \leq \ B + C$
2. $A \ \leq \ B \iff A - C \ \leq \ B - C$
3. Si $C > 0 \implies A \ \leq B \iff CA \ \leq \ CB$
4. Si $C < 0 \implies A \ \leq B \iff CA \ \geq \ CB$
5. Si $A > 0 \ y \ B > 0 \implies A \ \leq B \iff \frac{1}{A} \ \geq \ \frac{1}{B}$
6. Si $A \ \leq \ B \ y \ C \ \leq \ D \implies A + C \ \leq B + D$

Descripción:

1. **Sumar** la misma cantidad a cada miembro de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
2. **Restar** la misma cantidad de ambos miembros de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
3. **Multiplicar** cada miembro de una desigualdad por la misma cantidad positiva da una desigualdad equivalente.
4. **Multiplicar** cada miembro de una desigualdad por la misma cantidad negativa invierte la dirección de la desigualdad.
5. **Obtener los recíprocos** de ambos miembros de una desigualdad que contiene cantidades positivas invierte la dirección de la desigualdad.

6. Las desigualdades se pueden sumar.

Poné especial atención a las reglas 3 y 4. La regla 3 establece que podemos multiplicar (o dividir) cada miembro de una desigualdad por un número positivo, pero la regla 4 señala que si multiplicamos cada miembro de una desigualdad por un número negativo, entonces invertimos la dirección de la desigualdad. Por ejemplo, si empezamos con la desigualdad:

$$3 < 5$$

y multiplicamos por 2, obtenemos:

$$6 < 10$$

pero si multiplicamos por -2, tenemos:

$$-6 > -10$$

Veamos un ejemplo de una Inecuación:

Sea la desigualdad:

$$3x \;\leq\; 9x + 4$$

$Sustracción\;\; de\;\; 9x$

$$3x - 9x \;\leq\; 9x + 4 - 9x$$

$Simplificación$

$$-6x \;\leq\; 4$$

$Multiplicación\ por\ \dfrac{-1}{6}$

$$\left(\frac{-1}{6}\right)(-6x) \;\geq\; \left(-\frac{1}{6}(4)\right)$$

$Simplificación$

$$x \;\geq\; -\frac{2}{3}$$

El conjunto solución consta de todos los números mayores o iguales que $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $\left[\dfrac{-2}{3}, \infty\right)$.

Desigualdad con valores absolutos

Aplicamos las propiedades siguientes para resolver desigualdades que contienen valores absolutos.

Regla de desigualdades

1. $|x| < c \implies -c < x < c$
2. $|x| \leq c \implies -c \;\leq\; x \;\leq\; c$

3. $|x| > c \implies x < -c$ ó $c < x$

4. $|x| \geq c \implies x \geq -c$ ó $c \geq x$

Veamos un ejemplo,

$$|x - 5| < 2$$

Esta igualdad equivale a:

$$-2 < x - 5 < 2 \qquad \text{Propiedad } 1$$

$$3 < x < 7 \qquad \text{Suma de } 5$$

El conjunto solución es el intervalo abierto (3,7).

Como último ejemplo, resolvamos la siguiente desigualdad y encontremos el conjunto solución.

$$\frac{1}{x} < 1, \quad \forall\, x$$

Primero tenemos que descartar el 0 del conjunto solución; $x \neq 0$

- Si $x > 0$, entonces, $\frac{1}{x} < 1$

$$x \cdot \frac{1}{x} < 1 \cdot x$$
$$1 < x \Longrightarrow x > 1$$

$\therefore$ El conjunto solución son los x tales que $x > 1$.

- Si $x < 0$, entonces, $\frac{1}{x} < 1$ queda así:

$$x \cdot \frac{1}{x} > 1 \cdot x$$

El signo se invierte por que multiplicamos por x a ambos lados, siendo $x < 0$. Luego,

$$1 > x \Longrightarrow x < 1$$

$\therefore$ El conjunto solución son los x tales que $x < 1$.

$\therefore$ El conjunto solución total son los x tales que $x < 1$, $x > 1$ y $x \neq 0$, o sea, $-\infty < x < 0 \, \cup \, 0 < x < \infty$.

Veamos otro ejemplo,
Resolvamos la ecuación $|x - 2| > 3$ usando la definición de valor absoluto:

- Si $x - 2 \geq 0$, entonces, $x \geq 2$ y $x - 2 > 3$. Por lo tanto,

$$x > 3 + 2 \Longrightarrow x > 5$$

$\therefore$ El conjunto solución son los x tales que $x \geq 2$ y $x > 5$, o sea, los x tales que $x \in (5, \infty)$.

- Si $x - 2 < 0$, entonces, $x < 2$ y $-(x - 2) > 3$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -x + 2 &> 3 \\ -x &> 3 - 2 \\ -x &> 1 \\ x &< -1 \end{aligned}$$

El signo se invierte porque multiplicamos por -1 a ambos lados.

$\therefore$ El conjunto solución son los x tales que $x < 2$ y $x < -1$, o sea, los x tales que $x \in (-\infty, -1)$.

$\therefore$ Juntando todos los resultados concluímos que el conjunto solución total son los x tales que $x < -1$ ó $x > 5$, o sea, los x tales que $x \in -\infty < x < -1 \ \cup \ 5 < x < \infty$.

3.5. Resolución de Problemas

Problema 1: La mitad de la suma de un número y 2 es igual al triple de dicho número más 8/5. Calcúlalo.

Lo primero que hay que hacer para resolver este tipo de problemas es asegurarse de haber entendido bien el enunciado. Una vez que entendimos qué es lo que hay que hacer, tenemos que escribir el problema en lenguaje matemático, es decir, escribir las ecuaciones que representan la situación que se plantea, es importante definir qué significa/representa cada variable que se introduce.

En este caso debemos encontrar un número, que lo llamaremos x (para no perder la originalidad). Desmenucemos el enunciado para poder escribir la ecuación:

$$\overbrace{\frac{1}{2}\underbrace{(x + 2)}_{\text{suma de un número y 2}}}^{\text{La mitad de la suma de un número y 2}} \overbrace{=}^{\text{es igual a}} \overbrace{\underbrace{3\,x}_{\text{triple de dicho número}} + \frac{8}{5}}^{\text{el triple de dicho número más 8/5}}$$

Ahora para encontrar el número hay que resolver la ecuación.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x + 2) &= 3x + \frac{8}{5} \\
\frac{1}{2}x + 1 &= 3x + \frac{8}{5} \\
\frac{1}{2}x - 3x &= \frac{8}{5} - 1 \\
\frac{-5}{2}x &= \frac{3}{5} \\
x &= \frac{3}{5}\,\frac{2}{-5} = -\frac{6}{25}
\end{aligned}$$

De este modo, el número buscado es el $-\frac{6}{25}$.

Problema 2: La edad de un padre es el doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era el triple de la suma de las edades, en aquel tiempo, de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años. ¿Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?

Sí, estoy de acuerdo, este problema es un trabalenguas. Pero si leemos cuidadosamente el enunciado, vamos a poder resolverlo.

El problema habla de la edades de tres personas: un padre y sus dos hijos. En este tipo de problemas, lo que suele ser más cómodo es que las incógnitas sean las edades actuales. Siguiendo esta idea, **llamaremos P, H_1 y H_2 a las edades actuales del padre y de sus dos hijos, respectivamente**. Implícitamente sabemos que la edad del padre es mayor que la de sus hijos y, en principio, los hijos no son gemelos ni mellizos, por lo que uno será mayor que el otro. Por lo tanto $P > H_1 > H_2$. **Es muy importante definir las incógnitas antes de plantear las ecuaciones**, porque las ecuaciones pueden variar dependiendo de las incógnitas elegidas.

Ahora, para ir planteando las ecuaciones del problema analicemos el enunciado.

Entonces, comencemos a leer el problema:

- "*La edad de un padre es el doble de la suma de las edades de sus dos hijos...*"

  De acuerdo a nuestras variables, esta ecuación es bastante sencilla de plantear.

  $$P = 2(H_1 + H_2) \tag{3.17}$$

- "*...hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era el triple de la suma de las edades, en aquel tiempo, de sus hijos.*"

  Esta parte se complica un poco. Veamos. "*...la diferencia de las edades actuales de los hijos..* " no es otra cosa que $H_1 - H_2$.

Ahora "*...hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era ...*". Esto significa que a la edad actual del padre hay que restarle la diferencia de las edades actuales de los hijos, de este modo obtenemos la edad que tenía el padre en "*...aquel tiempo...*", esto es, $P - (H_1 - H_2)$.

Por otro lado sabemos que el tiempo pasa de la misma manera para todos (a menos que alguien haya descubierto el secreto de la juventud eterna), por lo tanto las edades de los hijos "*...en aquel tiempo...* " eran $H_1 - (H_1 - H_2)$ y $H_2 - (H_1 - H_2)$, respectivamente.

Retomemos la frase completa: "*...hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era el triple de la suma de las edades, en aquel tiempo, de sus hijos.* ". Por lo tanto, la ecuación que le corresponde será la siguiente

$$P - (H_1 - H_2) = 3\{[H_1 - (H_1 - H_2)] + [H_2 - (H_1 - H_2)]\}$$

Sacando los paréntesis la ecuación se reduce a

$$P - H_1 + H_2 = 3(3H_2 - H_1) \tag{3.18}$$

- "*Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años.*"

Esta parte es parecida a la anterior. "*...tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos*" es igual a $H_1 + H_2$. Como esta cantidad de años pasa para todos, en ese momento las edades que tendrán serán: $P + (H_1 + H_2)$, $H_1 + (H_1 + H_2)$ y $H_2 + (H_1 + H_2)$ para el padre y sus dos hijos, respectivamente. Entonces, si en ese momento la suma de las tres edades es igual a 150 años, la relación que tendremos es:

$$[P + (H_1 + H_2)] + [H_1 + (H_1 + H_2)] + [H_2 + (H_1 + H_2)] = 150$$

Sumando los términos semejantes resulta que:

$$P + 4H_1 + 4H_2 = 150 \tag{3.19}$$

De este modo, para hallar las edades de las tres personas hay que resolver el sistema formado por las ecuaciones 3.17, 3.18 y 3.19:

$$\begin{cases} P = 2(H_1 + H_2) & (a) \\ P - H_1 + H_2 = 3(3H_2 - H_1) & (b) \\ P + 4H_1 + 4H_2 = 150 & (c) \end{cases} \tag{3.20}$$

Para hallar el valor de P reemplazamos la ecuación 3.20 (a) en la 3.20 (c):

$$\begin{aligned} P + 4H_1 + 4H_2 &= 150 \\ P + 2\left[2\left(H_1 + H_2\right)\right] &= 150 \\ P + 2P &= 150 \\ 3P &= 150 \\ P &= \frac{150}{3} = 50 \end{aligned}$$

De la primera ecuación tenemos que $H_1 = \frac{1}{2}P - H_2$. Reemplazando esto y que $P = 50$ en la ecuación 3.20 (b) encontramos el valor de H_2:

$$\begin{aligned} P - H_1 + H_2 &= 3\left(3H_2 - H_1\right) \\ P - H_1 + 3H_1 &= 9H_2 - H_2 \\ P &= 8H_2 - 2H_1 \\ P &= 8H_2 - 2\left(\frac{1}{2}P - H_2\right) \\ P + P &= 8H_2 + 2H_2 \\ 2P &= 10H_2 \\ H_2 &= \frac{1}{5}P = 10 \end{aligned}$$

Finalmente como $P = 50$ y $H_2 = 10$, resulta que:

$$H_1 = \frac{1}{2}P - H_2 = \frac{1}{2}50 - 10 = 15$$

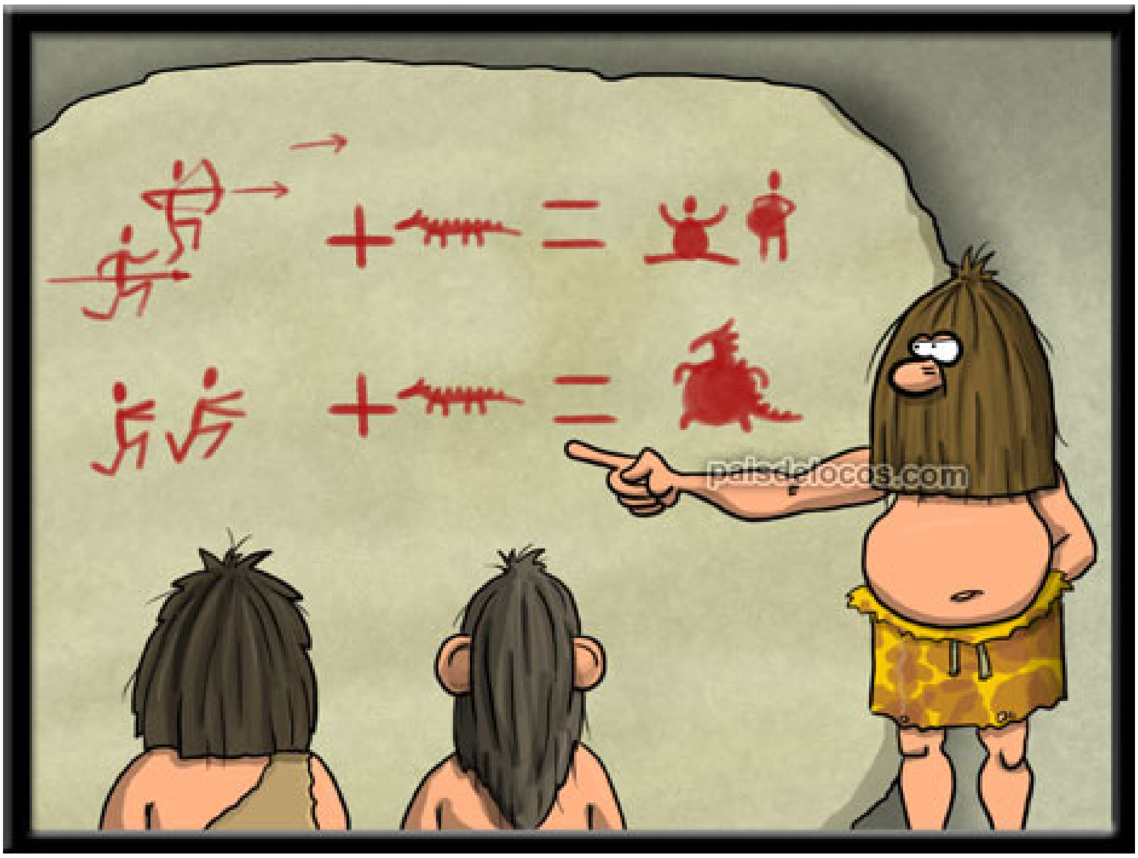
Hemos encontrado las edades actuales de las tres personas: el padre tiene 50 años, el hijo mayor tiene 15 años y el menor tiene 10 años. Sin embargo esta no es la respuesta al problema, por que lo que se pregunta es "*¿Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?*".

Respuesta: cuando nació el primer hijo, el padre tenía 35 años, mientras que cuando nació el segundo tenía 40 años.

Y de esta manera el ejercicio queda terminado.

Lectura complementaria

Otros métodos de resolución de sistemas de ecuaciones



Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Otros métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

En el capítulo de ecuaciones mencionamos que además del método de sustitución existen dos métodos más: igualación y reducción por sumas y/o restas. Para ejemplificar cómo utilizar los distintos métodos vamos a resolver el mismo sistema de ecuaciones que ya hemos resuelto por sustitución en dicho capítulo.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\,r - p & = & 6 \\ 2\,r - 3\,p & = & 2 \end{array} \right.$$

Igualación

Este método consiste en igualar dos expresiones para obtener una ecuación con una incógnita. En este ejemplo podemos despejar p de ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} 2\,r - p = 6 & \Longrightarrow & p = 2\,r - 6 \\ 2\,r - 3\,p = 2 & \Longrightarrow & p = \dfrac{2 - 2\,r}{-3} = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}\,r \end{array}$$

Luego, como ambas expresiones son iguales a p, deben ser iguales, entonces,

$$2\,r - 6 = \frac{2}{3}\,r - \frac{2}{3}$$

Así conseguimos una ecuación con una incógnita de la que podemos hallar el valor de r

$$\begin{array}{rcl} 2\,r - 6 & = & \dfrac{2}{3}\,r - \dfrac{2}{3} \\ 2\,r - \dfrac{2}{3}\,r & = & 6 - \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{4}{3}\,r & = & \dfrac{16}{3} \\ r & = & \dfrac{\cancelto{4}{16}}{\cancel{3}}\,\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{4}} = 4 \end{array}$$

Finalmente, este valor de r lo reemplazamos en cualquiera de las dos expresiones de p, por ejemplo $p = 2r - 6$

$$p = 2\,.\,4 - 6 = 2$$

Así la solución del sistema es $p = 2$ y $r = 4$.

Reducción por sumas y/o restas

Aquí la idea es operar con las ecuaciones, es decir sumarlas o restarlas entre ellas, para eliminar alguna variable y así facilitar la resolución del problema. En este ejemplo, el sistema es:

$$\begin{cases} 2\,r - p &= 6 \\ 2\,r - 3\,p &= 2 \end{cases}$$

Aquí podemos ver que el término $2\,r$ aparece sumando en ambas ecuaciones. Entonces si restamos las ecuaciones, este término se cancela y obtenemos una ecuación para p. Para restar (o sumar dos ecuaciones) se hace miembro a miembro, esto es:

$$\begin{aligned} (2\,r - p) \,-\, (2\,r - 3\,p) &= 6 - 2 \\ \cancel{2r} - p - \cancel{2r} + 3\,p &= 4 \\ 2\,p &= 4 \\ p &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Para hallar r podemos multiplicar la primera ecuación por -3 (a ambos lados del igual) y luego sumar las ecuaciones.

$$\begin{aligned} -3\,(2\,r - p) \,+\, (2\,r - 3\,p) &= -3\,.\,6 + 2 \\ -6\,r + \cancel{3p} + 2\,r - \cancel{3p} &= -18 + 2 \\ -4\,r &= -16 \\ r &= \frac{-16}{-4} = 4 \end{aligned}$$

De este modo, el sistema tiene como solución los valores $r = 4$ y $p = 2$ y es única.

Es MUY aconsejable acostumbrarse a este método porque es muy utilizado (les va a ser muy útil en álgebra).

Es importante ver que no importa el método elegido para resolver el sistema, siempre se llega a la misma solución.

Práctica 3

1. Resuelve las siguientes ecuaciones.

   a) $|x - 5| = 8$

   b) $5\,h = |3 - h|$

2. Determina la naturaleza de las raíces sin resolver la ecuación. Cuando hablamos de la naturaleza de las raíces nos referimos a tres tipos: dos raíces reales distintas, dos raíces reales iguales o que no existen en reales.

   a) $-(1 - 2\,x^2) = x$

   b) $9\,z^2 - 6\,z - 17 = 0$

   c) $9 = 4\,w\,(1 - w)$

   d) $17\,y^2 = 0$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

   a) $5\,x^2 + 2\,x - 3 = 0$

   b) $3\,x^2 - 12 = 0$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $y^4 - 1 = 0$

   b) $\dfrac{1}{2}\,x^4 + 2 + x^3 - 3\,x^2 = 2\,x^2 - \dfrac{1}{2}\,x^4 + \dfrac{1}{4}\,x^3 - 2 + \dfrac{6}{8}\,x^3$

5. Resuelve los siguientes sistemas y clasifícalos.

$$a)\ \begin{cases} w = 2\,(v - w) + 1 \\ \dfrac{w - 2\,v}{2} = 1 - w \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} a + b - c = 1 \\ 3\,c - 4\,a - b = -1 \\ 8\,a + 3\,b - 6\,c = 0 \end{cases}$$

6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y = 4x - x^2 + 8 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} y - 2 = x^2 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

7. Resuelve los siguientes sistemas y clasifícalos.

a) $\begin{cases} 2\left(x - \dfrac{y}{2}\right) = x + y \\ y = \dfrac{2}{3}x + 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -5x + 5y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(x - 3y) = 5 - 3(2y - 1) \\ \dfrac{y}{2} = \dfrac{x + 2y}{4} + 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} w = 3z + 1 \\ w - 7 = -z^2 + 2z \end{cases}$

f) $\begin{cases} b - a^2 = 4 \\ 4a + b = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3\,x - y + z = 3 \\ -z + 2\,x = 2 - y \\ 5\,z - 5 = y - x \end{cases}$

h) $\begin{cases} n - 1 = m + p \\ 2\,m - 1 = p - n \\ m + 2\,n = 2\,p \end{cases}$

8. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   a) $\dfrac{x - 2}{x^2 - 3\,x} + \dfrac{19\,x}{x^2} = \dfrac{-4\,x^2 + 3\,x - 9}{x^2 - 3\,x}$

   b) $\left(\dfrac{3\,x - 3}{x^2 - 2\,x + 1}\right)\left(\dfrac{x - 1}{x + 2}\right) = \dfrac{5\,x + 2}{10\,x + 4} : \dfrac{1}{2\,x}$

9. Halla, cuando sea posible, los valores de la incógnita que verifiquen las siguientes igualdades justificando tu respuesta.

   a) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-1} - \dfrac{3}{2}\,x = \sqrt[3]{-\dfrac{8}{125}}$

   b) $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{2} \div (-2) = \dfrac{1}{4}\,x$

   c) $0.3\,x \div 0.2 - 0.1\,x\,(-16) = \sqrt{1.69} + 0.5^2$

   d) $(x - 3)\,(x^2 + 1) = (x - 1)^3$

   e) $|2\,x + 4| = 2$

   f) $|2\,x + 1| = 3$

   g) $|3\,x| = |x| - 1$

   h) $6\,x^2 - 5\,x + 1 = 0$

   i) $2\,(1 - k) + (k - 1)^2 = 2\,k$

   j) $\dfrac{6}{m} - \dfrac{9}{m^2} - 1 = 0$

   k) $\dfrac{1}{t - 1} + \dfrac{2}{t + 1} = \dfrac{t^2 - 5}{t^2 - 1}$

l) $\dfrac{h^2 - 4}{h^2 + 10 - 7h} = \dfrac{\frac{1}{2}}{h - 2}$

m) $\dfrac{y^2}{y^2 - 4} - \dfrac{y + 2}{y^3 - 2y^2} = \dfrac{2}{y^2 + 2y}$

n) $\dfrac{2x + 1}{x + 3} = 1 + \dfrac{x + 3}{x - 1}$

ñ) $\dfrac{a + 4}{a - 4} - \dfrac{a - 4}{a + 4} = \dfrac{(2a)^2}{a^2 - 16}$

o) $\dfrac{-1 + r^2 - 2r}{-(1 - r^2)} = \dfrac{2}{r + 1}$

p) $x^4 - 2x^2 = 4 + x^2$

q) $2(a^4 - 1) = 3a^2$

10. Plantea y resuelve.

a) Ecuaciones:

1) Halle los números reales que verifiquen que el doble de su cuadrado más la mitad de su triple es igual a 0.
2) Si el cuadrado de un número es igual al opuesto de ese mismo número, ¿de qué números hablamos?
3) El cuádruplo de la diferencia entre un número y 1, menos la mitad de la suma entre dicho número y tres es $-2,7$. Calcúlalo.
4) El producto entre un número y su anterior es igual a 12. Encuentra dicho número natural.
5) Encuentra el número más chico que satisface que la suma entre su cuarta potencia y 4 es 5 veces su cuadrado.
6) El opuesto de la suma de un número y 2 es igual al doble de la suma entre dicho número y su cuadrado. Encuentra el número en cuestión.

b) Sistemas de 2 ecuaciones:

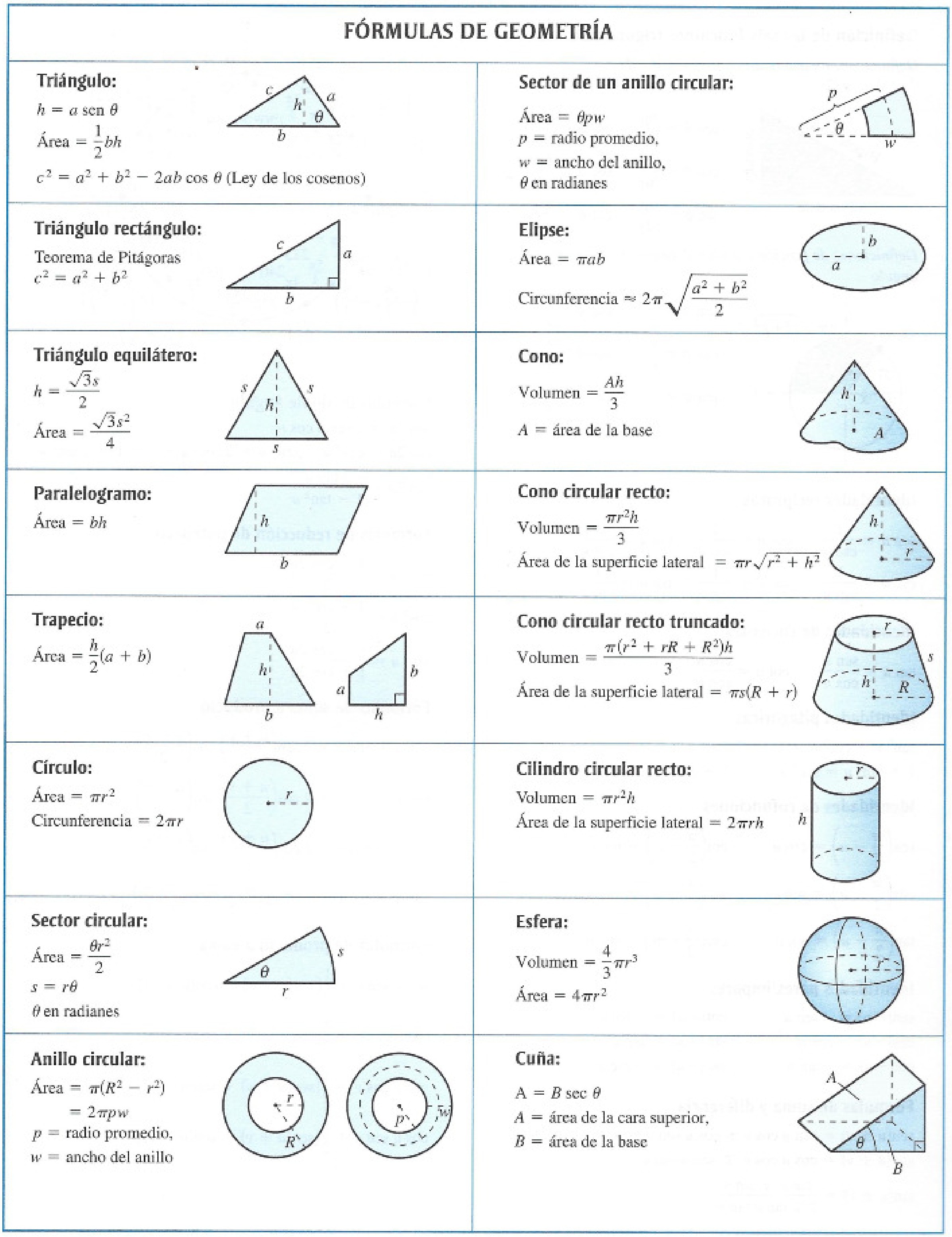
1) El perímetro de un rectángulo es el triple de su base y la base mide 3 m más que la altura. ¿Cuál es la medida de la base y la altura?
2) Encuentra dos números sabiendo que su promedio es doce y su diferencia ocho.
3) En una heladera hay 22 latas de gaseosa, unas de 1/3 l, y otras de 1/5 l. En total contienen 6 litros. ¿Cuántas latas de cada capacidad hay?
4) Si en una fracción desconocida se suma 2 al numerador, el valor de la fracción queda igual a 1/2. Por el contrario, si se suma 1 al denominador, queda 1/3. Halla la fracción.

5) De un terreno rectangular de 340 m de contorno, el municipio ha expropiado una banda de 15 m de ancho en el frente. En compensación, ha cedido al terreno otra banda de 10 m de ancho en un lateral. Con todo, el terreno cuenta ahora con 200 m^2 menos de superficie que antes. ¿Cuáles eran sus dimensiones originales?
6) Halle las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su altura es 3 cm mayor que su base y que su superficie es 70 cm^2.
7) Se tienen dos cortes de tela. La longitud de uno de ellos es 8 metros menor que la del otro. Si se multiplican las longitudes de ambos cortes, el resultado es de 20 m^2. ¿Cuál es la longitud del corte más largo?
8) Un alumno realiza un examen tipo "test" que consta de 20 preguntas. Cada acierto supone 0.5 puntos y por cada respuesta errada o no respondida se restan 0.25 puntos. Calcula el número de aciertos si obtuvo al final 7 puntos.
9) Un comerciante mezcla café de Colombia con café de Brasil para obtener una calidad intermedia. Si los mezcla en proporciones 2 a 3 (por cada 2 kg. de Colombia se añaden 3 kg. de Brasil), la mezcla resulta a 35.40 \$/kg, mientras que con la proporción 2 a 1, el precio sería 25.00 \$/Kg. ¿Cuál es el precio del kilogramo de cada clase de café?
10) El 40 % de los estudiantes de 1° A son varones, y la cuarta parte de los de 1° B son mujeres. En total son 33 chicos y 25 chicas. ¿Cuántos alumnos tiene cada grupo?
11) Los lados de un rectángulo son dos números consecutivos. Hallar la longitud de ambos lados si la superficie del rectángulo es igual a 2 m^2.
12) Un comerciante compra un corte de tela de 60 m a \$300. Vende una cierta parte a \$6 el metro, y el resto a \$10 el metro. Si la ganancia fue de \$100, ¿cuánto mide cada una de las partes?

c) Sistemas de 3 ecuaciones

1) En un grupo de 69 estrellas las hay de tres clases: las B, las A y las F. Calcular el número de estrellas tipo B sabiendo que las estrellas F son el doble que las de tipo A, y que las B son una menos que la mitad de las de tipo A.
2) Las medidas en centímetros de la hipotenusa y el cateto mayor de un triángulo rectángulo son números naturales consecutivos. Al cateto menor le faltan 7 cm para igualar al mayor. ¿Cuánto miden los tres lados?
3) Hace 16 años, Érika tenía 2/3 de la edad que tenía Damián. Por otra parte, hace 43 años, Damián tenía el triple de la edad de Mónica. Si dentro de 8 años la edad de Érika será la que actualmente tiene Mónica, hallar la edad de los tres.
4) Entre Batman, Superman y Flash han ahorrado \$100. Como Batman necesita reparar su batimóvil, Superman le presta \$20, quedando en ese momento ambos con el mismo dinero. Flash, por su parte, gasta \$10 en botas nuevas, quedándose con un monto igual a la mitad del dinero original que tenían Batman y Superman juntos. Calcular la cantidad de dinero que cada superhéroe tenía al comienzo.

5) Si Harry le prestara su libro de Pociones a Ron, ambos tendrían la misma cantidad de libros. Por otra parte, Hermione tiene un libro más que los de Harry y Ron juntos. Hallar la cantidad de libros que tiene cada uno, sabiendo que el total de libros que tienen entre los tres es 13.
6) La edad de Agustina es un quinto de la edad de Nadia. Las edades de ambas, sumadas, dan la edad de Margot. Hace cinco años, la edad de Nadia era nueve veces más grande que la de Agustina. Hallar la edad actual de las tres.



FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

Triángulo:

$h = a \operatorname{sen} \theta$

Área $= \frac{1}{2}bh$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ (Ley de los cosenos)

Sector de un anillo circular:

Área $= \theta p w$

p = radio promedio,

w = ancho del anillo,

θ en radianes

Triángulo rectángulo:

Teorema de Pitágoras

$c^2 = a^2 + b^2$

Elipse:

Área $= \pi ab$

Circunferencia $\approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Triángulo equilátero:

$h = \frac{\sqrt{3}s}{2}$

Área $= \frac{\sqrt{3}s^2}{4}$

Cono:

Volumen $= \frac{Ah}{3}$

A = área de la base

Paralelogramo:

Área $= bh$

Cono circular recto:

Volumen $= \frac{\pi r^2 h}{3}$

Área de la superficie lateral $= \pi r\sqrt{r^2+h^2}$

Trapecio:

Área $= \frac{h}{2}(a+b)$

Cono circular recto truncado:

Volumen $= \frac{\pi(r^2 + rR + R^2)h}{3}$

Área de la superficie lateral $= \pi s(R+r)$

Círculo:

Área $= \pi r^2$

Circunferencia $= 2\pi r$

Cilindro circular recto:

Volumen $= \pi r^2 h$

Área de la superficie lateral $= 2\pi rh$

Sector circular:

Área $= \frac{\theta r^2}{2}$

$s = r\theta$

θ en radianes

Esfera:

Volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$

Área $= 4\pi r^2$

Anillo circular:

Área $= \pi(R^2 - r^2)$

$= 2\pi p w$

p = radio promedio,

w = ancho del anillo

Cuña:

$A = B\sec\theta$

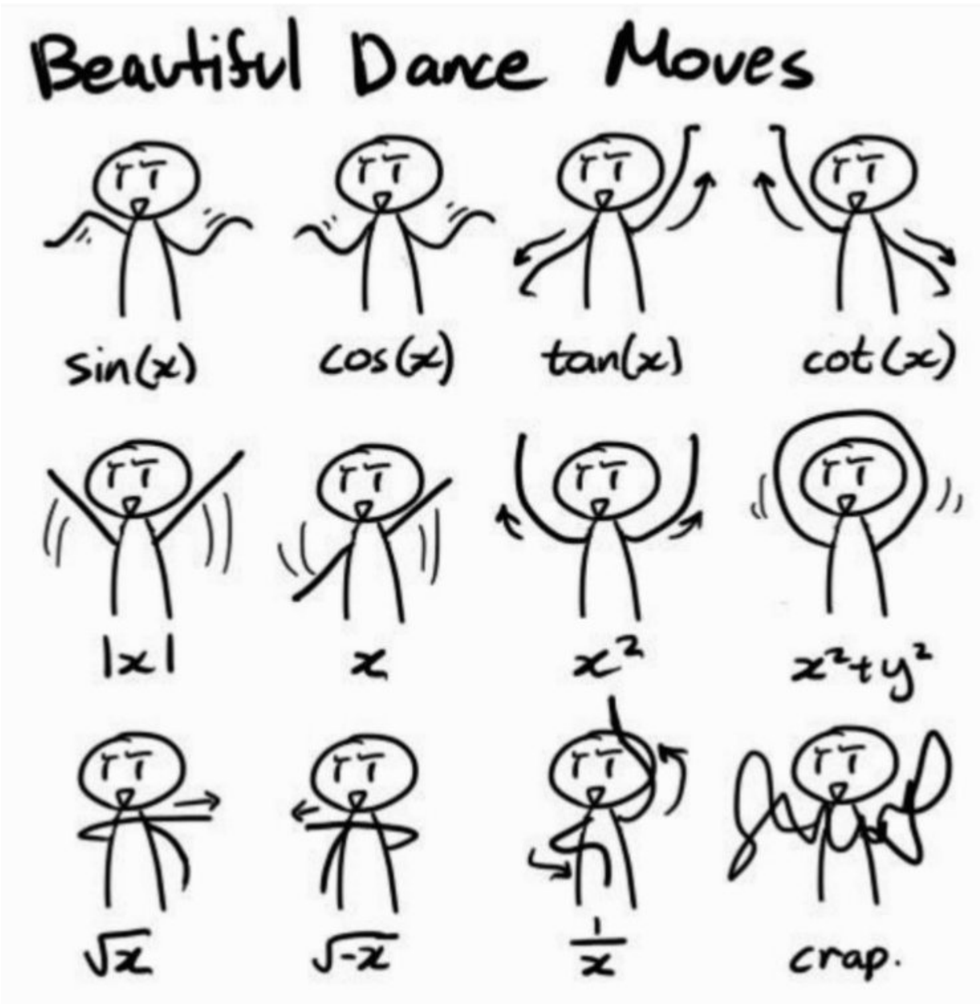
A = área de la cara superior,

B = área de la base

Figura 3.1. Anexo de fórmulas útiles - Precálculo, Larson 2011

Capítulo 4

Funciones



Facultad de Ciencias
Astronómicas
y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Capítulo 4

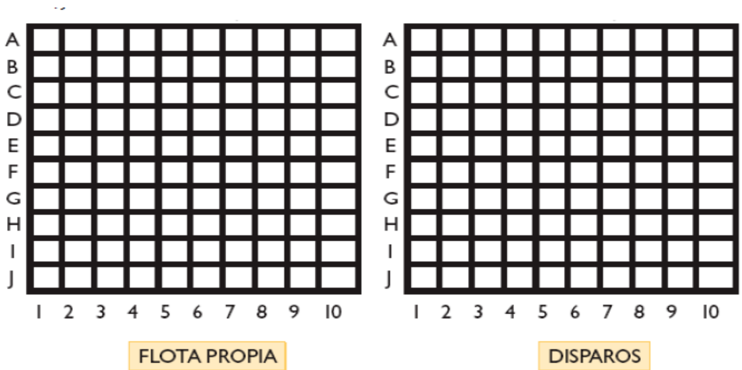
Funciones

Las funciones describen cómo se relacionan los elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto. Para poder dar una definición más formal de las funciones primero tenemos que mencionar los conceptos de par ordenado, producto cartesiano y aplicación.

Par ordenado: Esta idea la introduciremos a partir del juego de la batalla naval.

Este es un juego de estrategia en el que participan dos jugadores. Se juega con lápiz y papel.

Antes de comenzar el juego, cada participante tendrá dos tableros cuadrados de 10×10 casillas. Las filas horizontales se numeran de la A hasta la J, y las columnas verticales del 1 al 10. Basta con indicar las coordenadas de un disparo con un par número/letra (por ejemplo, 6 ; A ó 9 ; J).



En el cuadrado de la izquierda se coloca la flota propia. En el cuadrado de la derecha se irán marcando los disparos que el jugador efectúa en el mar del contrincante: indicando los barcos tocados, hundidos y disparos al agua.

Cada jugador dispone en su tablero izquierdo una flota completa, sin que el contrincante vea su posición. Los barcos no pueden tocarse entre sí, es decir, que todo barco debe estar rodeado de agua o tocar un borde del tablero. La flota esta formada por:

- 1 portaaviones (de cuatro cuadraditos);
- 2 acorazados (de tres cuadraditos);

- 3 buques (de dos cuadraditos);
- 4 submarinos (de un cuadradito).

La mecánica del juego es la siguiente:

- El turno pasa alternativamente de un jugador a otro.
- En su turno, el jugador hace un disparo a una posición del mar enemigo, indicando la coordenada correspondiente (cifra y letra). Si no hay barcos en ese cuadradito, el otro jugador dice: "¡agua!"; si el disparo ha dado en algún barco dice: "¡tocado!"; si con dicho disparo el rival logra completar todas las posiciones del barco, debe decir "¡hundido!".
- Gana el jugador que consigue hundir primero todos los barcos del rival.

Algunos ejemplos de ubicación de los componentes de la flota podrían ser:

Submarino (ocupa un casillero): (2 ;D)

Buque (ocupa dos casilleros): (4 ;E), (5; E)

Acorazado (ocupa tres casilleros): (6; A), (6; B), (6; C)

Portaaviones (ocupa cinco casilleros): (1; G), (2; G), (3; G), (4; G), (5; G)

Estos disparos, que indican una posición en el mar, son pares ordenados. Se llama **par ordenado** a dos elementos con un cierto orden y se simboliza como:

$$(x, y)$$

Si se invierte el orden de los elementos obtenemos un par ordenado diferente, esto es:

$$(x, y) \neq (y, x)$$

Producto cartesiano: sean dos conjuntos A y B. Se llama producto cartesiano, $A \times B$, al conjunto de pares ordenados tales que el primer elemento pertenece al conjunto A y el segundo pertenece a B. En símbolos es:

$$A \times B = \{(x, y) \,/\, x \in A \text{ y } y \in B\}$$

Ejemplo: *Siguiendo con el juego de la batalla naval, los conjuntos pueden ser* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *y* $B = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$*. Entonces, el producto cartesiano entre* A *y* B *da las coordenadas de las cien posibilidades de tiro.*

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, A); (1, B); (1, C); \ldots; (1, J); (2, A); \ldots; (2, J); \\ &\quad (3, A); \ldots; (3, J); \ldots; (10, A); \ldots; (10, J)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 = A \times A &= \{(1, 1); (1, 2); \ldots; (1, 10); (2, 1); (2, 2); \ldots; \\ &\quad (2, 10); \ldots; (10, 1); \ldots; (10, 10)\} \end{aligned}$$

4.1. Aplicaciones

Una aplicación $\mathcal{A}$ que relaciona los elementos del conjunto A con los del conjunto B, que se escribe $\mathcal{A}: A \to B$, es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ (por lo que una aplicación es un conjunto de pares ordenados). Si existe una "regla" o vínculo, $\mathcal{R}$, que permita determinar qué pares ordenados del producto cartesiano son los que pertenecen a la aplicación (o sea, que están relacionados según $\mathcal{R}$), entonces se puede escribir:

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \,/\, x \in A \ \text{ y } \ y \in B, \mathcal{R}(x, y)\}$$

Esto se lee: "La aplicación $\mathcal{A}$ es el conjunto que está formado por todos los pares ordenados tales que el primer elemento pertenece al conjunto A, el segundo pertenece a B y satisfacen la relación $\mathcal{R}$."

El conjunto al cual pertenece el primer elemento del par ordenado se llama **conjunto de partida** (en este caso el conjunto A), mientras que al conjunto al cual pertenece el segundo elemento del par ordenado se lo llama **conjunto de llegada** (en este caso el conjunto B). Si el conjunto de partida es igual al de llegada, $A = B$, se dice que la aplicación es una "relación".

Ejemplo 1: *Tomemos los conjuntos A y B de la batalla naval:* $A = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 10\}$ *y* $B = \{y \,/\,$ es una de las primeras diez letras del abecedario$\}$. *Consideremos que estos conjuntos están relacionados por la regla* $\mathcal{R}(x, y) =$ "x es la posición en el abecedario de y".

La aplicación $\mathcal{A} = \{(x, y) \,/\, x \in A, y \in B, \mathcal{R}(x, y)\}$ *la podemos representar de cuatro formas equivalentes:*

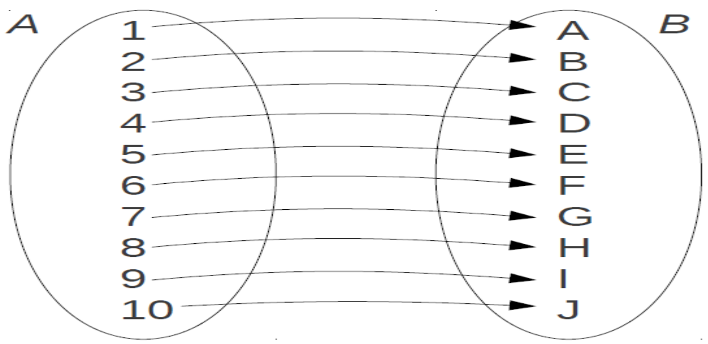
1. *Por comprensión:*

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \,/\, x \in A,\ y \in B\, \text{y "}x\, \text{es la posicion en el abecedario de}\, y\text{"}\}$$

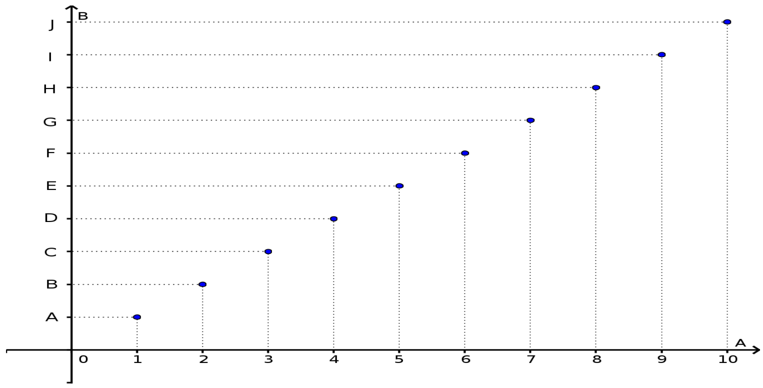
2. *Por extensión:*

$$\mathcal{A} = \{(1, A); (2, B); (3, C); (4, D); (5, E); (6, F); (7, G); (8, H); (9, I); (10, J)\}$$

3. *Con diagramas de Venn:*



4. *Con un gráfico:*

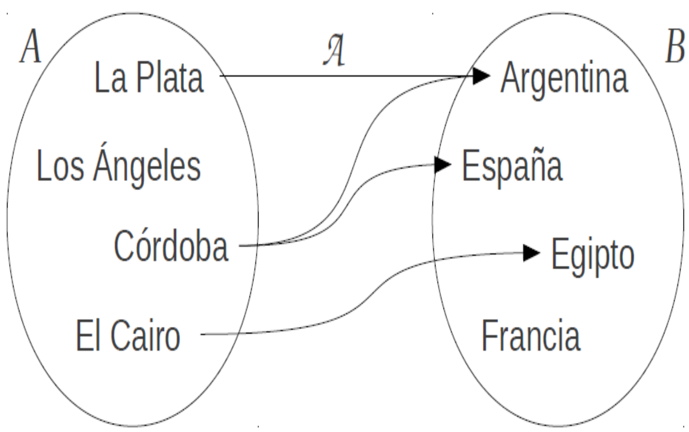


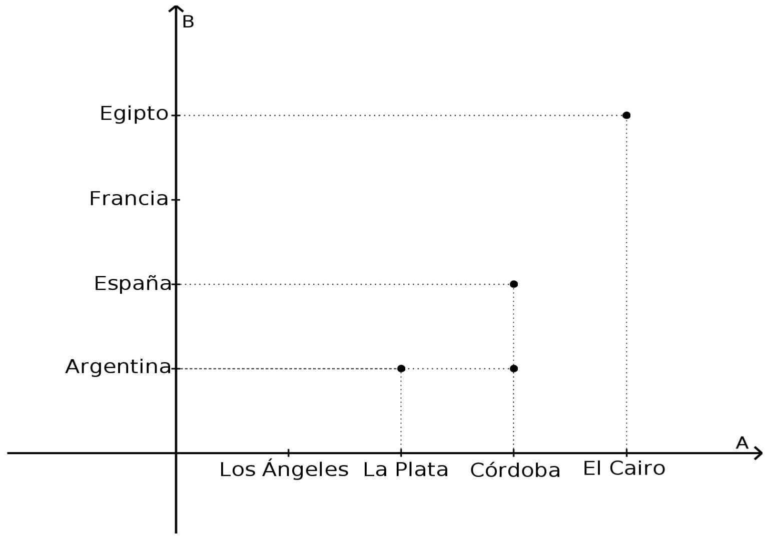
Notar que la aplicación $\mathcal{A}$ está representada por los puntos del gráfico y no por la recta que une esos puntos.

Ejemplo 2: *Sea una aplicación* $\mathcal{A}: A \to B$ *donde los conjuntos* $A = \{$Los Ángeles, La Plata, Córdoba, El Cairo$\}$ *y* $B = \{$Argentina, España, Egipto, Francia$\}$ *están relacionados por la regla* $\mathcal{R}(x, y) =$ "x es una ciudad de y".

La aplicación $\mathcal{A}$ *será:*

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \{(x, y)\,/\,x \in A,\ y \in B\,\text{y "}x\,\text{es una ciudad de}\,y\text{"}\}\\ &= \{(\text{La Plata, Argentina}); (\text{Córdoba, Argentina}); (\text{El Cairo, Egipto}); (\text{Córdoba, España})\}\end{aligned}$$





Ejemplo 3: *Sean los conjuntos:*

$$A = \{x \,/\, 1 < x < 6,\ x \in \mathbb{N}\} = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{x \,/\, 5 < x < 9,\ x \in \mathbb{N}\} = \{6, 7, 8\}$$

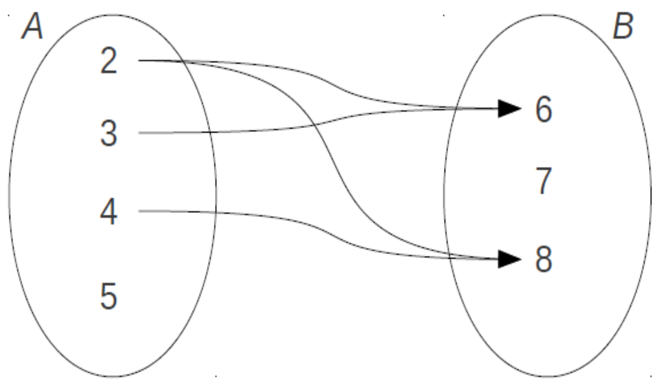
y la regla $\mathcal{R}(x, y) =$ "x es divisor de y".

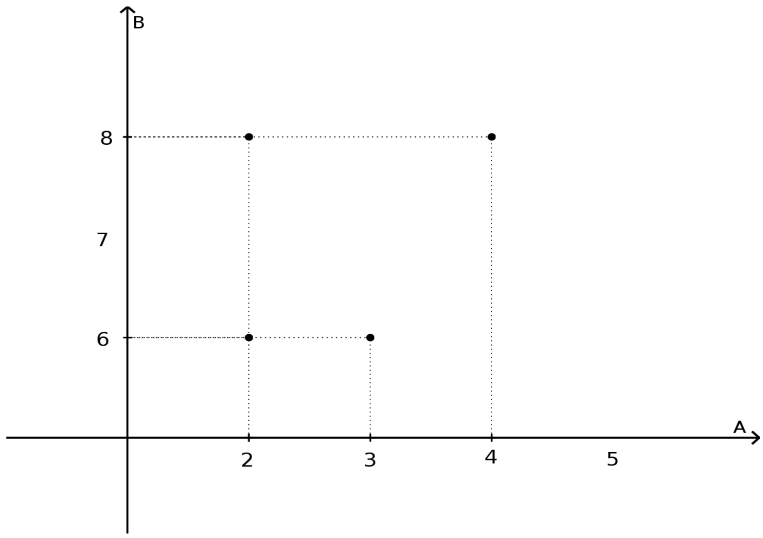
El producto cartesiano $A \times B$ *es:*

$$A \times B = \{(2,6); (2,7); (2,8); (3,6); (3,7); (3,8); (4,6); (4,7); (4,8); (5,6); (5,7); (5,8)\}$$

La aplicación $\mathcal{A}:\ A \to B$ *dada por la regla* $\mathcal{R}(x, y)$ *es:*

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \,/\, x \in A,\ y \in B,\ \text{“}x\,\text{es divisor de}\,y\text{”}\} = \{(2,6); (2,8); (3,6); (4,8)\}$$





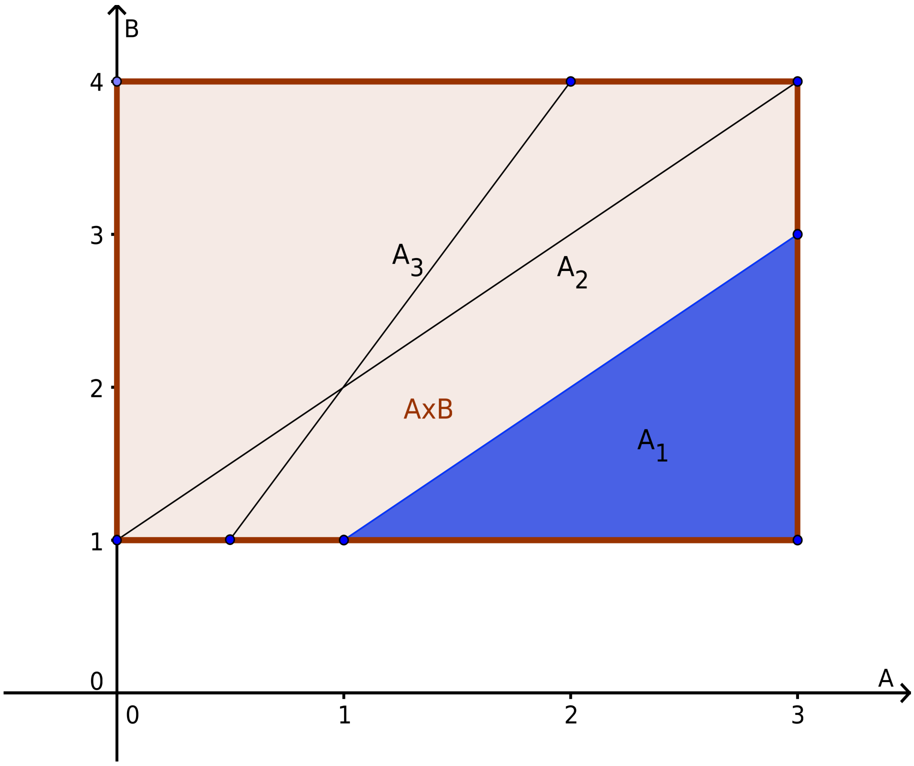
Ejemplo 4: *Sean los conjuntos:*

$$A = \{x \,/\, x \in \mathbb{R},\, 0 \leq x \leq 3\}$$
$$B = \{x \,/\, x \in \mathbb{R},\, 1 \leq x \leq 4\}$$

Y sean las aplicaciones:

$$\mathcal{A}_1 = \{(x, y) \,/\, x \in A,\, y \in B,\, x \geq y\}$$
$$\mathcal{A}_2 = \{(x, y) \,/\, x \in A,\, y \in B,\, x + 1 = y\}$$
$$\mathcal{A}_3 = \{(x, y) \,/\, x \in A,\, y \in B,\, x = y/2\}$$

Las gráficas de las aplicaciones son:



El área total del rectángulo corresponde al producto cartesiano $A \times B$. El área del triángulo corresponde a la aplicación A_1. La diagonal del rectángulo es la recta correspondiente a A_2. Finalmente, la otra recta corresponde a A_3.

4.1.1. Aplicación inversa

Dada una aplicación $\mathcal{A}$, llamamos aplicación inversa, $\mathcal{A}^{-1}$, al conjunto de pares ordenados que resultan de invertir el orden de los elementos de los pares de $\mathcal{A}$, $(y, x) \in \mathcal{A}^{-1} \iff (x, y) \in \mathcal{A}$ en lenguaje matemático. De aquí que si $\mathcal{A} : A \to B$ entonces $\mathcal{A}^{-1} : B \to A$.

Ejemplo: *Sean los conjuntos:*

$$\begin{array}{l} A = \{x \,/\, x \in \mathbb{N},\, 1 < x < 6\} \\ B = \{x \,/\, x \in \mathbb{N},\, 5 < x < 9\} \end{array}$$

Y sea la aplicación:

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \,/\, x \in A,\ y \in B,\ \text{“}x\,\text{es divisor de}\,y\text{”}\} = \{(2,6); (2,8); (3,6); (4,8)\}$$

La aplicación inversa será:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}^{-1} & = & \{(6,2); (8,2); (6,3); (8,4)\} \\ & = & \{(x, y) \,/\, x \in B,\ y \in A,\ \text{“}x\,\text{es múltiplo de}\,y\text{”}\} \\ & = & \{(y, x) \,/\, y \in B,\ x \in A,\ \text{“}y\,\text{es múltiplo de}\,x\text{”}\} \\ & = & \{(y, x) \,/\, y \in B,\ x \in A,\ \text{“}x\,\text{es divisor de}\,y\text{”}\} \end{array}$$

4.2. Funciones

Las funciones son un tipo particular de aplicaciones. Una función se define de la siguiente manera:

Dados dos conjuntos A y B, una función de A en B, $f : A \to B$, es una aplicación $\mathcal{A} : A \to B$ tal que **para todo elemento de A existe uno y sólo un elemento de B que le corresponde.**

Es decir que todos los elementos del conjunto de partida deben estar relacionados con uno y sólo un elemento del conjunto de llegada. Por lo tanto ningún elemento de A puede relacionarse con dos o más elementos de B, pero B puede tener elementos que no estén relacionados con elementos de A. Una manera de verlo gráficamente es mediante diagramas de Venn: de CADA ELEMENTO del conjunto de partida (A) debe salir una y sólo una flecha hacia ALGÚN ELEMENTO del conjunto de llegada (B), sin importar a cual, para que la aplicación sea una función $f : A \to B$. Como ejemplo veamos qué aplicaciones de los ejemplos dados anteriormente cumplen con la definición de función.

Ejemplos: *Consideremos las aplicaciones dadas en los ejemplos anteriores y analicemos cuáles de ellas cumplen con la definición de función.*

- *Ejemplo 1:*

$$\begin{aligned} A &= \{x \,/\, x \in \mathbb{N},\ 1 \leq x \leq 10\} \\ B &= \{y \,/\, \text{es una de las primeras diez letras del abecedario}\} \\ \mathcal{A} &= \{(x,y) \,/\, x \in A,\ y \in B \text{ y "}x\text{ es la posición en el abecedario de }y\text{"}\} \end{aligned}$$

  Es función ya que todos los elementos de A están relacionados con un sólo elemento de B.

- *Ejemplo 2:*

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Los Angeles, La Plata, Córdoba, El Cairo}\} \\ B &= \{\text{Argentina, España, Egipto, Francia}\} \\ \mathcal{A} &= \{(x,y) \,/\, x \in A,\ y \in B,\ \text{"}x\text{ es una ciudad de }y\text{"}\} \end{aligned}$$

  No es función porque Los Ángeles *no está relacionado con ningún elemento y porque* Córdoba *está relacionados con dos elementos.*

- *Ejemplo 3:*

$$\begin{aligned} A &= \{x \,/\, x \in \mathbb{N},\ 1 < x < 6\} \\ B &= \{x \,/\, x \in \mathbb{N},\ 5 < x < 9\} \\ \mathcal{A} &= \{(x,y) \,/\, x \in A,\ y \in B,\ \text{"}x\text{ es divisor de }y\text{"}\} \end{aligned}$$

  No es función porque el 5 *no está relacionado y porque* 2 *está relacionado dos veces.*

- *Ejemplo 4:*

$$\begin{aligned} A &= \{x \,/\, x \in \mathbb{R},\ 0 \leq x \leq 3\} \\ B &= \{x \,/\, x \in \mathbb{R},\ 1 \leq x \leq 4\} \\ \mathcal{A}_1 &= \{(x,y) \,/\, x \in A,\ y \in B,\ x \geq y\} \\ \mathcal{A}_2 &= \{(x,y) \,/\, x \in A,\ y \in B,\ x = y/2\} \\ \mathcal{A}_3 &= \{(x,y) \,/\, x \in A,\ y \in B,\ x + 1 = y\} \end{aligned}$$

  La aplicación $\mathcal{A}_1$ no es función porque los elementos del conjunto A que pertenecen al intervalo $[0,1)$ no están relacionados y los que pertenecen al intervalo $(1,3]$ están relacionados infinitas veces. La aplicación $\mathcal{A}_2$ tampoco es función porque los elementos $x \in (2,3]$ del conjunto A no están relacionados. La aplicación $\mathcal{A}_3$ ***sí es función*** *ya que todos los elementos pertenecientes a A están relacionados con uno y sólo un elemento de B.*

De ahora en adelante nos restringiremos a las funciones matemáticas, es decir, a aquellas en las que A y B son conjuntos de números.

Cuando al valor de $x \in A$ le corresponde un valor de $y \in B$ a través de una función $f : A \to B$, lo vamos a simbolizar como $f(x) = y$ (análogamente si a un elemento

$a \in A$ le corresponde un valor de $b \in B$, diremos que $f(a) = b$). De este modo podemos utilizar $f(x)$ ó y indistintamente para representar al elemento al que está relacionado x. Así logramos una notación más compacta.

Ejemplo *Sea* $f = \{(x, y) \,/\, x \in A,\, y \in B,\, y = 4x\}$. *Entonces de acuerdo a la nueva notación podemos escribir*

$$f(x) = \begin{cases} f : A \to B \\ f(x) = 4x \end{cases}$$

Ahora vamos a dar una serie de definiciones, para las que vamos a considerar una función matemática $f : A \to B$.

Dominio de una función: Llamamos dominio de f al conjunto de partida, A, es el conjunto de existencia de la función, es decir, los valores para los cuales f está definida. Y se denota como:

$$\mathrm{Dom}(f) = A$$

El dominio natural de una función matemática es el máximo conjunto posible para el cual está definida.

Codominio de una función: Llamamos codominio de f al conjunto de llegada, B. Y se denota como:

$$\mathrm{Codom}(f) = B$$

Imagen de una función: Llamamos imagen de f al subconjunto de elementos de B que están relacionados con los elementos del dominio. Es decir:

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B \,/\, x \in A,\, y = f(x)\} = \{y \in B \,/\, (x, y) \in f\}$$

Notemos que por definición, la imagen de una función está incluída en el codominio, por lo que, en principio, la imagen y el codominio de una función podrían no ser iguales.

X: Variable independiente o abscisa: Son los elementos del dominio.

Y: Variable dependiente u ordenada: Son los elementos del codominio.

Las funciones las podemos clasificar en cuatro tipos distintos:

Función inyectiva: Decimos que la función f es inyectiva cuando cada elemento del "codominio" está vinculado a lo sumo con un elemento del dominio. En símbolos es:

$$f\,\text{es inyectiva} \iff f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Es decir que para una función inyectiva los elementos del codominio están vinculados con un sólo elemento del dominio o no están vinculados.

Existe un criterio geométrico sencillo para analizar si una gráfica representa una función inyectiva conocido como "Criterio de la recta horizontal". Una función es inyectiva si y sólo si ninguna recta horizontal corta a la gráfica en más de un punto.

Función suryectiva o sobreyectiva: Decimos que la función f es suryectiva o sobreyectiva cuando todos los elementos del codominio están relacionados al menos con un elemento del dominio. En símbolos es:

$$f \text{ es suryectiva} \iff \forall y \in B, \exists x \in A \text{ tal que } y = f(x)$$

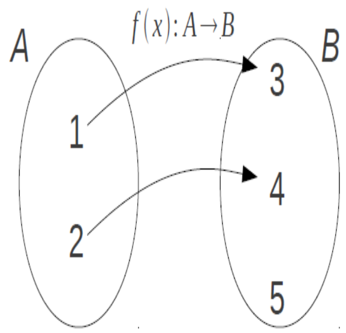
Ahora todos los elementos del codominio deben estar relacionados con uno o más elementos del dominio. En este caso la imagen de f es igual al codominio.

Función biyectiva: Decimos que la función f es biyectiva cuando es inyectiva y suryectiva.

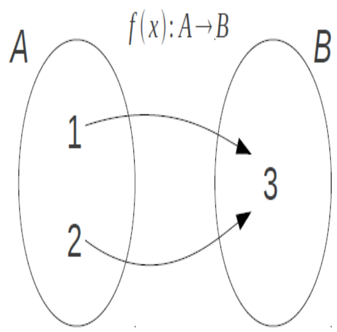
Función no inyectiva y no suryectiva: Decimos que la función f es no inyectiva y no suryectiva precisamente cuando no cumple ninguna de las dos propiedades.

Ejemplos:

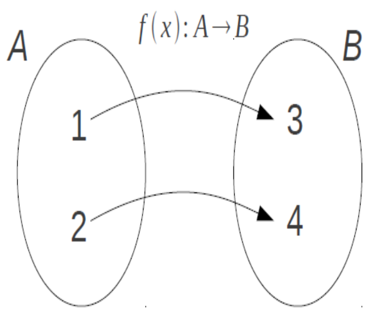
Función inyectiva no suryectiva.



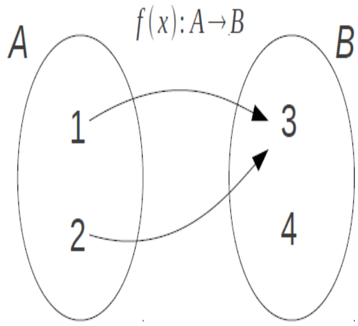
Función suryectiva no inyectiva.



Función biyectiva (inyectiva y suryectiva).



Función no inyectiva y no suryectiva.



Igualdad de funciones

Diremos que dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son iguales si y sólo si:

1. Tienen el mismo dominio, $A = C$

2. Tienen la misma imagen, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$
3. Tienen la misma regla, $f(x) = g(x)$.

Si a una función determinada:

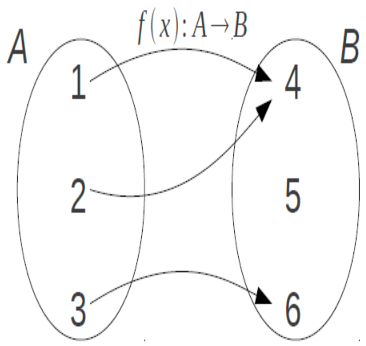
- le modificamos la regla de vinculación (se modifican los pares ordenados);
- le modificamos el dominio; o
- reducimos el codominio modificando la imagen

modificaremos la función. En cambio, si

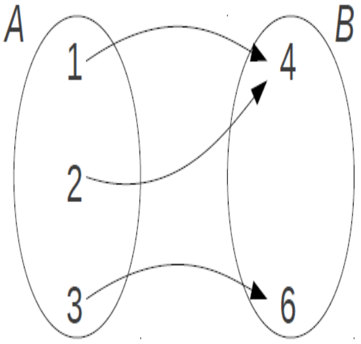
- ampliamos el codominio; o
- reducimos el codominio sin modificar la imagen,

la función no cambia.

Ejemplo: *Tomemos la siguiente función:* $f = \{(1,4); (2,4); (3,6)\}$

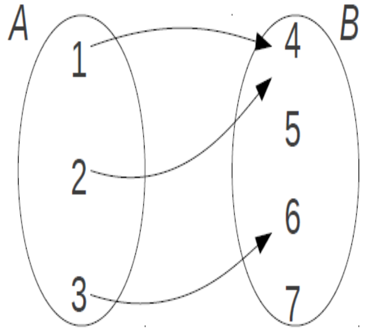


Si reducimos el codominio sin modificar la imagen, la función no cambia



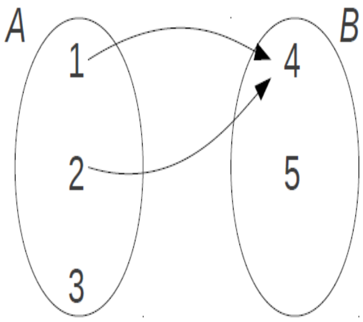
$f_3 = \{(1,4); (2,4); (3,6)\} = f$

Si ampliamos el codominio, la función no cambia.



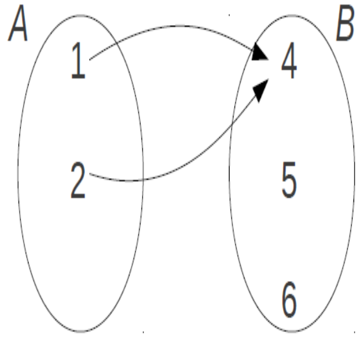
$f_2 = \{(1,4); (2,4); (3,6)\} = f$

Si reducimos el codominio modificando la imagen, se modifica la función (en este caso el resultado no es función).



$f_4 = \{(1,4);(2,4)\} \neq f$

Si modificamos el dominio, modificamos la función.



$f_1 = \{(1,4);(2,4)\} \neq f$

4.3. Sistema de ejes cartesianos

Como vimos anteriormente, una forma equivalente para describir una función es a través de un gráfico. Para graficar funciones matemáticas vamos a tener en cuenta algunos detalles:

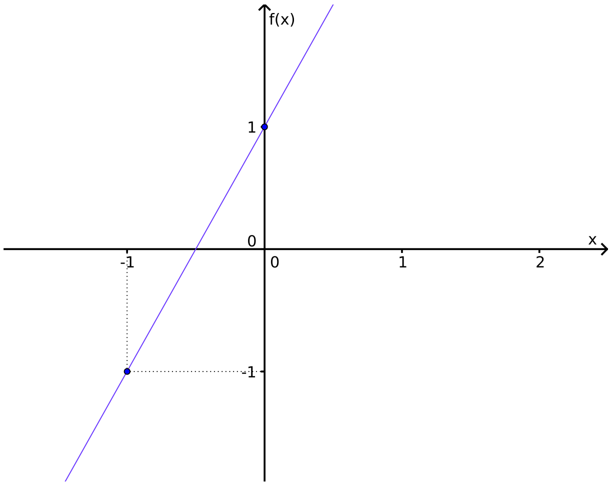
- Los gráficos están constituidos por dos ejes perpendiculares entre sí.
- Los ejes deben identificarse con un nombre. En general se nombra con el conjunto al cual representan. El eje de las abscisas representa al dominio y se nombra con la letra que representa a la variable independiente. Mientras que el eje de las ordenadas representa al codominio y se nombra con la letra que representa a la variable dependiente. Generalmente, la convención es que llamemos x a la variable independiente, que el eje de las abscisas esté graficado de forma horizontal; que llamamos y o $f(x)$ a la variable dependiente y que el eje de las ordenadas esté graficado de forma vertical.
- Como estamos trabajando con funciones matemáticas, tanto el dominio como el codominio representan conjuntos de números. Por esta razón a uno de los extremos de cada eje se le coloca una flecha. Esta flecha indica el lado hacia el cual crece la numeración del eje (por esto es importante graficar la flecha sólo en un extremo del eje).
- Finalmente, los ejes deben tener alguna referencia sobre la escala en la que se está graficando la función.

Ejemplo: *Ahora vamos a ver algunos ejemplos de la gráfica de algunas funciones con las que trabajaremos en este curso.*

Recta o función lineal

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = 2x + 1 \end{cases}$$

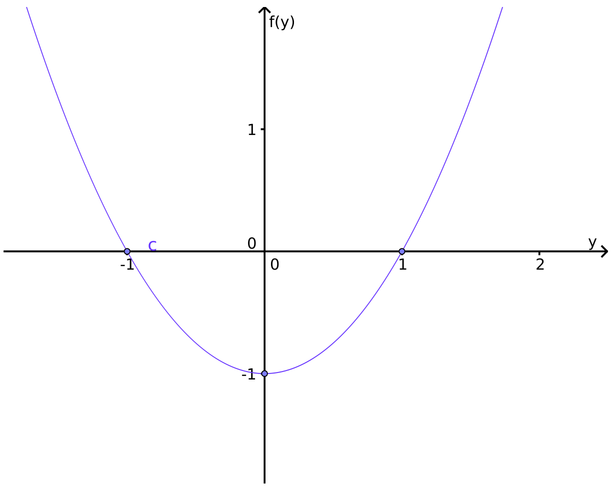
x	$f(x)$
0	1
-1	-1



Parábola o función cuadrática

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(y) = y^2 - 1 \end{cases}$$

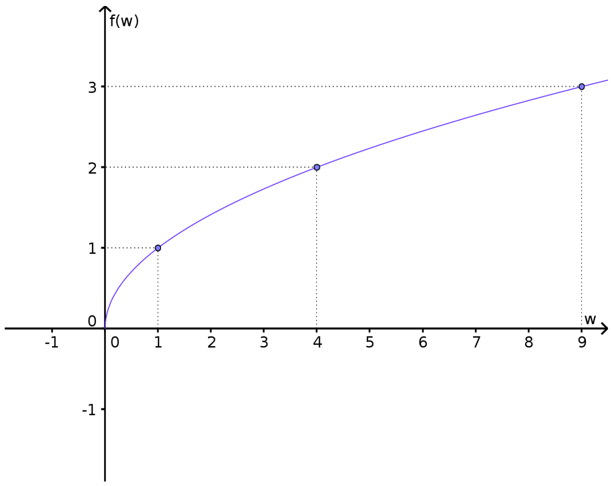
y	$f(y)$
-1	0
0	-1
1	0



Raíz cuadrada

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^+ \cup 0 \to \mathbb{R} \\ f(w) = \sqrt{w} \end{cases}$$

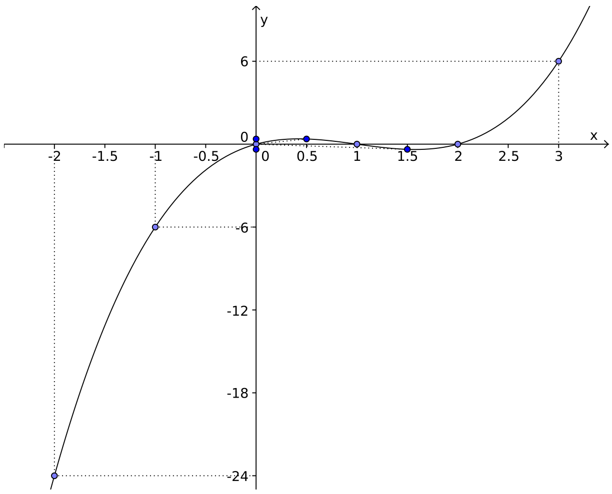
w	$f(w)$
1	1
4	2
9	3



Función polinómica

$$\begin{cases} y: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \end{cases}$$

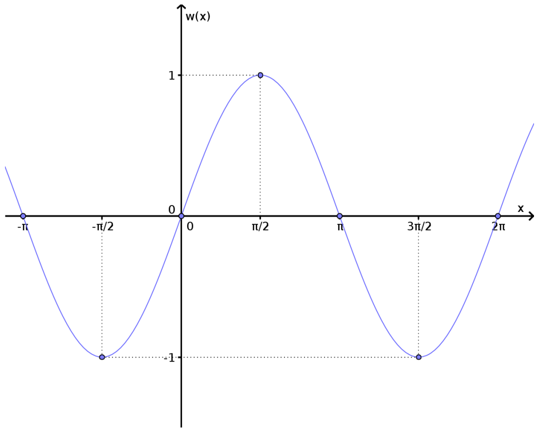
x	$y(x)$
-2	-24
-1	6
0	0
$1/2$	1
1	0
$3/2$	$-3/8$
2	0
3	6



Función trigonométrica

$$\begin{cases} w : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ w(x) = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

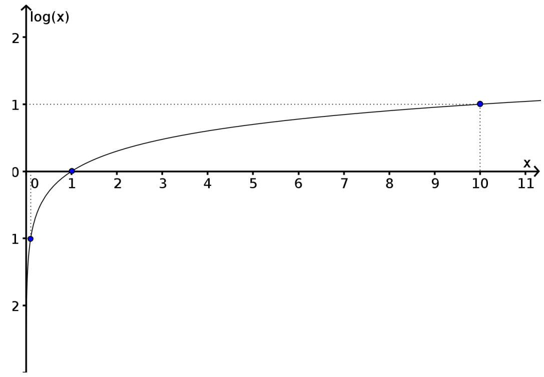
x	$w(x)$
$-\pi$	0
$-\pi/2$	-1
0	0
$\pi/2$	1
π	0
$\frac{3}{2}\pi$	-1
2π	0



Función logarítmica

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ f(x) = \log x \end{cases}$$

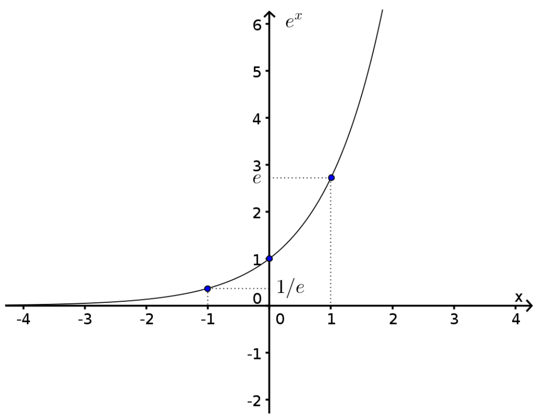
x	$f(x)$
$\frac{1}{10}$	-1
1	0
10	1



Función exponencial

$$\begin{cases} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ g(x) = e^x \end{cases}$$

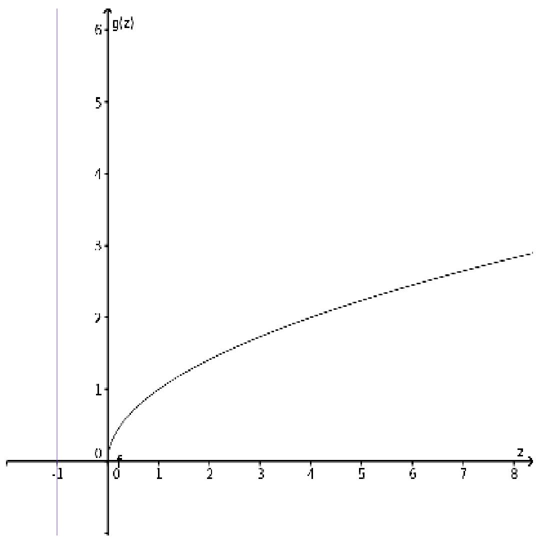
x	$g(x)$
-1	$\frac{1}{e}$
0	1
1	e



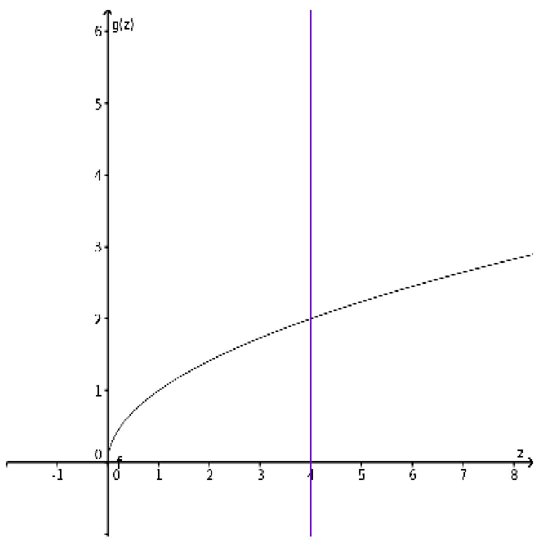
Criterio de la recta vertical:

Dada una gráfica de una aplicación, podemos decir si es o no función trazando una recta vertical.

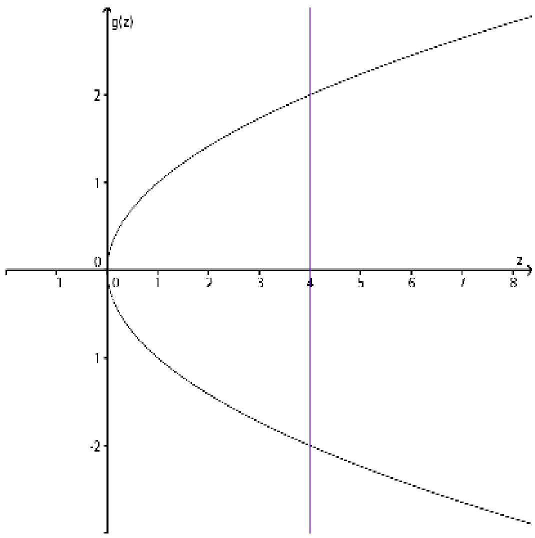
- Si la recta no corta a la gráfica significa que el elemento del eje de las abscisas por donde pasa la recta vertical no pertenece al dominio.



- Si todas las rectas verticales cortan una sola vez a la gráfica, resulta que la gráfica es una función.



- Si existe una recta vertical que corta a la gráfica más de una vez, no es función.



De acuerdo a sus gráficas, las funciones pueden separarse en tres grupos:

Funciones pares: Las funciones pares son aquellas que satisfacen que

$$f(-x) = f(x)$$

por lo tanto, sus gráficas son simétricas respecto al eje de las ordenadas.

Funciones impares: Las funciones impares son aquellas que satisfacen que

$$f(-x) = -f(x)$$

por lo tanto, sus gráficas son simétricas respecto al origen de coordenadas.

Funciones no pares y no impares: Las funciones no pares y no impares son aquellas que no satisfacen ninguna de estas propiedades.

Ejemplos:

- **Función par**

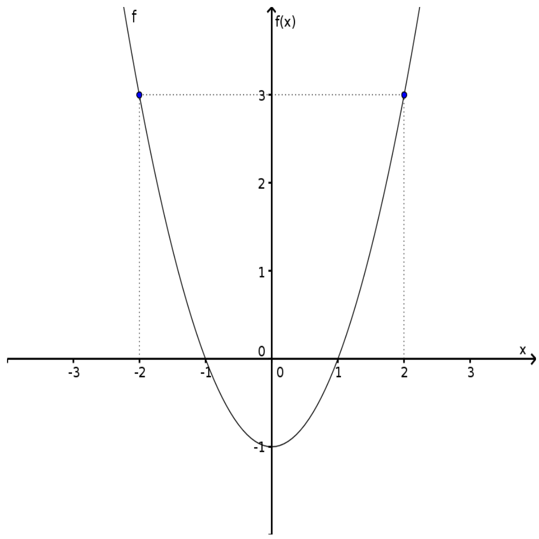
  La función $f(x) = x^2 - 1$ es una función par. Para demostrarlo tomemos cualquier número real z, entonces, si evaluamos la función[1] *f en z, tendremos que $f(z) = z^2 - 1$. Ahora evaluemos la función en $-z$:*

  $$f(-z) = (-z)^2 - 1 = [(-1)^2\, z^2] - 1 = 1\, z^2 - 1 = z^2 - 1$$

  Luego, resulta que $f(z) = f(-z)$ para cualquier número real z. Por lo tanto, la función f es par.

[1] Evaluar una función significa reemplazar la variable independiente por un valor determinado. Por ejemplo evaluar la función $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 2$ es igual a $f(2) = 2^2 - 1 = 3$ y evaluarla en $x = a$ es $f(a) = a^2 - 1$.

En la gráfica de la función se puede ver la simetría de la función con respecto al eje de las ordenadas. Se ve como si pusiéramos un espejo sobre el eje de las ordenadas.

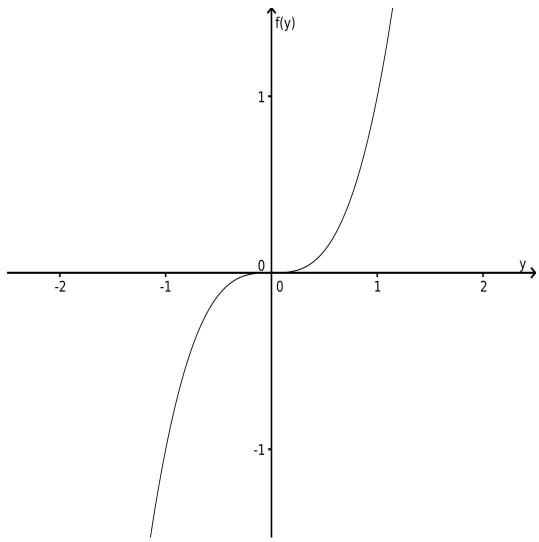


- **Función impar**

  Tomemos la función $f(y) = y^3$*. Luego, si* z *es un número real cualquiera tenemos que* $f(z) = z^3$*, y si evaluamos la función en* $-z$ *tenemos que*

$$f(-z) = (-z)^3 = (-1)^3\, z^3 = -z^3 = -f(z)$$

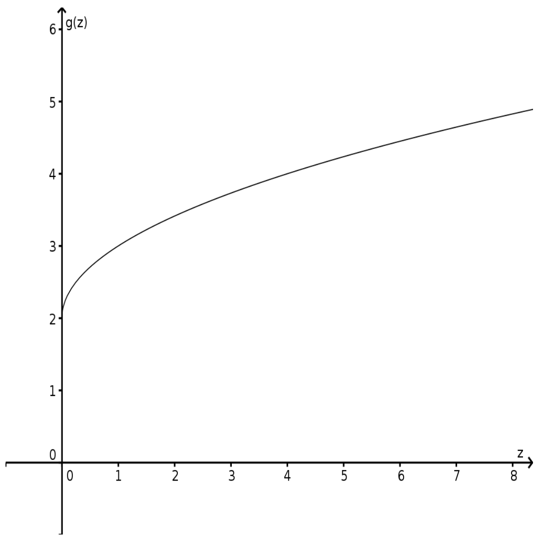
  Así encontramos que la función $f(y) = y^3$ *es impar.*



- **Función ni par ni impar:**

  Tomemos la función $g(z) = \sqrt{z} + 2$*. Luego, como el dominio de esta función es el conjunto de los números reales mayores o iguales a cero, resulta que, si* $z > 0$,

$g(-z)$ no existe, por lo tanto $g(z) \neq g(-z)$ y $g(z) \neq -g(-z)$. Así encontramos que la función $g(z)$ no es par ni impar.



4.4. Funciones polinómicas

Antes de definir qué es una función polinómica debemos dar la definición de polinomio. Un polinomio, $P(x)$, es una expresión matemática que se define de la siguiente manera:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde los coeficientes a_n, a_{n-1}, ..., a_0, son números reales, $a_n \neq 0$ y los exponentes son naturales. Esto se simboliza:

$$\begin{cases} P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ \text{donde } a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ \ a_n \neq 0 \text{ y } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

A $\boldsymbol{x}$ la llamamos **"variable independiente" o "indeterminada"** porque puede tomar cualquier valor real, mientras que **los $\boldsymbol{a_i}$ se llaman "coeficientes"** y son valores reales constantes.

El grado de un polinomio está dado por el exponente más grande de la variable independiente y se simboliza como:

$$\text{gr}(P) = n$$

y el coeficiente que multiplica a $\boldsymbol{x^n}$, en este caso $\boldsymbol{a_n}$, es el coeficiente principal. Mientras que **el coeficiente $\boldsymbol{a_0}$, aquel que no está multiplicado por ninguna** x**, es el término independiente.**

Las funciones polinómicas son aquéllas que se vinculan matemáticamente con un polinomio:

$$\boxed{\begin{cases} f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ \text{donde } a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2, \ldots, n,\ \ a_n \neq 0 \text{ y } n \in \mathbb{N} \end{cases}} \tag{4.1}$$

Las funciones no polinómicas serán aquellas que no están vinculadas a un polinomio, como por ejemplo la raíz, la función logarítmica, la función exponencial[2], las funciones trigonométricas, entre otras.

En este curso estudiaremos tres funciones polinómicas en particular: la función constante, la función lineal y la función cuadrática. De las funciones no polinómicas nos concentraremos en las funciones trigonométricas en el Capítulo 5.

4.5. Función constante

Este es el caso en el cual se cumple que las imágenes de todos los elementos del dominio son iguales. En símbolos es:

$$\boxed{P(x) = a} \tag{4.2}$$

Donde $a \in \mathbb{R}$.

ATENCIÓN Si bien un polinomio de grado cero tiene la misma expresión que una función constante, no tienen el mismo dominio. Pensémoslo así:

Dada una función constante $P(x)$:

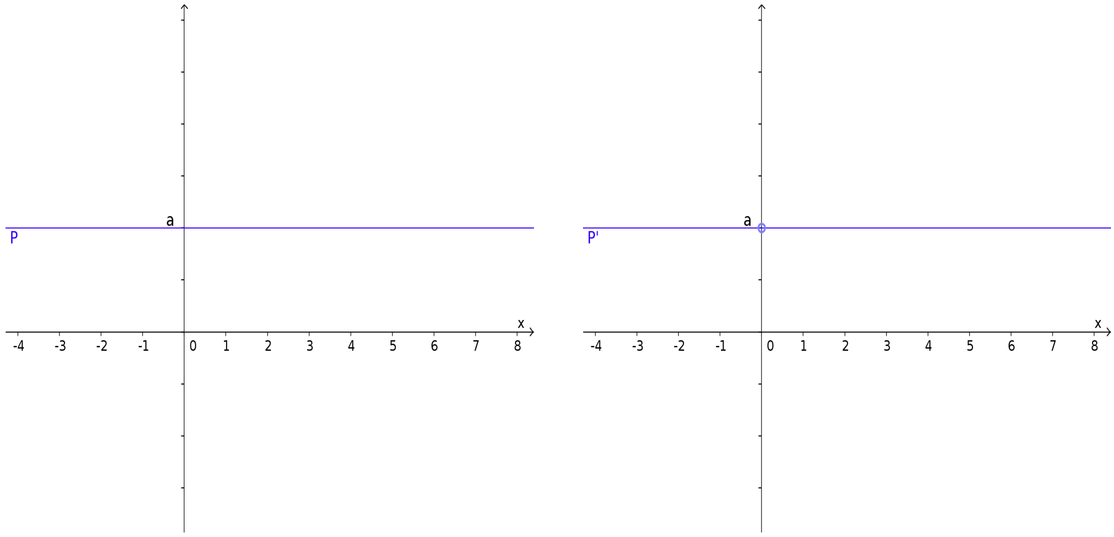
$$P(x) = a$$

tiene por dominio a todos los reales, o sea, $Dom(P) = \mathbb{R}$. En cambio, un polinomio de grado cero $P'(x)$:

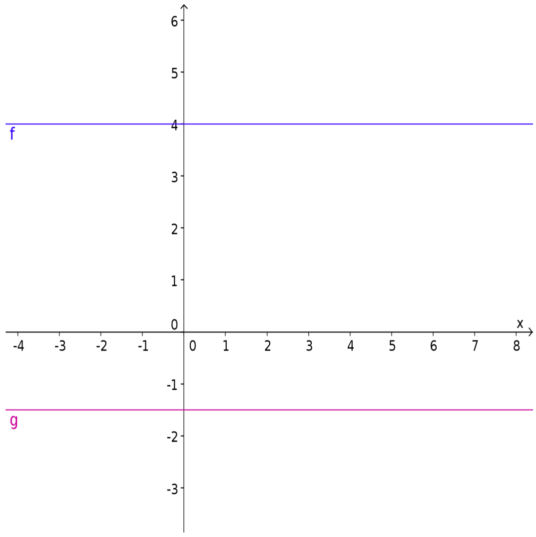
$$P'(x) = a = a\,.\,1 = a\,x^0$$

tiene como dominio $\mathbb{R} - (0)$ ya que 0^0 no está definido.

[2]En este video puedes encontrar una simple explicación de lo que significa que algo crezca exponencialmente. (https://www.youtube.com/watch?v=Qtt6l-RMwxk)



Ejemplo: *La gráfica de las funciones constantes* $f(x) = 4$ y $g(x) = -1.5$ *son*:



4.6. Función lineal

Una función lineal es aquella que está vinculada matemáticamente con un polinomio de grado 1, y se define como:

$$\boxed{\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = a\,x + b, \;\; con\ a \neq 0 \end{cases}} \tag{4.3}$$

Donde a y b son números reales constantes (a es el coeficiente principal y b el término independiente). **El gráfico de este tipo de funciones es siempre una recta.**

La notación tradicional para la función lineal es tomar la x como variable independiente e $y = f(x)$ como variable dependiente. Siguiendo esta notación diremos que:

$$\boxed{y = a\,x + b} \tag{4.4}$$

Es la forma explícita de la ecuación de la recta. Todos los pares de valores (x, y) que satisfagan esta relación representan gráficamente los puntos de la recta, o sea, son los pares ordenados que pertenecen a la gráfica de la recta.

Ahora vamos a ver algunas definiciones asociadas a la expresión funcional de la recta $f(x) = ax + b = y$.

Ordenada al origen: es el punto de intersección entre la recta y el eje de las ordenadas, es decir, el punto perteneciente a la recta cuya primera coordenada es igual a 0. La coordenada y de este punto será:

$$\begin{aligned} &y = f(0) \\ &y = a\,0 + b \\ &y = b \end{aligned}$$

Luego, **la ordenada al origen es el punto $(0, b)$.**

Raíz o cero: es el punto de intersección entre la recta y el eje de las abscisas.

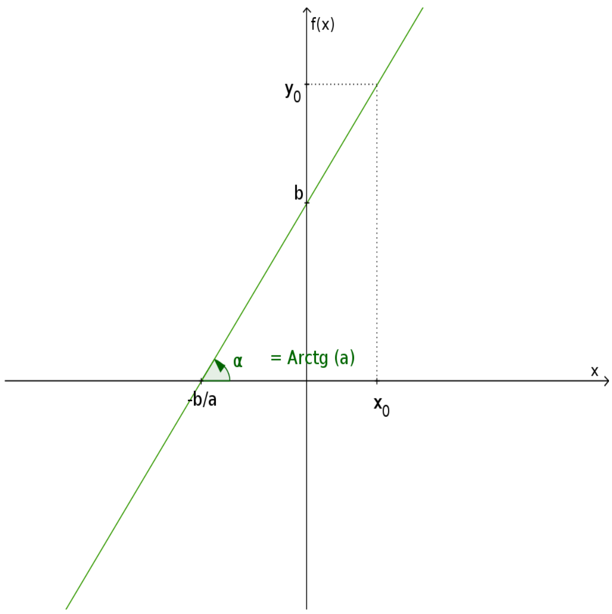
Es decir que la coordenada y de este punto debe ser igual a cero. Para hallar la coordenada x de este punto hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ a\,x + b &= 0 \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Luego, **la raíz es el punto $(-b/a, 0)$.**

Pendiente: La pendiente es una magnitud que da idea de la inclinación de la recta con respecto al eje positivo de la abscisas. **Llamaremos inclinación al ángulo α que forma la recta con el eje positivo de las abscisas.** Este ángulo se mide en sentido contrario a las agujas del reloj, desde el eje positivo de las abscisas hasta la recta, por lo tanto $0 \leq \alpha < \pi$. **La pendiente será la tangente de la inclinación, $\tan(\alpha)$.**

Para encontrar el valor de la pendiente vamos a tomar dos puntos cualesquiera pertenecientes a la recta, por simplicidad vamos a tomar los puntos (x_0, y_0) (que representa a un punto cualquiera perteneciente a la recta) y la raíz $(-b/a, 0)$.



De este modo conseguimos un triángulo rectángulo cuyos vértices son los puntos $(-b/a, 0)$, $(x_0, 0)$ y (x_0, y_0).

Quizás recuerdes de la secundaria que la tangente de un ángulo interior a un triángulo rectángulo es igual a su cateto opuesto dividido su cateto adyacente; si no es así, tranquilo, en unas clases volveremos sobre estas cosas.

De acuerdo a la figura anterior, la longitud del cateto adyacente a α es igual a $x_0 + b/a$, mientras que la longitud del cateto opuesto es igual a y_0.

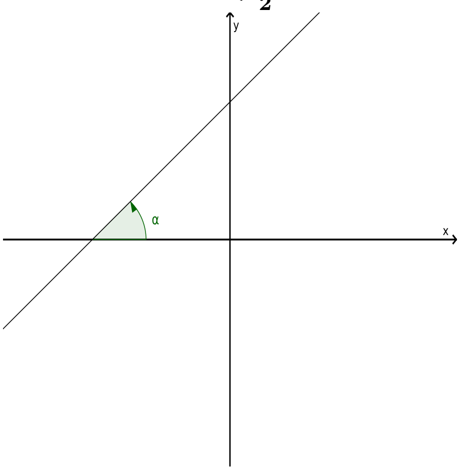
Luego, la tangente de la inclinación es igual a:

$$\tan(\alpha) = \frac{y_0}{x_0 + b/a} = \frac{y_0}{\frac{1}{a}(a\,x_0 + b)} = \frac{a\,y_0}{y_0} = a$$

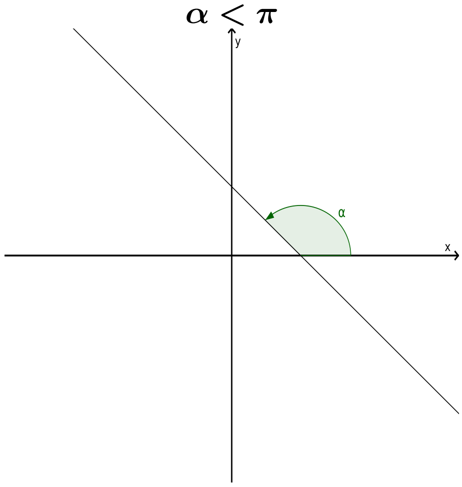
Así resulta que **la pendiente de la recta $\boldsymbol{y = a\,x + b}$ es igual a $\boldsymbol{a = \tan(\alpha)}$.**

El signo de la pendiente nos da mucha información sobre la recta:

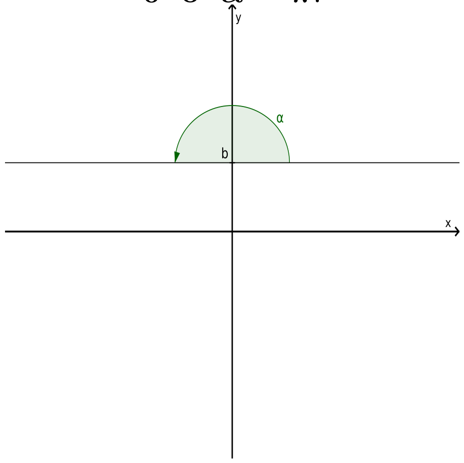
$$\boldsymbol{a > 0 \Longrightarrow \tan(\alpha) > 0 \Longrightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}}$$



$$\boldsymbol{a < 0 \Longrightarrow \tan(\alpha) < 0 \Longrightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi}$$

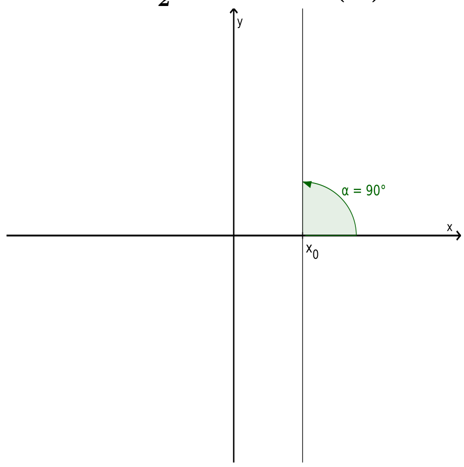


$$\boldsymbol{a = 0 \Longrightarrow \tan(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \text{ ó } \alpha = \pi}.$$



En este caso la expresión funcional de la recta es $y = b$ (función constante). Notemos que, si bien **la gráfica de la función constante corresponde a una recta**, no es una función lineal debido a que el grado del polinomio no es igual a 1.

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \nexists \tan(\alpha)}$$



La recta es paralela al eje de las ordenadas y su expresión es $x = x_0$, donde x_0 es un número real constante. Notemos que en este caso la relación $x = x_0$ no es función.

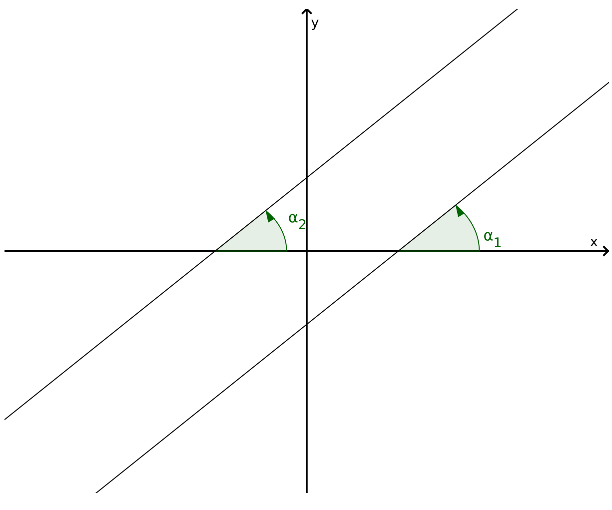
4.6.1. Rectas paralelas y perpendiculares

Ahora vamos a ver qué relación existe entre las expresiones de dos rectas que son paralelas, y entre las expresiones de dos rectas perpendiculares.

Vamos a considerar dos rectas $y_1 = a_1\, x + b_1$ e $y_2 = a_2\, x + b_2$.

Rectas paralelas: Para que dos rectas sean paralelas, sus inclinaciones deben ser iguales, esto es $\alpha_1 = \alpha_2$.

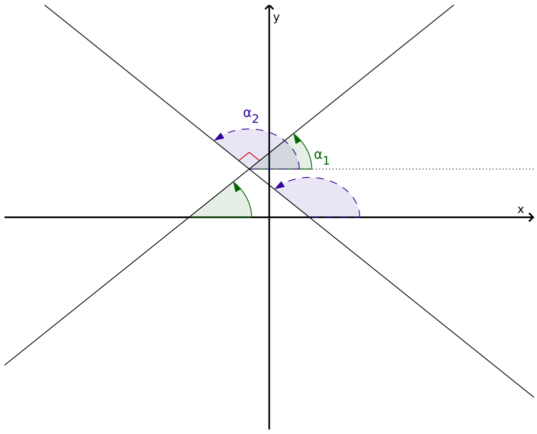
Ahora, si $\alpha_1 = \alpha_2$, resulta que sus tangentes también deben ser iguales, $\tan(\alpha_1) = \tan(\alpha_2)$, por lo tanto obtenemos que **las pendientes de las dos rectas son iguales, $\boldsymbol{a_1 = a_2}$.**



$$\boxed{y_1 \parallel y_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2}$$

Rectas perpendiculares: **Para que dos rectas sean perpendiculares sus inclinaciones deben ser tales que $\boldsymbol{\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2}$.**

Aplicamos la tangente en ambos miembros:



$$\begin{aligned}\tan(\alpha_2) &= \tan(\alpha_1 + \pi/2)\\ &= \frac{\sin(\alpha_1 + \pi/2)}{\cos(\alpha_1 + \pi/2)}\\ &= \frac{\cos(\alpha_1)}{-\sin(\alpha_1)}\\ &= -\frac{1}{\tan(\alpha_1)}\end{aligned}$$

De aquí resulta que:

$$a_2 = -\frac{1}{a_1} \quad \text{ó} \quad a_1\, a_2 = -1$$

Finalmente,

$$\boxed{y_1 \perp y_2 \Longleftrightarrow a_1\, a_2 = -1}$$

4.6.2. Distintas expresiones de la función lineal

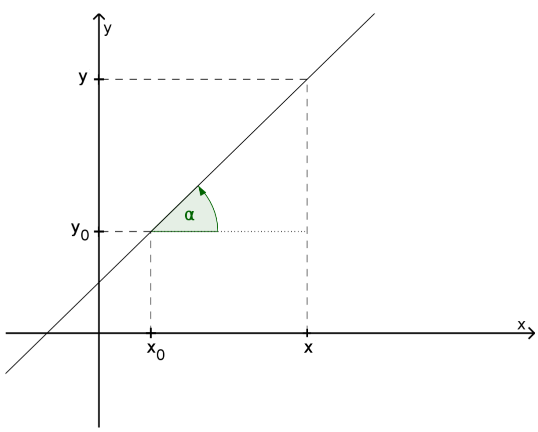
Una recta queda definida por su pendiente y su ordenada al origen. Por lo tanto, para hallar su expresión funcional es necesario determinar estos dos valores.

Como vimos en el Capítulo 3, para encontrar el valor de dos incógnitas se necesitan dos ecuaciones distintas que las relacione.

Existen distintas formas de expresar funcionalmente a una recta que surgen de tratar de determinar la recta a partir de distintos datos.

- **Conociendo la pendiente (o la inclinación), $\boldsymbol{a}$ (ó $\boldsymbol{\alpha}$), y un punto, $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$, perteneciente a la recta.**

  Tomemos un punto cualquiera (x, y) que pertenezca a la recta, y consideramos el triángulo rectángulo de vértices (x_0, y_0), (x, y_0) y (x, y).



Luego la función de la recta queda definida de la siguiente manera:

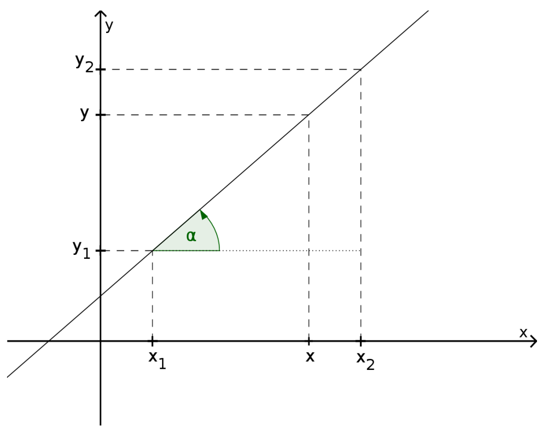
$$\boxed{a = \tan(\alpha) = \frac{y - y_0}{x - x_0}} \tag{4.5}$$

Si queremos encontrar la forma explícita de la recta hacemos lo siguiente:

$$\begin{gathered} a\,(x - x_0) = y - y_0 \\ a\,x \underbrace{-a\,x_0 + y_0}_{=b} = y \\ a\,x + b = y \end{gathered}$$

- **Conociendo dos puntos, (x_1, y_1) y (x_2, y_2), que pertenecen a ella.**

  Nuevamente tomamos un punto cualquiera sobre la recta.



Ahora tenemos que:

$$\tan(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{y} \quad \tan(\alpha) = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Luego, la expresión de la recta será:

$$\boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}} \tag{4.6}$$

Si queremos hallar la forma explícita hacemos:

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) &= y - y_1 \\ \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{=a}\,x \underbrace{-\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x_1 + y_1}_{=b} &= y \\ a\,x + b &= y \end{aligned}$$

Es importante notar que las expresiones 4.4, 4.5 y 4.6 son equivalentes. Esto quiere decir que podemos expresar la función de una misma recta de 3 formas distintas. Sin embargo, la pendiente y la ordenada al origen sólo se pueden identificar directamente en la expresión explícita de la recta, expresión 4.4.

4.7. Función cuadrática

Una función cuadrática es un polinomio de grado 2, y se define como:

$$\boxed{\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = a\,x^2 + b\,x + c, \;\; con\ a \neq 0 \end{cases}} \tag{4.7}$$

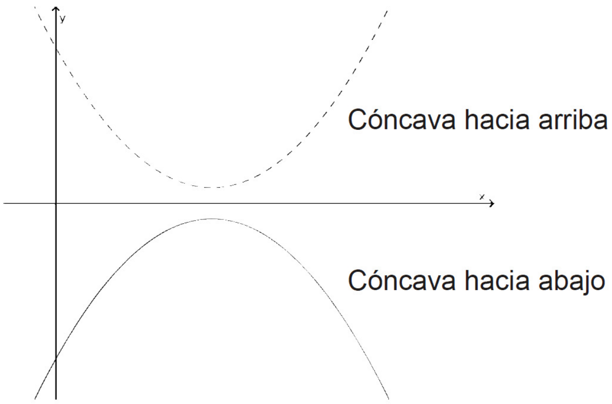
donde a, b y c son números reales constantes (a es el coeficiente principal y c el término independiente). **El gráfico de este tipo de funciones es siempre una parábola**[3].

Concavidad: es una característica de las líneas o superficies curvas.

Consideremos una cuchara. La parte cóncava es aquella donde se ubica la sopa (o cualquier otro líquido). La otra es la parte convexa.

El coeficiente principal de la función cuadrática, $y = ax^2 + bx + c$, es el que nos da la información sobre la concavidad de la parábola.

- **Si $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba.**
- **Si $a < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo.**[4]



Eje de simetría: es una recta que divide simétricamente a la curva, es decir, intuitivamente la separa en dos partes congruentes. Puede ser entendido como un espejo que refleja la mitad de la parábola en cuestión.

Los puntos importantes de esta función son:

[3]La parábola forma parte de la familia de curvas llamadas cónicas. Este tipo de curvas son las que se obtienen de la intersección de un cono y un plano. En este video, Paenza hace una breve explicación sobre las cónicas. (http://www.youtube.com/watch?v=YtY_HFWm3BQ)

[4]Como regla nemotécnica se puede pensar que dada una parábola de la forma $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, está feliz (cóncava hacia arriba) si $a > 0$ y está triste (cóncava hacia abajo) si $a < 0$.

Ordenada al origen: es la intersección de la parábola con el eje de las ordenadas. La primera coordenada de este punto es igual a 0, por lo tanto:

$$f(0) = a\,0^2 + b\,0 + c = c$$

Entonces, **la ordenada al origen es el punto $(0, c)$.**

Raíz: es la intersección entre la parábola y el eje de las abscisas. En este caso, la segunda coordenada de este punto es nula.

$$y = 0 \Longrightarrow a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Como vimos en el Capítulo 3, los valores de x que satisfacen esta ecuación son tales que:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}} \tag{4.8}$$

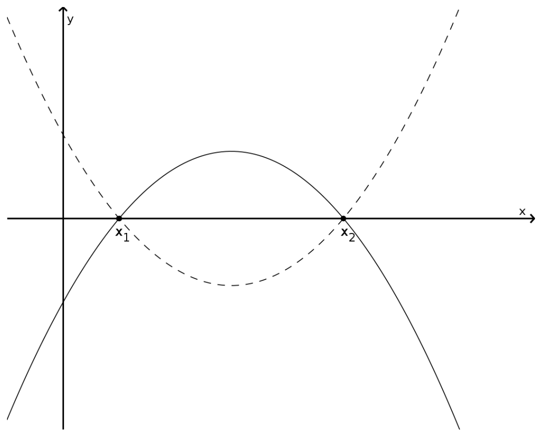
Como la raíz cuadrada sólo está definida para números positivos, y aparece un doble signo, $\pm$, tendremos tres casos:

- **Si $b^2 - 4\,a\,c > 0$**, existen dos números reales distintos, x_1 y x_2, que satisfacen que $a\,x^2 + b\,x + c = 0$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

Esto significa que **la parábola corta al eje de las abscisas en dos puntos: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.**



En este caso podemos encontrar dos relaciones entre las raíces:

Suma de las raíces:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \\
&= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c} - b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \\
&= \frac{-2\,b}{2\,a} \\
&= \frac{-b}{a}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \tag{4.9}$$

Producto de las raíces:

$$\begin{aligned}
x_1\,x_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\right) \\
&= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4\,a\,c})^2}{(2\,a)^2} \\
&= \frac{b^2 - b^2 + 4\,a\,c}{4\,a^2} = \\
&= \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{x_1\,x_2 = \frac{c}{a}} \tag{4.10}$$

Utilizando estas relaciones entre las raíces se puede demostrar que:

$$\boxed{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)} \tag{4.11}$$

La demostración es bastante simple. Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad &\Longrightarrow \quad b = -a(x_1 + x_2) \\
x_1\,x_2 = \frac{c}{a} \quad &\Longrightarrow \quad c = a\,x_x\,x_2
\end{aligned}$$

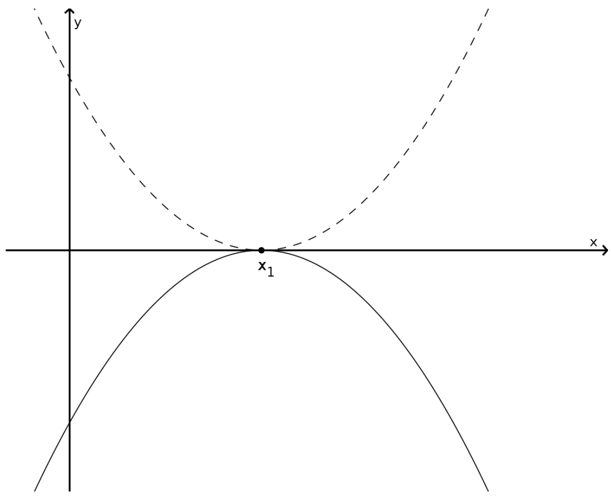
Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
a\,(x - x_1)\,(x - x_2) &= a\,(x^2 - x\,x_2 - x\,x_1 + x_1\,x_2) \\
&= a\,x^2 + x\,[-a\,(x_1 + x_2)] + a\,x_1\,x_2 \\
&= a\,x^2 + b\,x + c
\end{aligned}$$

- **Si $\boldsymbol{b^2 - 4\,a\,c = 0}$**, existen dos números reales iguales, $x_1 = x_2$, que satisfacen que $a\,x^2 + b\,x + c = 0$:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2\,a}$$

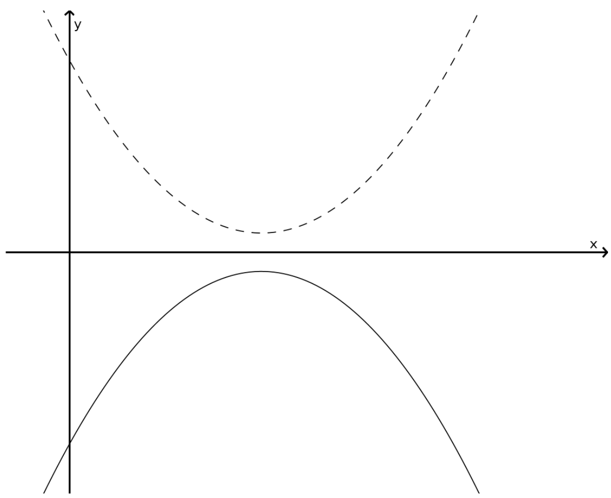
Esto significa que **la parábola corta al eje de las abscisas en un solo punto: $\boldsymbol{(-\frac{b}{2\,a}, 0)}$.**



En este caso, la expresión 4.11 toma la forma:

$$f(x) = a\,(x - x_1)^2 = a\,(x - x_2)^2 \qquad (4.12)$$

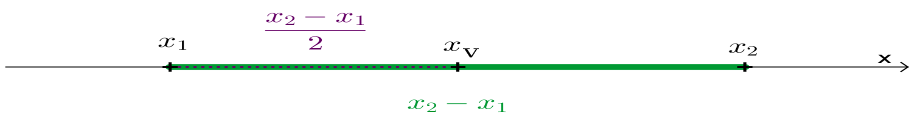
- **Si $\boldsymbol{b^2 - 4\,a\,c < 0}$**, no existe ningún número real que satisfaga que $a\,x^2 + b\,x + c = 0$. Esto significa que **la parábola no corta al eje de las abscisas.**



De este modo vemos que conociendo el signo del argumento de la raíz cuadrada, $b^2 - 4ac$, podemos saber cuántas raíces tiene la parábola. Por esta razón **se denomina "discriminante" a esta expresión** y se lo denota con la letra griega delta, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Vértice: Es el punto máximo (si la parábola es cóncava hacia abajo) o el punto mínimo (si la parábola es cóncava hacia arriba). La parábola es simétrica respecto a una recta que pasa por el vértice.

Si la parábola tiene dos raíces, x_1 y x_2, y suponemos que $x_1 < x_2$, la coordenada x del vértice estará entre medio de las raíces (debido a la simetría de la parábola):



$$x_v = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Si $x_2 < x_1$ se llega a la misma expresión. Por lo tanto, si la parábola tiene dos raíces distintas, tendremos que:

$$\boxed{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}} \tag{4.13}$$

Mientras que si tiene una sola raíz (o dos raíces iguales), $x_1 = x_2$, tendremos que $x_1 + x_2 = x_1 + x_1 = 2x_1$, luego:

$$x_v = x_1 = x_2$$

Sin embargo, si la parábola no corta al eje de las abscisas, no podremos calcular x_v utilizando el razonamiento anterior. Pero utilizando la relación entre las raíces, ecuación 4.9, resulta que:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b/a}{2} = \frac{-b}{2a}$$

De este modo, encontramos una expresión para la primera coordenada del vértice que no depende de las raíces:

$$\boxed{x_v = \frac{-b}{2\,a}} \tag{4.14}$$

Por esta razón es que esta expresión vale siempre.

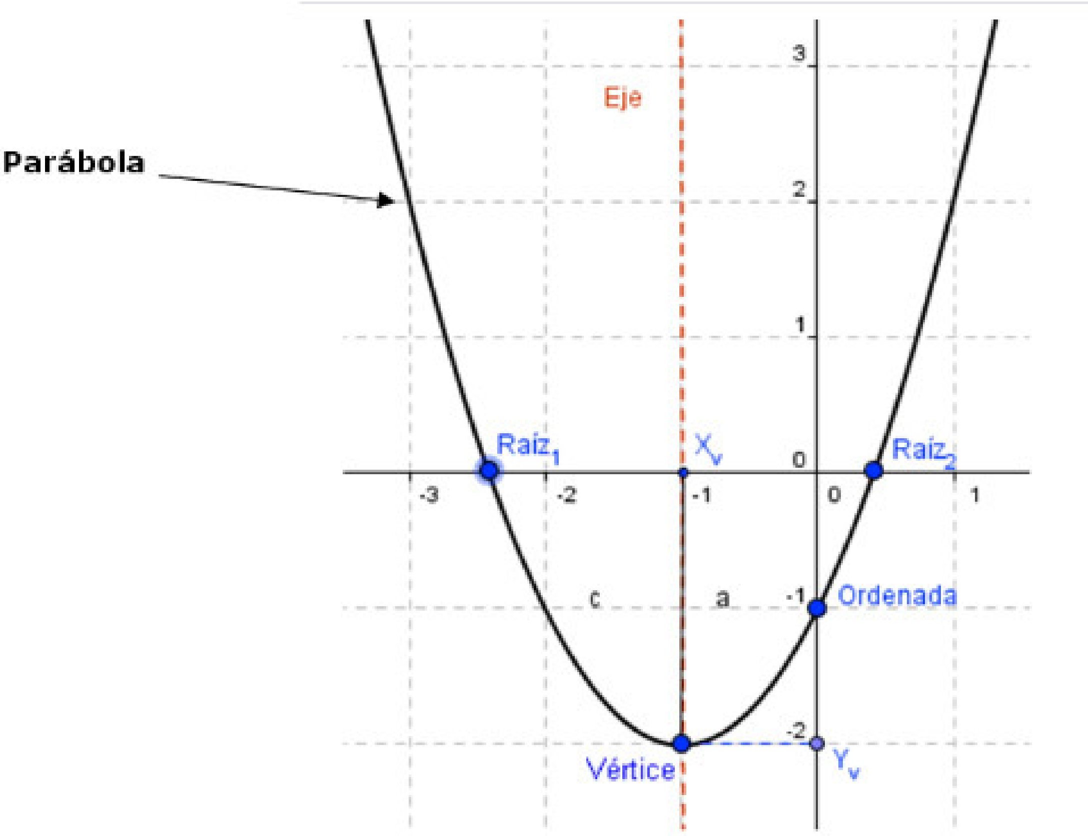
Luego, la coordenada y del vértice es igual a evaluar la función en x_v:

$$y_v = a\,x_v^2 + b\,x_v + c = a\left(\frac{-b}{2\,a}\right)^2 + b\,\frac{-b}{2\,a} + c = -\frac{b^2}{4\,a} + c$$

Por lo tanto:

$$\boxed{y_v = c - \frac{b^2}{4\,a}} \tag{4.15}$$

Así el vértice es el punto (x_v, y_v).



Utilizando estas dos últimas relaciones vamos a encontrar otra forma de escribir una función cuadrática. Tomemos una función cuadrática cualquiera de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Primero restamos c en ambos miembros y luego sacamos a factor común en el segundo miembro:

$$\begin{aligned} y &= a\,x^2 + b\,x + c \\ y - c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x\right) \end{aligned}$$

Ahora al término $\frac{b}{a}\,x$ lo multiplicamos y dividimos por 2, de modo que $\frac{b}{a}\,x = 2\,\frac{b}{2a}\,x$. Además, dentro del paréntesis del segundo miembro vamos a sumar y a restar $\frac{b^2}{4\,a^2}$. Así la expresión anterior queda expresada como:

$$\begin{aligned} y - c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x\right) \\ &= a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{b^2}{4\,a^2}\right) \end{aligned}$$

La suma de los primeros tres términos dentro del paréntesis es igual a un trinomio cuadrado perfecto, como vimos en el Capítulo 2:

$$x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \frac{b^2}{4\,a^2} = (x)^2 + 2\,x\,\left(\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2$$

Entonces, utilizando el método matemático denominado "completar cuadrados",

$$\begin{aligned}
y - c &= a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{b^2}{4\,a^2}\right)\\
y - c &= a\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2}{4\,a^2}\right]\\
y - c &= a\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - a\,\frac{b^2}{4\,a^2}\\
y - c &= a\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2}{4\,a}\\
y - c + \frac{b^2}{4\,a} &= a\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2\\
y - \left(c - \frac{b^2}{4\,a}\right) &= a\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2
\end{aligned}$$

Ahora, utilizando las relaciones 4.14 y 4.15 obtenemos la **expresión canónica de la parábola**

$$\boxed{y - y_v = a\,(x - x_v)^2} \tag{4.16}$$

En este Capítulo hemos estudiado y analizado algunas de las funciones polinómicas. En lectura adicional de "Funciones no polinómicas" se analizan y se muestran las gráficas de algunas de estas funciones.

4.8. Resolución de Problemas

Problema 1:

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ y sea la aplicación $\mathcal{A} = \{(x, y)\,/\,x \in A,\ y \in B,\ x > y\}$. Hallar la aplicación inversa, $\mathcal{A}^{-1}$, y decir si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^{-1}$ son funciones. Justificar.

Del enunciado tenemos que la aplicación $\mathcal{A}$ es el conjunto:

$$\mathcal{A} = \{(3, 2); (4, 2); (4, 3)\}$$

Entonces, la aplicación inversa la encontramos invirtiendo el orden de los pares ordenados ya que si $\mathcal{A} :\ A \to B$ su inversa será una aplicación tal que $\mathcal{A}^{-1} :\ B \to A$. Por lo tanto,

$$\mathcal{A}^{-1} = \{(2, 3); (2, 4); (3, 4)\}$$

De este modo hemos encontrado la aplicación inversa.

Otra opción válida para resolver el ejercicio es simplemente decir que la aplicación inversa es:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{-1} &= \{(x,y)\,/\,x\in B,\, y\in A,\, x<y\}\\ &= \{(y,x)\,/\,y\in B,\, x\in A,\, x>y\}\end{aligned}$$

La segunda parte del ejercicio pide ver si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^{-1}$ son funciones. Para que sean funciones deben satisfacer que **cada elemento del conjunto de partida esté relacionado con uno y sólo un elemento del codominio.** La aplicación $\mathcal{A}:\ A\to B$ tiene dos elementos, 1 y 2, del conjunto A que no están relacionados y el elemento 4 está relacionado dos veces, por lo tanto no es función. Lo mismo pasa con $\mathcal{A}^{-1}$, ya que el elemento 4 del conjunto B no está relacionado y el 2 está relacionado dos veces.

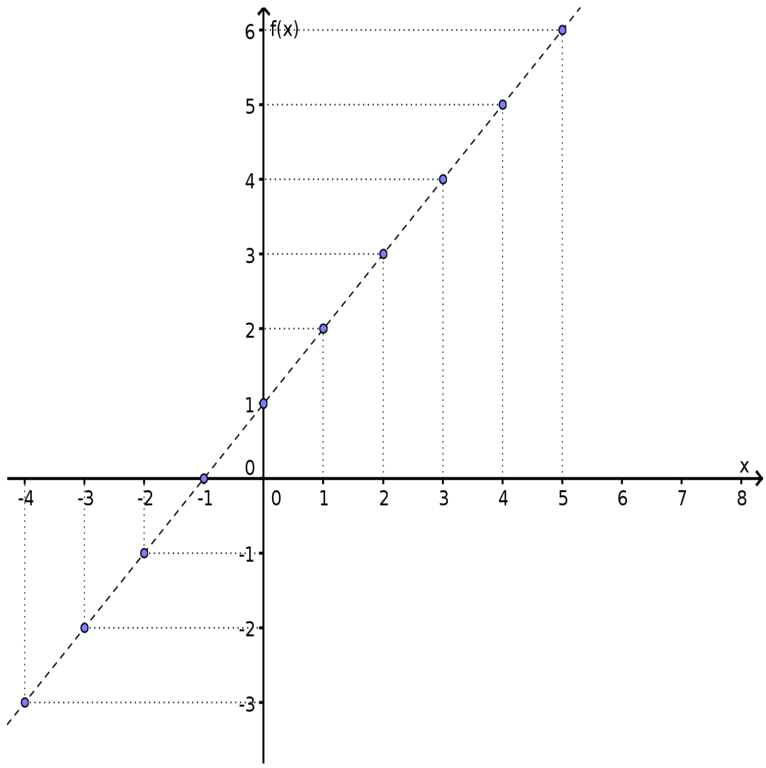
Problema 2:

¿Cuáles son el dominio, el codominio y la imagen de la siguiente función? Grafique.

$$\begin{cases} f:\ \mathbb{Z}\to\mathbb{R}\\ f(x)=x+1\end{cases}$$

Como hemos definido anteriormente, el dominio de una función es el conjunto de partida, en este caso $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{Z}$. El codominio es el conjunto de llegada, por lo tanto es igual al conjunto de los números reales. ¿Y la imagen? ¿son los números reales? La respuesta es NO, porque si a cualquier número entero le sumamos uno, da como resultado otro entero (esta suma no puede dar como resultado un número fraccionario o irracional). Por lo tanto, la imagen de la función son los números enteros, $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{Z}$.

Para graficar hay que tener mucho cuidado. Porque lo que intuitivamente se hace es graficar una recta con trazo continuo y esto NO ES CORRECTO, porque el trazo continuo estaría indicando que el dominio son todos los números reales. Pero, si bien el conjunto de los enteros es infinito, es un conjunto discreto. Una forma de graficar esta función es graficando la recta con una línea de puntos y sobre ella marcar los puntos pertenecientes a la función.



Problema 3:

Dadas las funciones $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que:

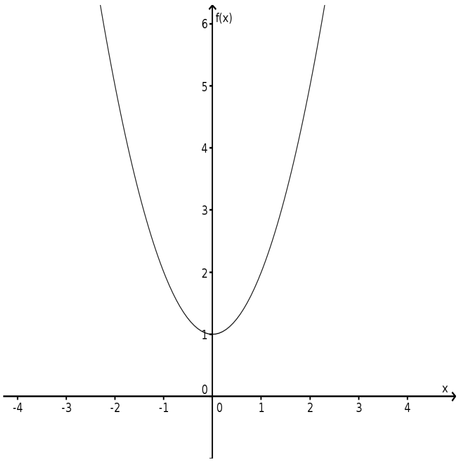
$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{(x^2+1)(x-1)}{(x-1)}$$

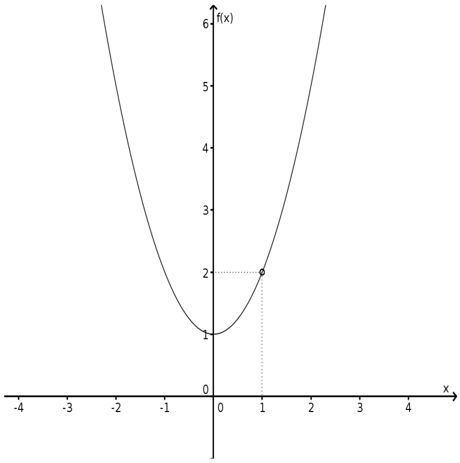
decir si son iguales. Grafique.

Si uno responde rápidamente, sin analizar detenidamente el problema, diría que son iguales, debido a que se puede simplificar el factor $(x-1)$ y así resulta que $g(x) = x^2 + 1 = f(x)$.

Sin embargo, LA RESOLUCIÓN ANTERIOR NO ES CORRECTA, debido a que el dominio de la función g es igual a $\mathbb{R} - \{1\}$ ya que la división por cero no está definida. Mientras que el dominio de la función f sí son todos los números reales. Luego, como f y g no tienen el mismo dominio, no son iguales.

Para graficar la función g, lo que se hace es señalar con un círculo vacío el punto que no pertenece al dominio.





Problema 4: Halle el punto de intersección entre la recta que pasa por los puntos $(6,4)$ y $(-4,2)$ y otra que es perpendicular a la primera, y pasa por el punto $(-1,13)$. Grafique.

Para poder hallar el punto de intersección, primero hay que encontrar las expresiones de las rectas. Entonces, primero vamos a hallar la recta que pasa por los puntos $(6,4)$ y $(-4,2)$. A esta recta la llamaremos y, y como es una recta debe cumplir que $y = a\,x + b$.

Que la recta pase por determinados puntos, significa que esos puntos satisfacen la ecuación de la recta es decir que:

$$\begin{aligned} 4 &= a\,6 + b \\ 2 &= a\,(-4) + b \end{aligned}$$

Así, tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. La resolución de este tipo de sistemas lo vimos en el capítulo anterior.

En este caso, para resolver el problema vamos a utilizar la ecuación 4.6 dada anteriormente.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Entonces, reemplazando $(x_1, y_1) = (6,4)$ y $(x_2, y_2) = (-4,2)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{2-4}{-4-6} &= \frac{y-4}{x-6} \\ \frac{-2}{-10}(x-6) &= y-4 \\ \frac{1}{5}\,x - \frac{6}{5} + 4 &= y \\ \frac{1}{5}\,x + \frac{14}{5} &= y \end{aligned}$$

Finalmente, encontramos que $a = 1/5$ y $b = 14/5$, luego la recta será:

$$y = \frac{1}{5}\,x + \frac{14}{5}$$

Ahora tenemos que encontrar la expresión de una recta perpendicular a y y que pase por el punto $(-1, 13)$. A esta nueva recta la llamaremos y', y su expresión será $y' = a'\,x + b'$. Como y e y' son perpendiculares, sus pendientes deben ser inversas y opuestas, es decir que $a\,a' = -1$. Entonces, podemos encontrar el valor de la pendiente a':

$$\begin{aligned} a\,a' &= -1 \\ \frac{1}{5}\,a' &= -1 \\ a' &= -5 \end{aligned}$$

Luego, para hallar el valor de b' utilizamos el dato de que el punto $(-1, 13)$ pertenece a la recta, entonces:

$$\begin{aligned} 13 &= a'\,(-1) + b' \\ 13 &= -5\,(-1) + b' \\ 13 - 5 &= b' \\ b' &= 8 \end{aligned}$$

Así la expresión de esta recta es:

$$y' = -5x + 8$$

De esta manera hemos encontrado que la recta $y' = -5\,x + 8$ es perpendicular a la recta $y = (1/5)\,x + (14/5)$.

Para terminar el ejercicio hay que encontrar el punto de intersección entre las rectas.

En este punto se encuentran las dos rectas, es decir, que el punto de intersección es un punto que pertenece a las dos rectas. Esto significa que el punto de intersección con coordenadas (x_0, y_0) debe satisfacer ambas funciones.

$$\begin{aligned} &y_0 = (1/5)\,x_0 + (14/5) \\ &y_0 = -5\,x_0 + 8 \end{aligned}$$

Para encontrar x_0 igualamos los segundos miembros de las ecuaciones, ya que ambos son iguales a y_0. De este modo tenemos que:

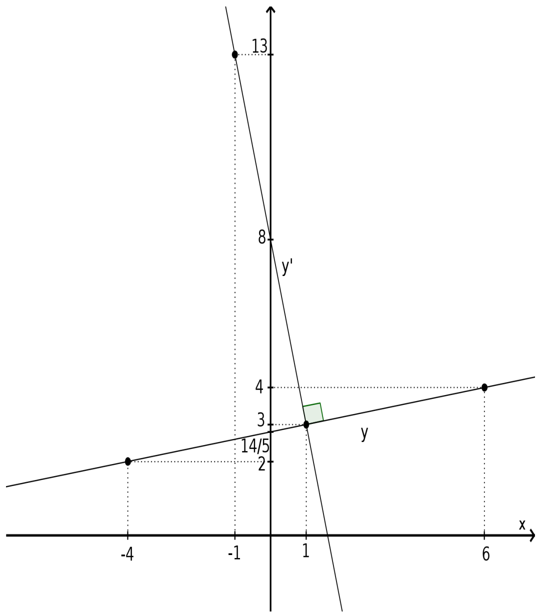
$$\begin{aligned} \frac{1}{5}\,x_0 + \frac{14}{5} &= -5\,x_0 + 8 \\ \frac{1}{5}\,x_0 + 5\,x_0 &= 8 - \frac{14}{5} \\ \frac{1 + 25}{5}\,x_0 &= \frac{40 - 14}{5} \\ \frac{2\cancel{6}}{\cancel{5}}\,x_0 &= \frac{2\cancel{6}}{\cancel{5}} \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

Una vez encontrada la coordenada x_0 del punto de intersección, la coordenada y_0 se encuentra evaluando en cualquiera de las funciones (porque deben dar lo mismo ya que $y_0 = y_0 y(x_0) = y'(x_0)$). Por lo tanto:

$$y_0 = -5\,1 + 8 = -5 + 8 = 3$$

Finalmente encontramos que el punto de intersección es el punto $(1, 3)$.

Luego graficamos las rectas. En este gráfico **lo importante es que los resultados encontrados analíticamente coincidan con los graficados.** El gráfico debe ser esquemático, por lo que es suficiente indicar el punto de intersección y los datos iniciales del problema.



Problema 5: Encuentre la parábola que pasa por los puntos $(1,\ \frac{9}{2})$, $(-\frac{3}{2},\ 7)$ y $(\frac{1}{2},\ 2)$. Halle sus raíces, su vértice y su imagen. Grafique

Cualquier parábola cumple que $y = a\,x^2 + b\,x + c$, y cualquier punto que pertenezca a ella debe satisfacer la relación anterior. De modo que si los puntos $(1,\ \frac{9}{2})$, $(-\frac{3}{2},\ 7)$ y $(\frac{1}{2},\ 2)$ pertenecen a la parábola tendremos que

$$\begin{aligned}
\frac{9}{2} &= a\,1^2 + b\,1 + c = a + b + c \\
7 &= a\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{3}{2}\right) + c = a\,\frac{9}{4} - b\,\frac{3}{2} + c \\
2 &= a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\,\frac{1}{2} + c = a\,\frac{1}{4} + b\,\frac{1}{2} + c
\end{aligned}$$

Así conseguimos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Para resolverlo vamos a empezar despejando una de las variables de alguna de las ecuaciones, por ejemplo podemos despejar a de la primera ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{2} &= a + b + c \\
a &= \frac{9}{2} - b - c
\end{aligned}$$

Luego, reemplazamos esta expresión en la segunda ecuación del sistema:

$$
\begin{aligned}
7 &= a\,\frac{9}{4} - b\,\frac{3}{2} + c \\
&= \left(\frac{9}{2} - b - c\right)\,\frac{9}{4} - b\,\frac{3}{2} + c \\
&= \frac{81}{8} - \frac{9}{4}\,b - \frac{9}{4}\,c - \frac{3}{2}\,b + c \\
&= \frac{81}{8} - \frac{9+6}{4}\,b + \frac{4-9}{4}\,c \\
&= \frac{81}{8} - \frac{15}{4}\,b - \frac{5}{4}\,c
\end{aligned}
$$

y despejamos b:

$$
\begin{aligned}
7 &= \frac{81}{8} - \frac{15}{4}\,b - \frac{5}{4}\,c \\
-\frac{15}{4}\,b &= 7 - \frac{81}{8} + \frac{5}{4}\,c \\
b &= \left(\frac{56-81}{8} + \frac{5}{4}\,c\right)\left(-\frac{4}{15}\right) \\
b &= \left(-\frac{25}{8}\right)\left(-\frac{4}{15}\right) + \frac{5}{4}\left(-\frac{4}{15}\right)\,c \\
b &= \frac{5}{6} - \frac{1}{3}\,c
\end{aligned}
$$

Finalmente reemplazamos $a = \dfrac{9}{2} - b - c$ y $b = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{3}\,c$ en la última ecuación del sistema:

$$
\begin{aligned}
2 &= a\,\frac{1}{4} + b\,\frac{1}{2} + c \\
&= \left[\frac{9}{2} - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\,c\right) - c\right]\,\frac{1}{4} + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\,c\right)\,\frac{1}{2} + c \\
&= \left(\frac{27-5}{6}\right)\,\frac{1}{4} + \left(\frac{1-3}{3}\right)\,\frac{1}{4}\,c + \frac{5}{12} - \frac{1}{6}\,c + c \\
&= \frac{11}{12} - \frac{1}{6}\,c + \frac{5}{12} - \frac{1}{6}\,c + c \\
&= \frac{11+5}{12} + \frac{6-1-1}{6}\,c \\
&= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\,c
\end{aligned}
$$

despejamos c:

$$
\begin{aligned}
2 &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\,c \\
c &= \left(2 - \frac{4}{3}\right)\,\frac{3}{2} = \left(\frac{6-4}{3}\right)\,\frac{3}{2} \\
c &= 1
\end{aligned}
$$

Así encontramos $c = 1$. Y como habíamos encontrado que $b = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}\,c$, resulta que $b = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}\,1 = \frac{1}{2}$ y finalmente utilizando que $a = \frac{9}{2} - b - c$ obtenemos que $a = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - 1 = 3$. Por lo tanto la parábola que buscamos tiene la forma:

$$y = 3\,x^2 + \frac{1}{2}\,x + 1$$

Ahora debemos encontrar las raíces de la parábola, es decir que debemos hallar los puntos de intersección entre la función y el eje de las abscisas.

Entonces, debemos encontrar los valores de x que anulen la función, esto es:

$$3\,x^2 + \frac{1}{2}\,x + 1 = 0$$

Para resolver esta ecuación utilizamos que los valores de x que satisfacen la ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ son de la forma:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

En nuestro caso tenemos que $a = 3$, $b = \frac{1}{2}$ y $c = 1$, entonces:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\,.\,3\,.\,1}}{2\,.\,3} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 12}}{6} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-48}{4}}}{6} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{47}{4}}}{6}$$

Como la raíz cuadrada de un número negativo no existe en los reales, resulta que la ecuación no tiene solución. Por lo tanto **la parábola no corta al eje de las abscisas.**

Finalmente, para hallar el vértice utilizamos la relación 4.14:

$$x_v = \frac{-b}{2\,a} = \frac{-\frac{1}{2}}{2\,.\,3} = -\frac{1}{2\,.\,6} = -\frac{1}{12}$$

y la coordenada y del vértice la encontramos evaluando la función en x_v:

$$\begin{aligned}
y_v &= 3\,x_v^2 + \frac{1}{2}\,x_v + 1 \\
&= 3\left(-\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\right) + 1 \\
&= 3\,\frac{1}{144} - \frac{1}{24} + 1 \\
&= \frac{3}{144} - \frac{1}{24} + 1 \\
&= \frac{3 - 6 + 144}{144} \\
&= \frac{\cancel{141}^{47}}{\cancel{144}_{48}} = \frac{47}{48}
\end{aligned}$$

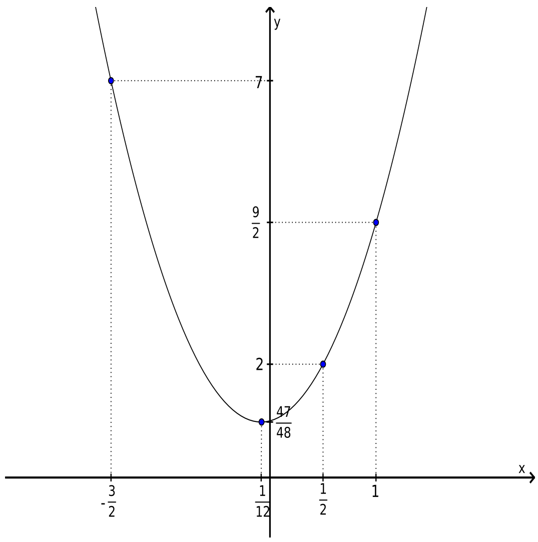
Luego, el vértice de la parábola es el punto $(x_v, y_v) = (\frac{1}{12}, \frac{47}{48})$.

Por último, debemos encontrar la imagen de la función. Como el coeficiente principal de la parábola es positivo, resulta que la gráfica es cóncava hacia arriba. Por lo tanto, la imagen estará conformada por todos los número reales mayores o iguales que y_v, es decir que:

$$Im(y) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y > y_v\} = [y_v, +\infty)$$

En este caso la imagen será

$$Im(y) = \left[\frac{47}{48}, +\infty\right)$$



Problema 6: Encuentre la recta y la parábola que se intersecan en los puntos $(-1, 2)$ y $(2, -1)$ teniendo en cuenta que el vértice de la parábola es el punto $(\frac{1}{4}, \frac{41}{8})$. Encuentre las raíces de la parábola y diga si es o no una función par. Grafique.

Para resolver el problema tenemos que encontrar la recta $y_1 = a_1\,x + b_1$ y la parábola $y_2 = a_2\,x^2 + b_2\,x + c_2$. Lo que sabemos es que los puntos $(-1, 2)$ y $(2, -1)$ pertenecen a ambas funciones. Así tenemos los dos puntos necesarios para encontrar la recta. Entonces, hay que resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2 &= -a_1 + b_1 \\ -1 &= 2\,a_1 + b_1 \end{cases}$$

De la primera ecuación tenemos que $b_1 = 2 + a_1$ y reemplazando esto en la segunda igualdad obtenemos el valor de la pendiente:

$$\begin{aligned} -1 &= 2\,a_1 + 2 + a_1 = 3\,a_1 + 2 \\ a_1 &= \frac{-1-2}{3} = -1 \end{aligned}$$

luego, $b_1 = 2 - 1 = 1$. Finalmente, la recta es:

$$y_1 = -x + 1$$

Ahora hay que encontrar la parábola, para esto tenemos los tres puntos $(-1, 2)$, $(2, -1)$ (donde se interseca con la recta) y $(\frac{1}{4}, \frac{41}{8})$ (el vértice). Entonces el sistema que hay que resolver es:

$$\begin{cases} 2 & = & a_2 - b_2 + c_2 \\ -1 & = & 4\,a_2 + 2\,b_2 + c_2 \\ \dfrac{41}{8} & = & \dfrac{1}{16}\,a_2 + \dfrac{1}{4}\,b_2 + c_2 \end{cases}$$

De la primera ecuación tenemos que $c_2 = 2 + b_2 - a_2$ y reemplazando esto en la segunda ecuación obtenemos que:

$$\begin{array}{rcl} -1 & = & 4\,a_2 + 2\,b_2 + 2 + b_2 - a_2 = 3\,a_2 + 3\,b_2 + 2 \\ b_2 & = & \dfrac{-1 - 2 - 3\,a_2}{3} = -1 - a_2 \end{array}$$

Luego, utilizamos la tercera ecuación del sistema reemplazando que $b_2 = -1 - a_2$ y que $c_2 = 2 + b_2 - a_2 = 2 - 1 - a_2 - a_2 = 1 - 2\,a_2$:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{41}{8} & = & \dfrac{1}{16}\,a_2 + \dfrac{1}{4}\,(-1 - a_2) + 1 - 2\,a_2 = \left(\dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{4} - 2\right)\,a_2 - \dfrac{1}{4} + 1 \\ \dfrac{41}{8} & = & -\dfrac{35}{16}\,a_2 + \dfrac{3}{4} \\ a_2 & = & \dfrac{\frac{41}{8} - \frac{3}{4}}{-\frac{35}{16}} = -2 \end{array}$$

Por lo tanto, si $a_2 = -2$ resulta que $b_2 = -1 + 2 = 1$ y $c_2 = 1 + 4 = 5$. Finalmente, la parábola es:

$$y_2 = -2\,x^2 + x + 5$$

Para encontrar las raíces de la parábola tenemos que encontrar la intersección con el eje de las abscisas, entonces:

$$0 = -2\,x^2 + x + 5$$

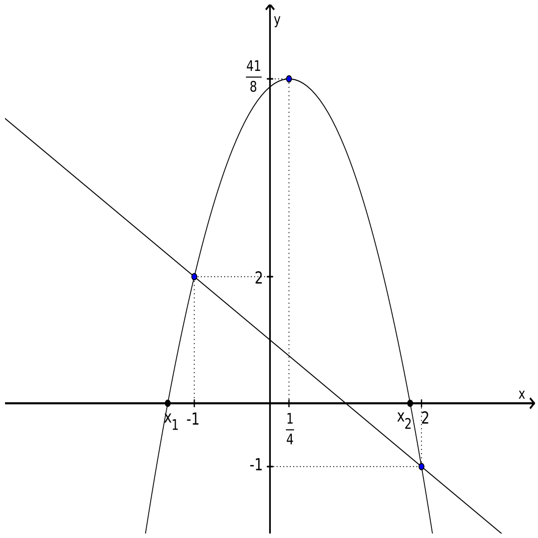
Luego tendremos que:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\,.\,(-2)\,.\,5}}{2\,.\,(-2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 40}}{-4}$$

Por tanto

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{41}}{-4}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{41}}{-4}$$



Por último nos queda analizar la paridad de la función. Para que una función sea par debe cumplir que $f(k) = f(-k)$ para cualquier valor de k perteneciente al dominio. En este caso, el dominio son los números reales, entonces $k \in \mathbb{R}$, y si $f(x) = -2\,x^2 + x + 5$ y evaluamos en k resulta que:

$$f(k) = -2\,k^2 + k + 5$$

y si evaluamos en $-k$ tenemos que:

$$f(-k) = -2\,(-k)^2 - k + 5 = -2\,k^2 - k + 5$$

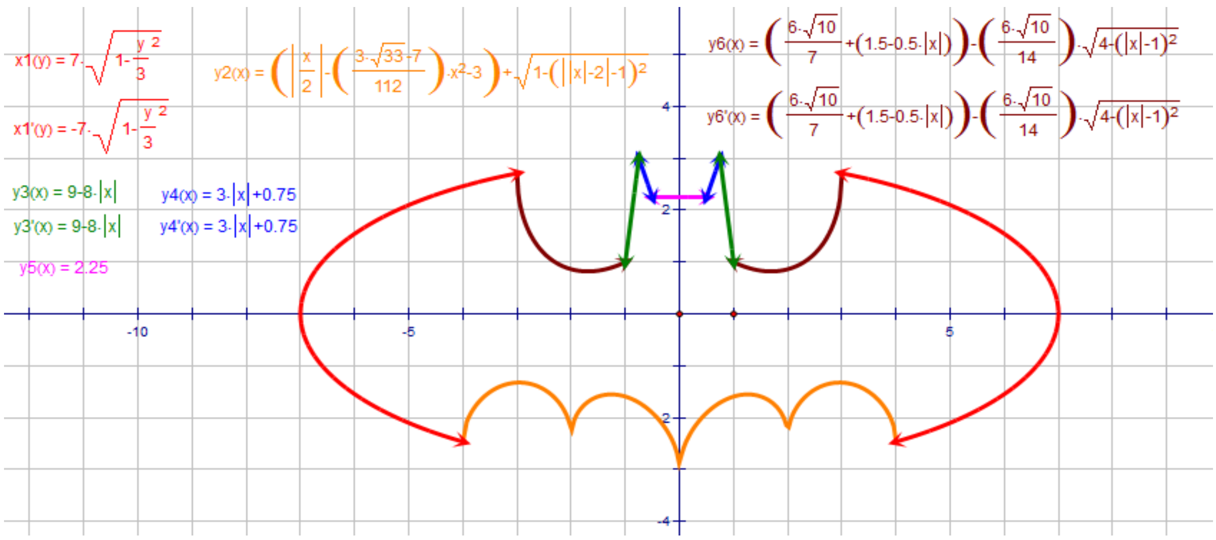
y veamos si se cumple que $f(k) = f(-k)$,

$$\begin{array}{rcl} f(k) & = & f(-k) \\ \cancel{-2\,k^2} + k + \cancel{5} & = & \cancel{-2\,k^2} - k + \cancel{5} \\ k & = & -k \Longrightarrow k = 0 \end{array}$$

De aquí que $f(k) = f(-k)$ sólo se cumple cuando $k = 0$. Por lo tanto, como la igualdad no se cumple para todos los elementos del dominio, la función no es par.

Lectura complementaria

Funciones no polinómicas



Facultad de Ciencias
Astronómicas
y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Funciones no polinómicas

En esta sección vamos a mostrar las gráficas de algunas funciones no polinómicas.

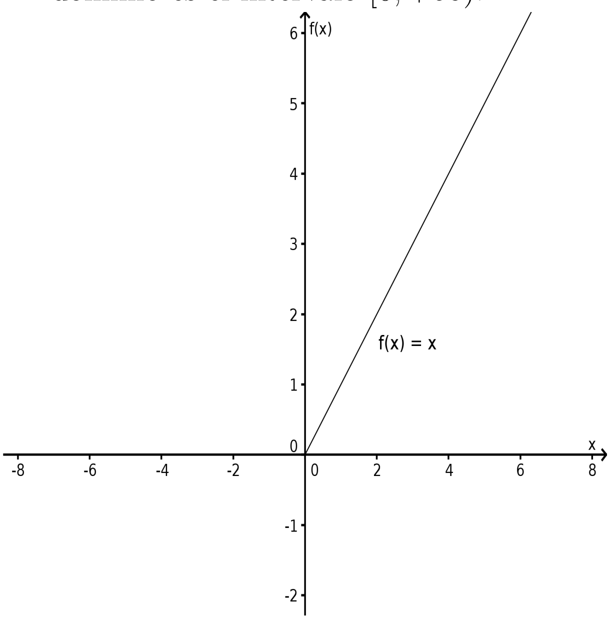
Función módulo o valor absoluto

La función módulo se define como:

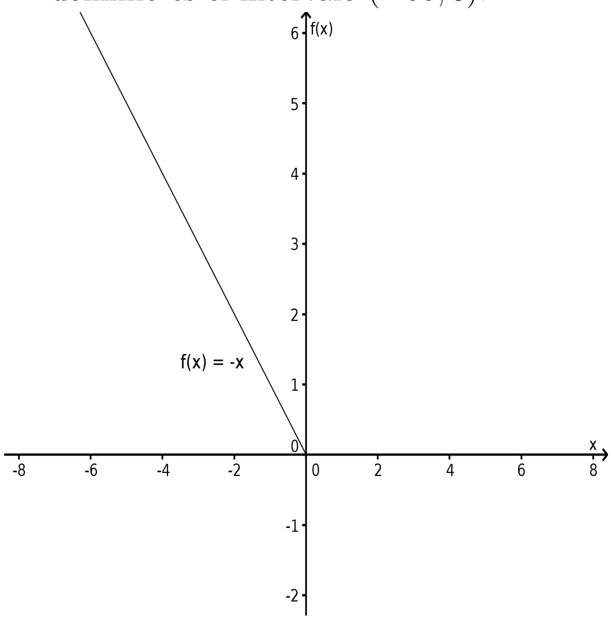
$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Para graficar esta función hacemos el siguiente análisis:

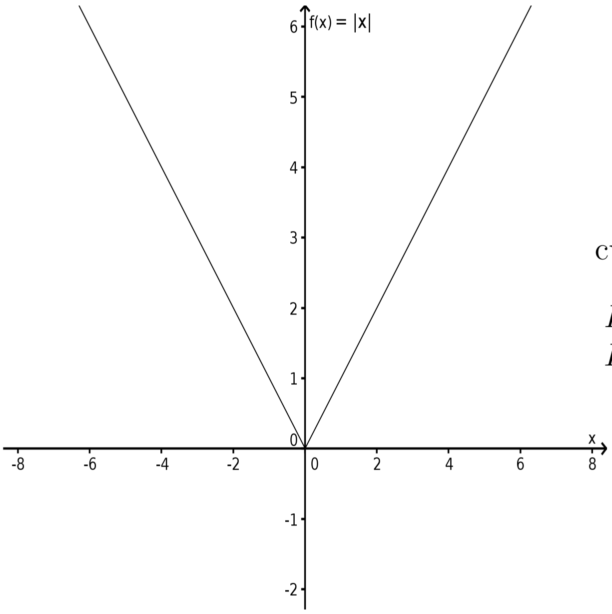
Si $x \geq 0$ resulta que $f(x) = x$ y la gráfica de $f(x)$ es una recta cuyo dominio es el intervalo $[0; +\infty)$.



Si $x < 0$ resulta que $f(x) = -x$ y la gráfica de $f(x)$ es una recta cuyo dominio es el intervalo $(-\infty; 0)$.



Finalmente, juntando ambos resultados, obtenemos que la gráfica de $f(x) = |x|$ es:



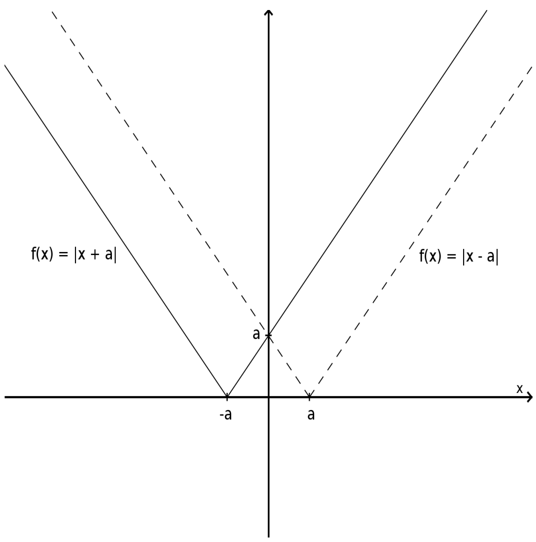
cuyo dominio e imagen son

$Dom(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [0; +\infty) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Ahora, veamos algunas variantes de la función módulo. Supongamos que a, b y c son tres números reales y positivos. Entonces, siguiendo el análisis anterior:

- $\boldsymbol{f(x) = |x \pm a|}$

$$x \pm a \geq 0 \Longrightarrow f(x) = x \pm a \quad \text{si } x \geq \mp a$$
$$x \pm a < 0 \Longrightarrow f(x) = -(x \pm a) = -x \mp a \quad \text{si } x < \mp a$$

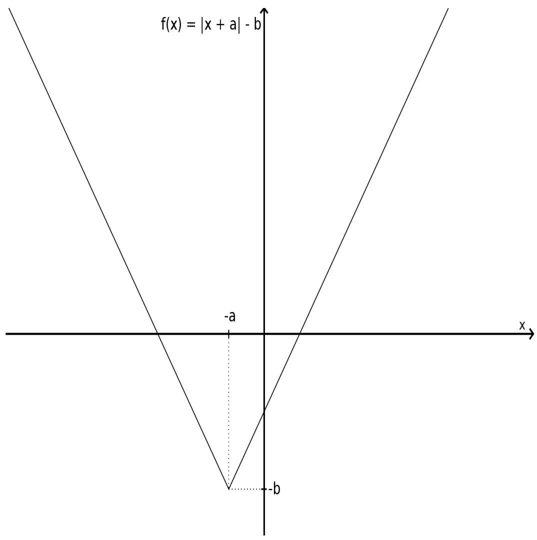


En este caso el dominio y la imagen de ambas funciones son

$Dom(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [0; +\infty)$

- $\boldsymbol{f(x) = |x + a| - b}$

$$x + a \geq 0 \Longrightarrow f(x) = x + a - b \quad \text{si } x \geq -a$$
$$x + a < 0 \Longrightarrow f(x) = -(x + a) - b = -x - a - b \quad \text{si } x < -a$$

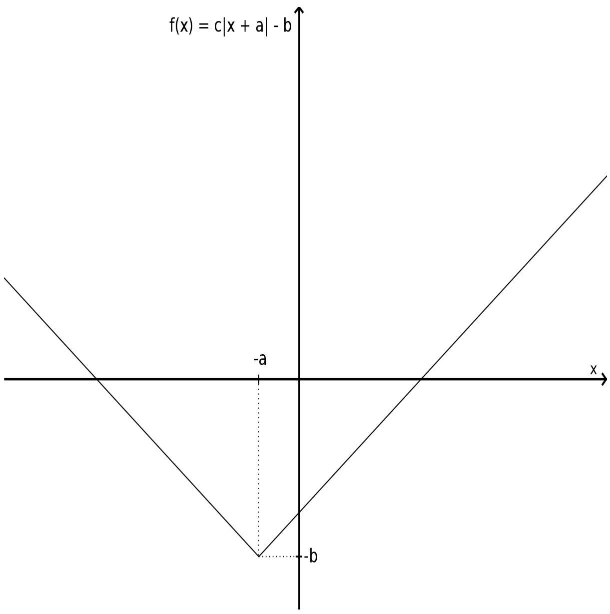


En este caso el dominio y la imagen son

$Dom(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [-b; +\infty)$

- $\boldsymbol{f(x) = c\,|x + a| - b}$

$$x + a \geq 0 \Longrightarrow f(x) = c\,(x + a) - b = c\,x + c\,a - b \quad \text{si } x \geq -a$$
$$x + a < 0 \Longrightarrow f(x) = -c\,(x + a) - b = -c\,x - c\,a - b \quad \text{si } x < -a$$



En este caso el dominio y la imagen son

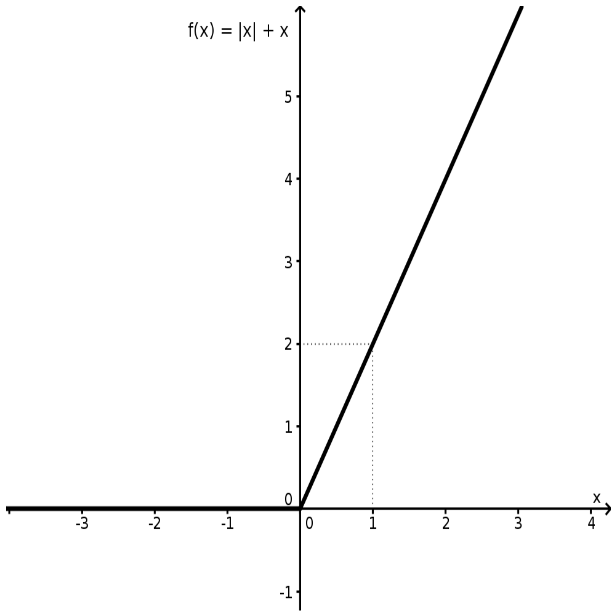
$Dom(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [-b; +\infty)$

El mismo análisis se hace cuando a, b ó c son negativos.

Otras variantes de la función módulo se da cuando se suma (o se resta) o se multiplica por una expresión que depende de la misma variable que la del valor absoluto.

Ejemplo: *Consideremos la función* $f(x) = |x| + x$

$$\begin{array}{l} x \geq 0 \Longrightarrow f(x) = x + x = 2\,x \\ x < 0 \Longrightarrow f(x) = -x + x = 0 \end{array}$$



En este caso el dominio y la imagen son

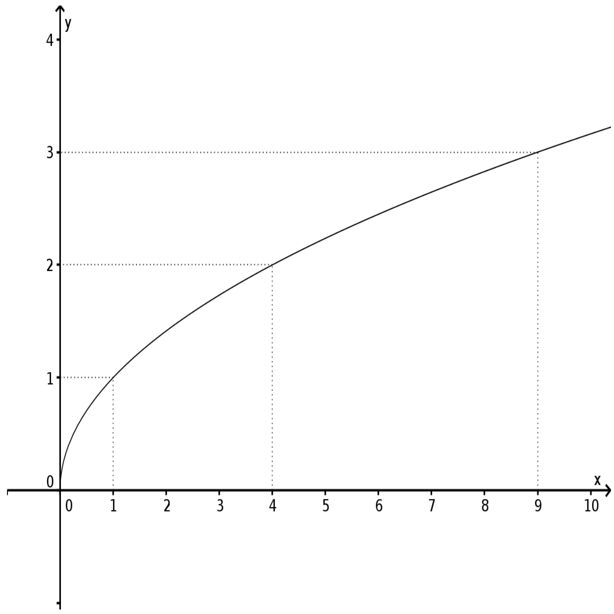
$$\begin{array}{l} Dom(f) = \mathbb{R} \\ Im(f) = [0; +\infty) \end{array}$$

Función raíz cuadrada

La función raíz cuadrada está definida sólo para argumentos positivos.

$$\begin{cases} f:\ [0; +\infty) \to \mathbb{R} \\ f(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

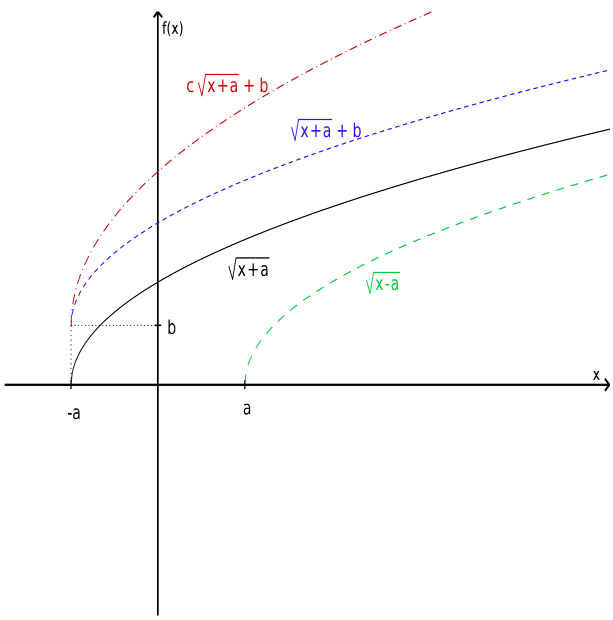
Así definida, la gráfica de $f(x)$ es una media parábola cuyo eje de simetría es el de las abcisas



Su dominio e imagen son

$$Dom(f) = [0; +\infty) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$Im(f) = [0; +\infty) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Del mismo modo que sucede con la función módulo, uno puede desplazar la gráfica modificando el argumento sumando y/o multiplicando por un número real cualquiera. Tomemos nuevamente tres números a, b y c reales y positivos. Entonces,



$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+a} \\ Dom(f) = [-a; +\infty) \\ Im(f) = [0; +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+a} + b \\ Dom(f) = [-a; +\infty) \\ Im(f) = [b; +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = c\sqrt{x+a} + b \\ Dom(f) = [-a; +\infty) \\ Im(f) = [b; +\infty) \end{cases}$$

Función logaritmo

La definición de logaritmo es:

$$\forall a,\, b \in \mathbb{R}^+ \text{ y } a \neq 1,\, \log_a b = c \Longleftrightarrow a^c = b$$

donde a es la base y b el argumento. De modo que la función logarítmica será:

$$\begin{cases} f: (0; +\infty) \to \mathbb{R} \\ f(x) = \log_a x \\ a > 0 \text{ y } a \neq 1 \end{cases}$$

El dominio y la imagen son:

$$\begin{array}{l} Dom(f) = (0; +\infty) = \mathbb{R}^+ \\ Im(f) = \mathbb{R} \end{array}$$

En general, las funciones logarítmicas más utilizadas son:

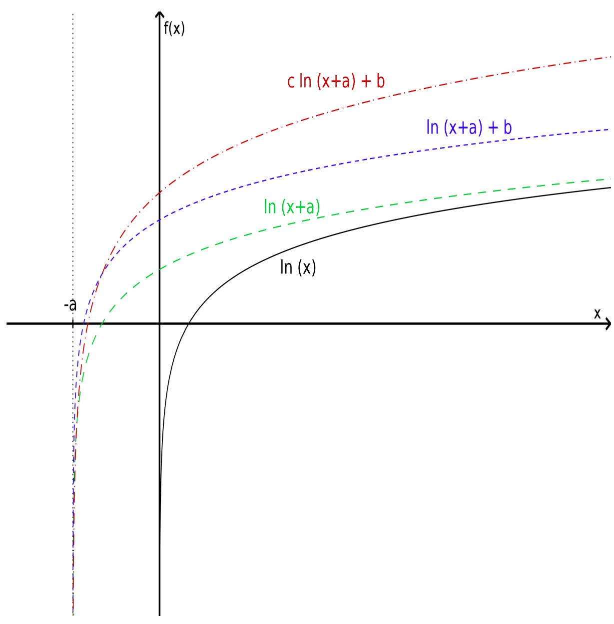
Logaritmo decimal: es cuando se toma el logaritmo en base 10, y se escribe como $\log x \equiv \log_{10} x$. Es decir que la función del logaritmo decimal se define como:

$$\begin{cases} f: (0; +\infty) \to \mathbb{R} \\ f(x) = \log x \end{cases}$$

Logaritmo natural o neperiano: es cuando se toma el logaritmo en base e (el número neperiano es un número irracional, $e = 2.718281828\ldots$), y se escribe como $\ln x \equiv \log_e x$. Es decir que la función del logaritmo natural se define como:

$$\begin{cases} f: (0; +\infty) \to \mathbb{R} \\ f(x) = \ln x \end{cases}$$

Algunos ejemplos de funciones logarítmicas son las siguientes (a, b y c son tres números reales y positivos).



$$\begin{cases} f(x) = \ln(x + a) \\ Dom(f) = (-a; +\infty) \\ Im(f) = \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \ln(x + a) + b \\ Dom(f) = (-a; +\infty) \\ Im(f) = \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = c\ \ln(x + a) + b \\ Dom(f) = (-a; +\infty) \\ Im(f) = \mathbb{R} \end{cases}$$

Función exponencial

La función exponencial se define como:

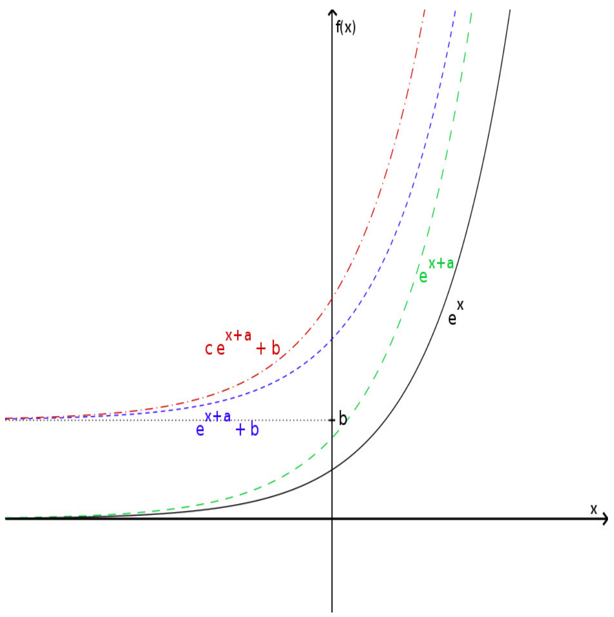
$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = a^x \end{cases}$$

donde a es un número positivo cualquiera. El dominio y la imagen son:

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$
$$Im(f) = \mathbb{R}^+$$

El argumento de la exponencial está obligado a ser un número positivo porque x puede tomar cualquier valor, por ejemplo si $a = 3$ entonces tendremos que $f(0) = 3^0 = 1$, $f(1) = 3^1 = 3$ y $f(1/2) = 3^{1/2} = \sqrt{3} = 1.73205\ldots$, sin embargo si $a = -3$ tendremos que $f(0) = (-3)^0 = 1$, $f(1) = (-3)^1 = -3$ y $f(1/2) = (-3)^{1/2} = \sqrt{-3} = \nexists$. Generalizando tenemos que las potencias racionales con denominador par y las irracionales sólo están definidas para números positivos. Por esto las expresiones exponenciales estarán definidas sólo si la base es positiva.

Al igual que en las funciones logarítmicas, las bases más utilizadas son $a = 10$ y $a = e$.



$$\begin{cases} f(x) = e^{x+a} \\ Dom(f) = \mathbb{R} \\ Im(f) = (0; +\infty) = \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = e^{x+a} + b \\ Dom(f) = \mathbb{R} \\ Im(f) = (b; +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = c\,e^{x+a} + b \\ Dom(f) = \mathbb{R} \\ Im(f) = (b; +\infty) \end{cases}$$

Práctica 4

1. Para los siguientes pares de conjuntos realizá el producto cartesiano.

   a) $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{x, y, z\}$

   b) $C = \{\text{rojo, amarillo, azul}\}$ y $D = \{\text{blanco, negro}\}$

   c) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

2. Analizá las siguientes tablas e identifica las que corresponden a funciones.

A	B
m	2
n	1
ñ	4
o	6

(a)

C	D
a	0
b	1
c	3
a	5

(b)

E	F
1	5
2	5
3	6
4	7

(c)

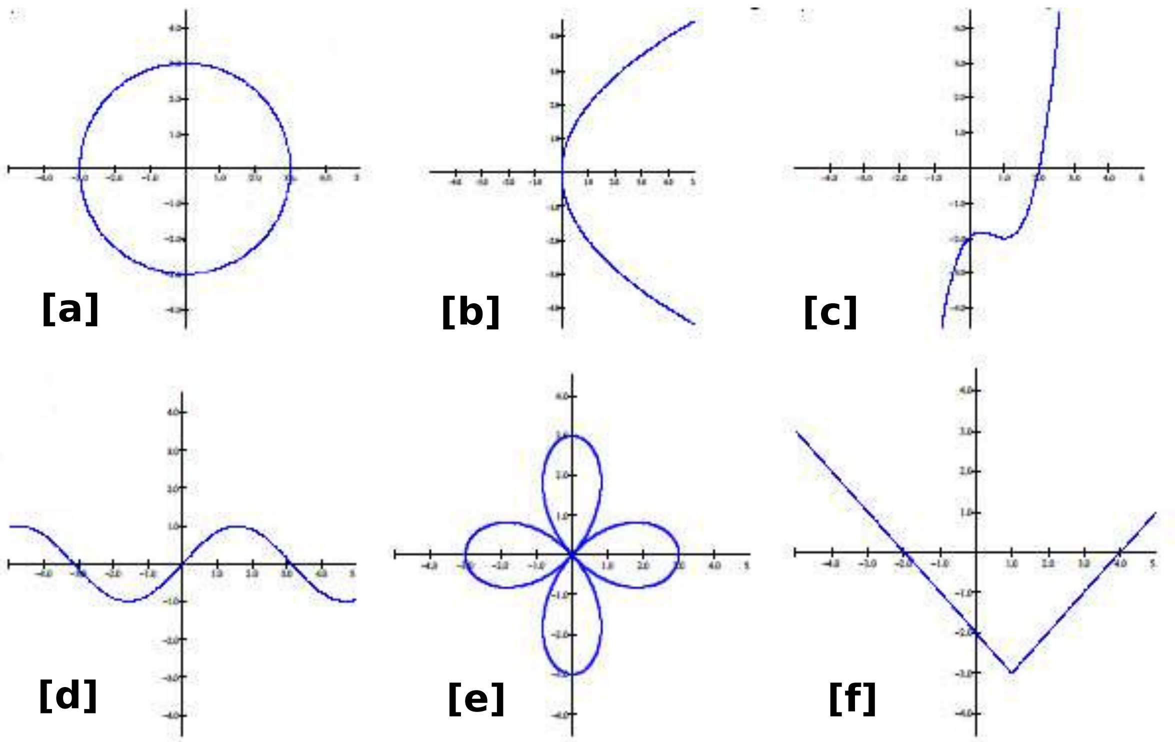
3. Determiná cuáles de las siguientes aplicaciones son funciones. Justificá.

   a) Sean los conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
   $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
   y la aplicación $R = \{(h, k)/\, h \in A,\, k \in B,\, \text{“}h\,\text{es múltiplo de}\,k\text{”}\}$

   b) Sean los conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ y la aplicación $G = \{(x, y)/\, x \in A,\, y \in B,\, y = -x\}$

   c) Sean los conjuntos $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ y $E = \{4, 3, 2, 1, 0, -1\}$ y la aplicación $H = \{(x, y)/\, x \in C,\, y \in E,\, y = x\}$.

4. Determiná cuáles de las siguientes curvas corresponden a funciones justificando tu respuesta.



5. Determiná el dominio natural de las siguientes funciones.

   a) $A(x) = 2\,x\; -\; 4$

   b) $B(z) = z^2\; +\; 1$

   c) $C(r) = \dfrac{r\; +\; 1}{r\; -\; 3}$

   d) $D(u) = \sqrt{u}$

   e) $E(w) = \dfrac{w\; -\; 2}{w^2\; -\; 4}$

   f) $F(q) = \sqrt{4\; -\; q^2}$

6. Determiná el dominio, el codominio y la imagen de las siguientes funciones.

   a) $\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = |x| \end{cases}$

   Sugerencia: repasar la definición de valor absoluto dada en el Capítulo 1.

   b) $\begin{cases} f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\ f(z) = 2 - z \end{cases}$

   c) $\begin{cases} g : \mathbb{Z} - \{2\} \to \mathbb{Z} \\ g(y) = \dfrac{y^2 - 4}{y - 2} \end{cases}$

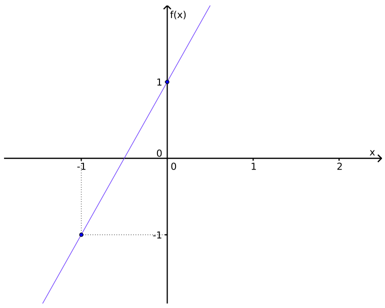
7. Justificá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas suponiendo que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Si $f(x_1) = f(x_2)$ la relación no es función siendo x_1 y x_2 dos elementos distintos del dominio.

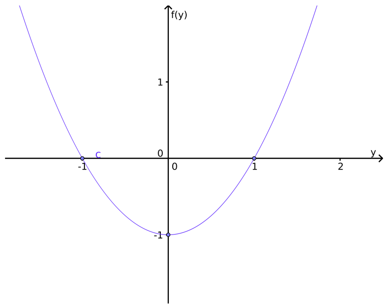
b) Si no existe un x tal que $f(x) = b$, con $b \in \mathbb{R}$, entonces f no es función.

c) $\forall\, x_1, x_2$ distintos pertenecientes al dominio de f, $f(x_1) \neq f(x_2)$ entonces la función es inyectiva.

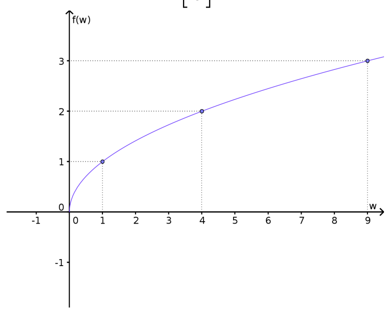
8. Determiná la inyectividad, suryectividad y/o biyectividad de las siguientes funciones considerando que el dominio y codominio de todas ellas son todos los números reales, excepto $f(w) = \sqrt{w}$ cuyo dominio son todos los reales positivos:



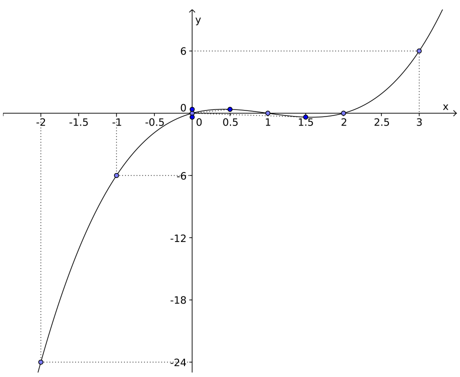
[a]



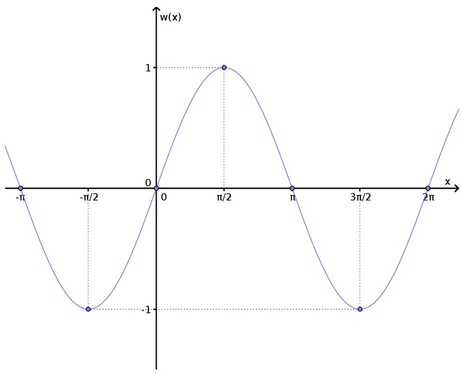
[b]



[c]



[d]



[e]

9. Analizá si los siguientes pares de funciones son iguales justificando tu respuesta. (Sugerencia: repasá las propiedades de raíz, potencias y logaritmo dadas en el Capítulo 1.)

a) $A(y) = y - 3$ y $B(y) = \dfrac{y^2 - 9}{y + 3}$

b) $C(z) = \sqrt{z + 2}$ y $D(z) = \sqrt[4]{(z + 2)^2}$

c) $H(w) = |w|^2$ y $J(w) = w^2$

d) $X(y) = (\sqrt{y})^2$ y $Z(y) = \sqrt{y^2}$

e) $P(x) = \log(x^2)$ y $Q(x) = (\log x)^2$

10. Definí la paridad de las siguientes funciones.

a) $\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(a) = |a| \end{cases}$

b) $\begin{cases} h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ h(z) = -z^3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ k(z) = z^2 + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} p : [2, +\infty) \to \mathbb{R} \\ p(f) = \sqrt{f - 2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ h(z) = -z^2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(a) = |a + 1| \end{cases}$

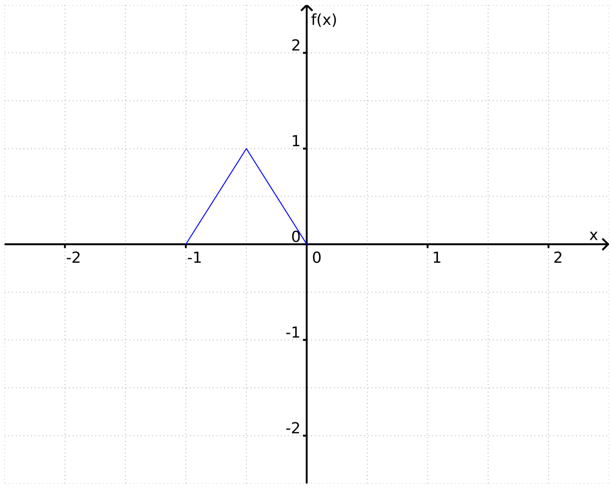
g) $\begin{cases} k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - 0 \\ k(z) = \frac{1}{z} \end{cases}$

h) $\begin{cases} p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ p(f) = f^3 - 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} q(y) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ q(y) = \log(y) \end{cases}$

j) $\begin{cases} r : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ r(y) = \log(|y|) \end{cases}$

11. La función $f(x)$ está definida en el intervalo $[-1, 1]$. En la figura se da la gráfica sobre la región $[-1; 0]$. Completá la gráfica sabiendo que: a) $f(x)$ es par; y b) $f(x)$ es impar.



12. Sea el conjunto $A = \{x/\, x \,\text{es un número par}\}$. Sea $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x$. Graficá $f(x)$, y expresá cuáles son su dominio, su codominio, su imagen y su paridad.

13. Determiná inyectividad, suryectividad, biyectividad y la paridad de las siguientes funciones. (Sugerencia: repasá la definición de valor absoluto dada en el Capítulo 1.)

    a) $\begin{cases} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = |-x| \end{cases}$

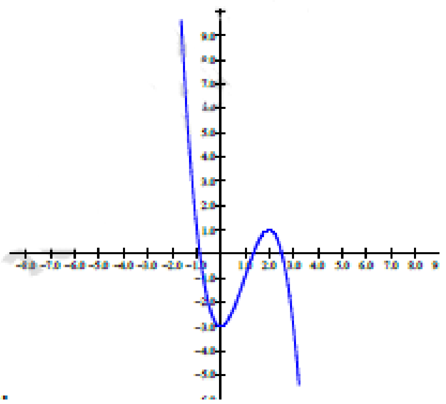
    b) $\begin{cases} r : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ r(y) = -2y^2 \end{cases}$

    c) $\begin{cases} t : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t(z) = |z|^2 \end{cases}$

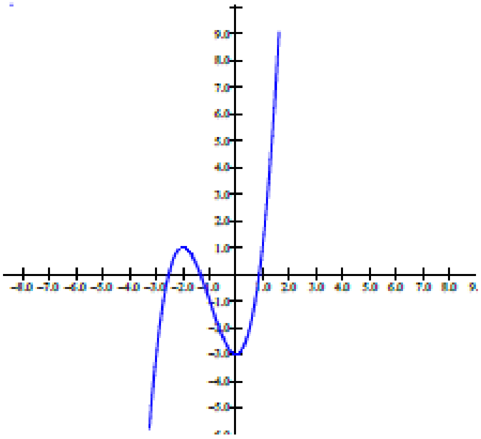
    d) $\begin{cases} z : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ z(x) = x \end{cases}$

    e) $\begin{cases} z : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ z(x) = x \end{cases}$

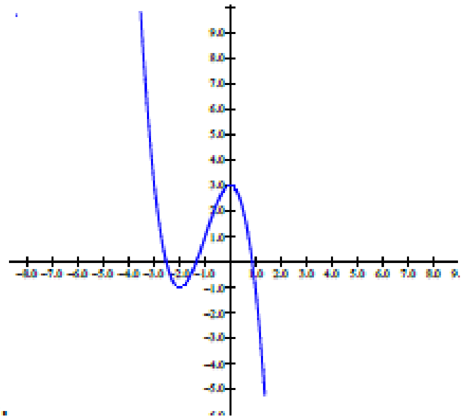
14. La gráfica 1 es la de $f(x)$, determiná cuáles de las siguientes corresponden a $-f(x)$, $f(-x)$ y $-f(-x)$. Justificá.



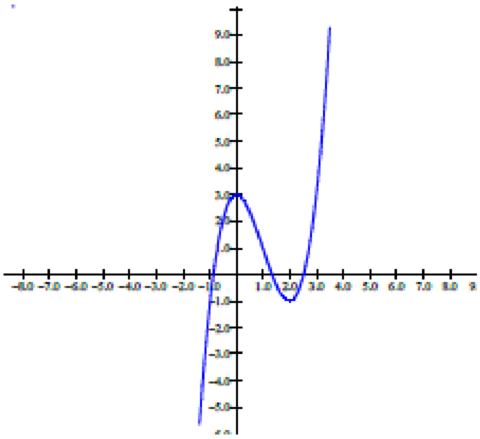
1.



2.



3.



4.

15. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son polinomios? Justificá tu respuesta.

    a) $P(x) = 3x + 4x^2 - \sqrt{2}x^8$

    b) $Q(z) = \frac{3}{5}z^{12} - z^{-6}$

    c) $R(a) = 4$

    d) $H(w) = -2.5w + 4 \times 10^{23}w^{67} - \sqrt{w^3}$

16. Identificá entre las siguientes funciones cuáles son lineales:

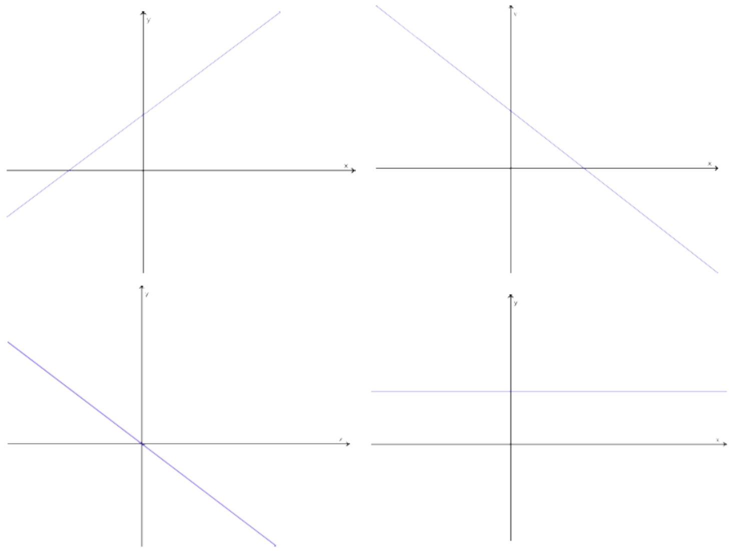
    a) $f(h) = h^2 - (h - 3)^2$

    b) $g(q) = \dfrac{1}{2}(q + 4) - 3q$

    c) $h(r) = \dfrac{r^2 - 4}{r + 2}$

17. Uní con flechas los gráficos y las distintas condiciones que deben cumplir las funciones que pueden representarlos justificando tu respuesta.

$y = mx + b$ con $b > 0$ y $m < 0$
$y = mx + b$ con $b = 0$ y $m < 0$
$y = mx + b$ con $b > 0$ y $m = 0$
$y = mx + b$ con $b > 0$ y $m > 0$



18. Dadas los siguiente pares de funciones lineales determiná cuáles son paralelas y cuáles son perpendiculares.

   a) $f(x) = 3x + 1$; $g(x) = 3(x - 1)$

   b) $y + 1 - 2x = x + \frac{1}{2}$; $1 = y - \frac{1}{3}x$

   c) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; $y - 1 = -2(-1 - x)$

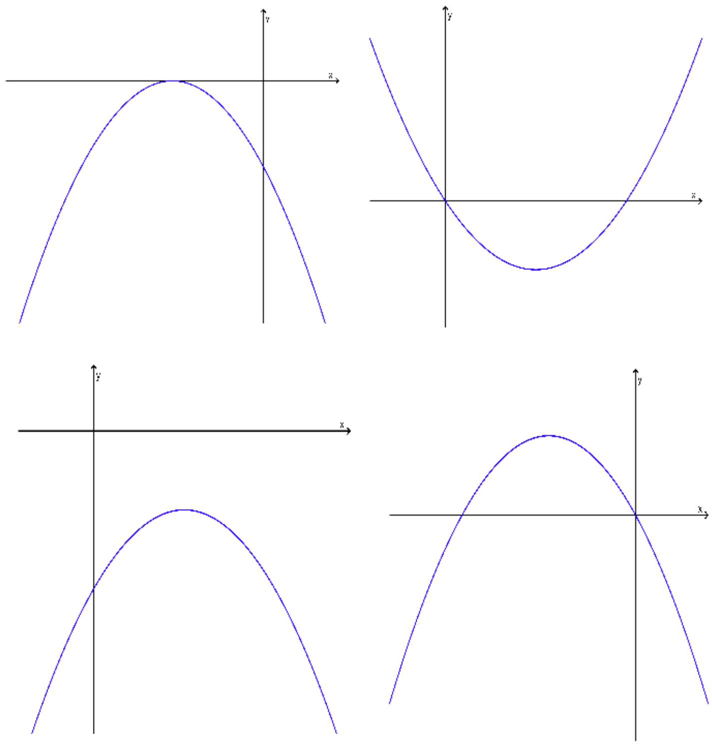
19. Encontrá la función lineal sabiendo que:

   a) La recta pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

   b) La recta tiene una inclinación de 45° y pasa por el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

   c) La recta pasa por el punto $(-2, -2)$ y es perpendicular a la recta $y = -x$

20. Identificá en cada caso si el discriminante, Δ, es mayor, menor o igual a cero.



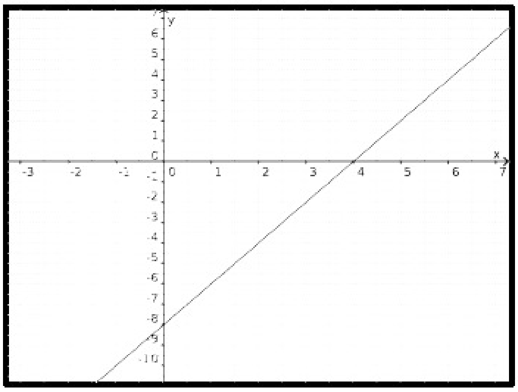
21. Encuentra la expresión canónica de las siguientes funciones cuadráticas.

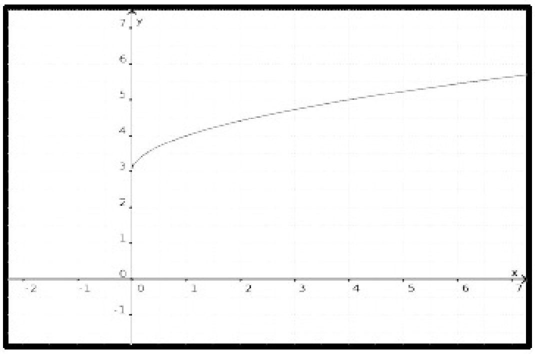
    a) $y = 4x^2 - 8x + 5$

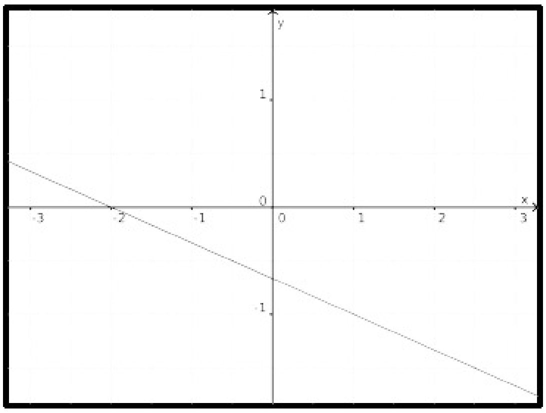
    b) $y = -2x^2 - 2x - \frac{3}{2}$

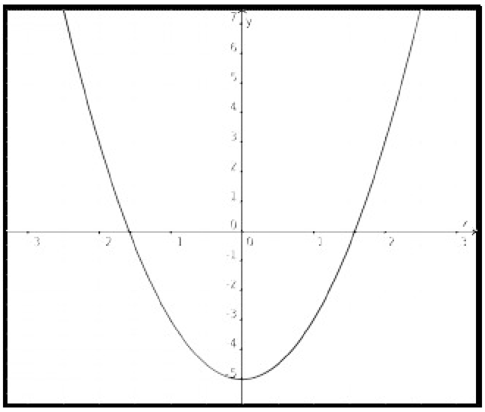
22. A continuación se presentan las fórmulas y gráficos de varias funciones. Vinculá cada gráfico con su fórmula.

$y = 2x - 8$
$y = \sqrt{x} + 3$
$y = 2x^2 - 5$
$-3y - 2 = x$









Funciones lineales

1. Para cada una de las siguientes funciones lineales determiná su ordenada al origen, su raíz, su pendiente y representa gráficamente.

    a) $f(x) = x + 2$

    b) $g(x) = -3x + 2$

    c) $2x + 5 = 3y$

    d) $y = -1$

   e) $x - y = 0$
   f) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-3} = 1$

2. Dadas las siguientes funciones lineales decidí cuáles son paralelas, cuales corresponden a rectas perpendiculares y cuáles, a rectas que no son ni paralelas ni perpendiculares:

   a) $y = 2x + 1$
   b) $4x - 2y = 1$
   c) $8x - 4y = -1$
   d) $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$
   e) $x + 2y = 2$
   f) $-4y + 1 = 2x$
   g) $y = \dfrac{1}{2}x + 1$
   h) $-x + 1 = 2y$

3. Encuentra la expresión de la función lineal que cumple en cada caso con las condiciones indicadas:

   a) Tiene pendiente -3 y raíz 4
   b) Pasa por los puntos $(-1; 2)$ y $(\frac{1}{2}; 5)$
   c) Tiene ordenada al origen $(0; -8)$ y pasa por $(1; 4)$
   d) Es una recta paralela a la que representa la función $f(x) = -3x + 5$ y que pasa por $(-3; 5)$.
   e) Pasa por el punto $(1; 3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-1; 1)$ y $(6; 5)$.

4. Para estimar la presión atmosférica en cierto lugar próximo al nivel del mar, puede aplicarse la siguiente fórmula: $P(h) = -\dfrac{1}{10500}h + 760$, donde P representa el valor de la presión en milímetros de mercurio (mm Hg) y h la altura sobre el nivel del mar expresada en mm.

   a) ¿Cuál es la presión atmosférica aproximada que soporta un avión que vuela a 3500m de altura?
   b) ¿A qué altura sobre el nivel del mar se encuentra la ciudad de Córdoba si la presión atmosférica promedio en esa localidad es de 72,2 cm Hg?
   c) ¿Entre qué valores de altura sería razonable utilizar esta fórmula?

5. Un automóvil se dirige por un camino recto a 90 km/h desde la ciudad A hasta la ciudad B, distantes entre sí 120 km.

   a) Encuentra una expresión que represente la situación.

b) ¿A cuantos km de B se encontrará luego de transcurridos 45 minutos de viaje?

c) ¿En qué momento se encontrará a 15 km de B?

d) ¿Cuál es el dominio para esta función?

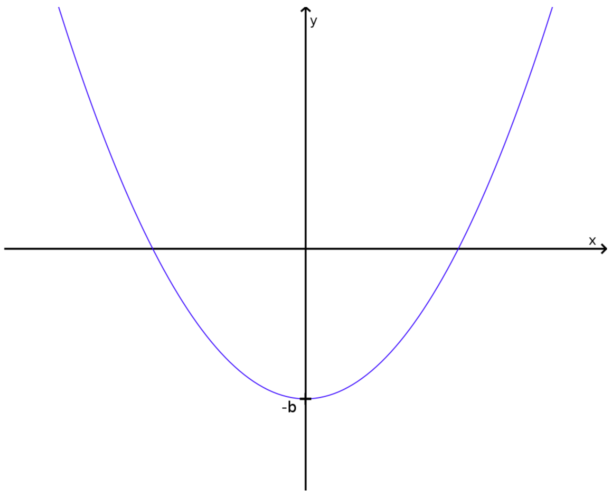
6. Los puntos $A = (1; 1)$, $B = (-3; 5)$ y $C = (0; 8)$ son tres vértices de un rectángulo. Determina las coordenadas del cuarto vértice y encuentra analíticamente las rectas que representan los lados expresadas en forma simétrica.

Funciones cuadráticas

1. Indicá cuáles de las siguientes ecuaciones se corresponde con el gráfico de la función.

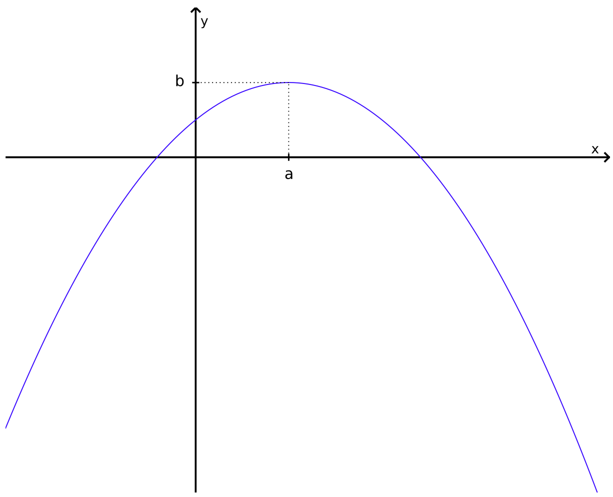
Suponga que $a, b > 0$

$$\begin{aligned} y &= -a\,x^2 + b \\ y &= -a\,x^2 - b \\ y &= a\,x^2 + b \\ y &= a\,x^2 - b \end{aligned}$$



Suponga que $a, b > 0$

$$\begin{aligned} y - b &= (x + a)^2 \\ y - b &= (x - a)^2 \\ y + b &= (x + a)^2 \\ y + b &= (x - a)^2 \\ y - b &= -(x + a)^2 \\ y - b &= -(x - a)^2 \\ y + b &= -(x + a)^2 \\ y + b &= -(x - a)^2 \end{aligned}$$



2. Escribí V o F según corresponda:

a) La gráfica de $y = x^2 + n \;\; (n > 0)$ es la gráfica de $y = x^2$ desplazada hacia arriba.

b) La gráfica de $y = x^2 - r\,x$ $(r > 0)$ es la gráfica de $y = x^2$ desplazada hacia la izquierda.

c) La gráfica de $y = x^2 - m$ $(m < 0)$ es la gráfica de $y = x^2$ desplazada hacia abajo.

d) La gráfica de $y = x^2 - t\,x$ $(t < 0)$ es la gráfica de $y = x^2$ desplazada hacia la izquierda.

3. Encuentra el vértice, la imagen, la recta correspondiente al eje de simetría, la ordenada al origen y las raíces de la función $y = -3x^2 + x + 2$.

4. Determiná la naturaleza de las raíces de las siguientes funciones cuadráticas sin resolver la ecuación.

   a) $g(y) = y^2 - 4\,y - 4$

   b) $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ donde $a = -1$, $b = -3$ y $c = -4$

   c) $f(x) = b\,x^2 + c\,x + a$ donde $a = -1$, $b = -2$ y $c = 2\sqrt{2}$

   d) $f(z) = -3 + z^2$

   e) $w(h) = 6\,h + \sqrt{3}\,h^2 + 3\sqrt{3}$

5. Halla las expresiones polinómicas de las siguiente funciones:

   a) El vértice es $(-3; -2)$ y el coeficiente principal es -2.

   b) Las raíces son $x_1 = -4$ y $x_2 = 2$ y el coeficiente principal es -1.

   c) El vértice es $(-3; -2)$ y pasa por el punto $(0; 1)$.

   d) Corta al eje x en $(-1; 0)$ y $(4; 0)$ y pasa por el punto $(-4; 5/6)$.

6. Realizá el gráfico aproximado de cada una de las siguientes funciones. Indicá el vértice, el eje de simetría, las raíces y la imagen.

   a) $y = \dfrac{1}{2}\,(x - 3)^2 - 2$

   b) $y = 3\,(x + \dfrac{3}{2})^2 + \dfrac{1}{2}$

   c) $y = 2\,(x + 3)\,(x - \dfrac{1}{2})$

   d) $y = -\dfrac{1}{4}\,(x - 5)\,(x + 2)$

7. Se lanza una pelota desde el suelo hacia arriba verticalmente. La altura, H, que alcanza la pelota, medida desde el suelo en metros, en función del tiempo, t, medido en segundos, se calcula a través de la siguiente fórmula: $H(t) = 20\,t - 5\,t^2$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota y en qué momento lo hace? ¿Después de cuánto tiempo cae la pelota al suelo? ¿Cúales son las respuestas a estas preguntas si la pelota se lanza desde 25 metros de altura?

8. Los registros de temperatura tomados entre las 0 hs y las 24 hs en una zona rural se ajustan a la función $y - 10 = -\frac{1}{10}(x - 12)^2$, donde y representa a la temperatura en grados centígrados y x es la hora del día. ¿Cuál fue la temperatura máxima? ¿A qué hora se registró? ¿Qué temperatura habría a las tres de la tarde?

Problemas mixtos

1. En un edificio en construcción se arroja un ladrillo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/seg. Su altura en función del tiempo se puede aproximar mediante la fórmula $f(t) = -4.9\,t^2 + 10\,t$, donde $f(t)$ representa la altura a la que se encuentra el ladrillo medida en metros y t es el tiempo expresado en segundos.

   En esos momentos, y mediante un elevador, se subía, a velocidad constante, un balde de mezcla, de manera que a los 0.5 segundos se encontraba a 3.75 metros de altura y pasado 1 segundo a 5 metros de altura.

   a) Encuentra una fórmula que represente el movimiento del balde sabiendo que puede describirse mediante una función lineal.

   b) Representá aproximadamente ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos.

   c) Determiná en qué momento se encontraron el ladrillo y el balde a la misma altura.

2. Un auto sale desde la Ciudad Autónoma de Buenos Aires hacia Mar del Plata con una velocidad inicial de 30 km/h y una aceleración constante de 36.25 km/h^2. Al mismo tiempo un camión parte desde la cuidad de La Plata hacia Mar del Plata con una velocidad constante de 72 km/h.

   La posición en función del tiempo del auto se puede representar con una función cuadrática: $A(t) = x_a + v_a\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$, donde x_a es la posición inicial, v_a es la velocidad inicial, a es la aceleración constante y t el tiempo; y la posición en función del tiempo del camión se puede expresar mediante una función lineal: $C(t) = x_c + v\,t$, donde x_c es la posición inicial y v es la velocidad constante.

   Considerando que la distancia entre la Ciudad Autónoma de Buenos Aires y La Plata es de 50 km y que entre La Plata y Mar del Plata hay 360 km; y teniendo en cuenta que los dos vehículos arrancan en el mismo instante ($t = 0$) y recorren la misma ruta, determine las funciones $A(t)$ y $C(t)$. ¿Cuánto tiempo tarda cada vehículo en llegar a Mar del Plata? ¿Cuánto tiempo transcurre desde el instante inicial hasta que los vehículos se encuentran en la ruta? Graficá ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos.[5]

3. Los gráficos de las funciones $p(x) = -5x + b$ y $q(x) = ax^2 + 3x - 1$ se intersecan en el punto $A = (2; -3)$.

   a) Halla los valores de los coeficientes a y b.

   b) Indicá si los gráficos de $p(x)$ y $q(x)$ se intersecan en algún otro punto.

[5]Sugerencias: Tené en cuenta que La Plata se encuentra entre la Cuidad Autónoma de Buenos Aires y Mar del Plata. Considerá que la posición inicial del auto es cero.

c) Graficá ambas funciones en un mismo sistema.

4. Considerá las funciones $r(x) = -x^2 + 4x + c$ y $s(x) = 2x + 2$. Halle los valores de c de modo que los gráficos de $r(x)$ y $s(x)$:

   a) Se intersequen en dos puntos;

   b) Se intersequen en un punto;

   c) No se intersequen.

Capítulo 5

Trigonometría

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

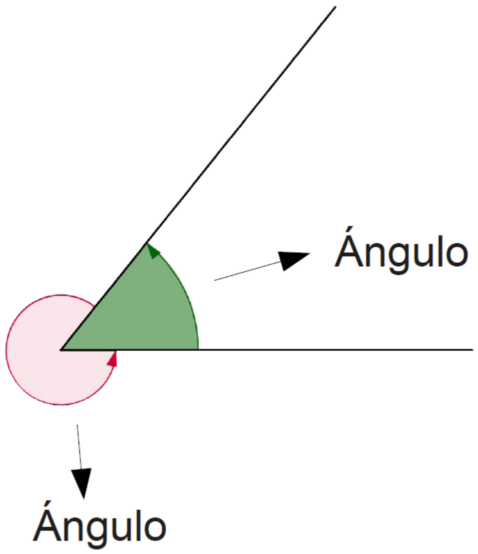
Capítulo 5

Trigonometría

En este capítulo trabajaremos con las funciones trigonométricas, que son funciones no algebraicas. Pero para poder entender cómo se definen, primero debemos introducir la idea de ángulo y sus sistemas de medición.

5.1. Ángulos y sistemas de medición

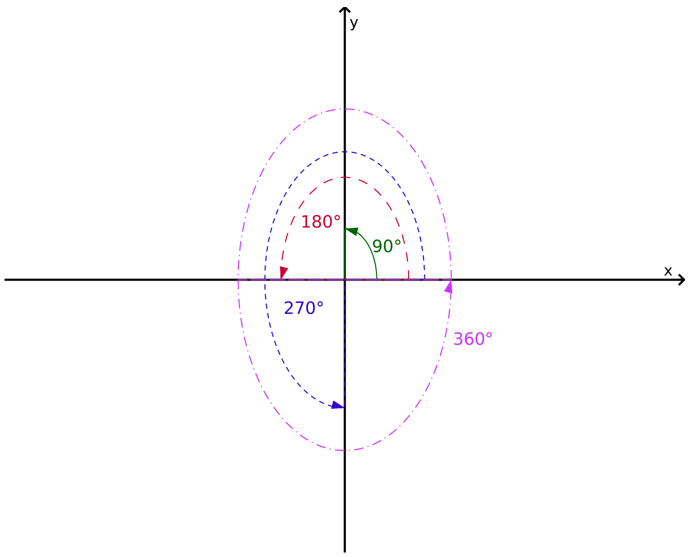
Se denomina ángulo a la sección del plano que queda comprendida entre dos semirrectas que se que se originan en un mismo punto, y están colocadas en distintas direcciones. El punto en que se inician las semirrectas se denomina vértice del ángulo; en tanto que cada una de las semirrectas que lo delimitan, se denominan lados del ángulo.



Se define que **un ángulo es positivo cuando se mide en el sentido contrario a las agujas del reloj** (también llamado sentido antihorario, sentido levógiro o sentido directo), y por lo tanto **es negativo si se mide en sentido contrario, es decir, en el mismo sentido que las agujas del reloj** (sentido horario, sentido dextrógiro o indirecto). **En un sistema de ejes cartesianos, se toma por convención que, los ángulos se miden desde el eje positivo de las abscisas en sentido contrario a las agujas del reloj.** En general los ángulos se denotan con letras griegas.

Existen distintos sistemas de medición de ángulos (de manera análoga a la que existen distintos sistemas para medir, por ejemplo, distancias: millas, kilómetros, leguas, etc.). Los sistemas que veremos en este curso serán el sistema sexagesimal, el sistema horario y el sistema circular.

Sistema sexagesimal En este sistema una vuelta completa equivale a 360 grados. Esto se denota: $360°$. Luego, $\frac{3}{4}$ de vuelta equivale a $270°$, $\frac{1}{2}$ de vuelta equivale a $180°$ y $\frac{1}{4}$ de vuelta equivale a $90°$.



Las fracciones de grado son los minutos y los segundos, esto quiere decir que: un grado equivale a 60 minutos, $1° \equiv 60'$, y 1 minuto equivale a 60 segundos, $1' \equiv 60''$. De este modo podemos escribir un ángulo de dos formas equivalentes: como fracción de grado o lo podemos expresar en grados, minutos y segundos.

Ejemplo: *Supongamos que queremos escribir el ángulo $\alpha = 42°\,30'\,15''$ como fracción de grado. Para hacer esto tenemos que ver a cuántos grados equivalen $30'\,15''$. Entonces, utilizando las equivalencias dadas anteriormente tenemos que:*

$$\begin{aligned} 60'' &\equiv 1' \\ 15'' &\equiv x \Longrightarrow x = \frac{15''\,.\,1'}{60''} = 0.'25 \end{aligned}$$

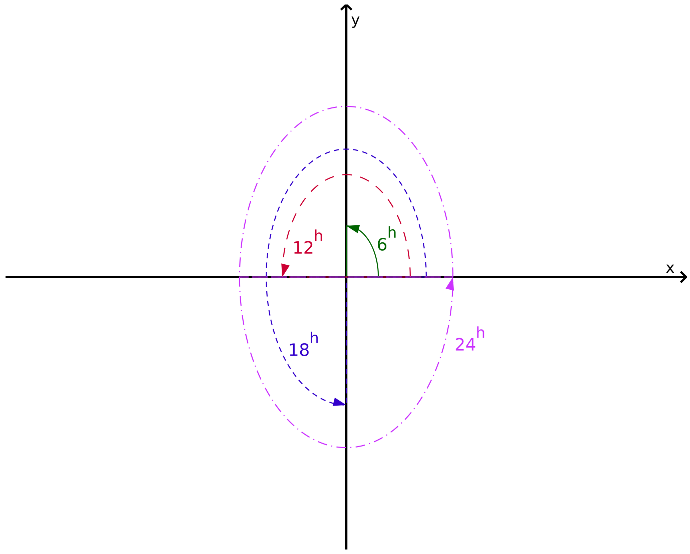
Así encontramos que $15'' \equiv 0.'25$. Ahora tenemos que $\alpha = 42°\,30.'25$. Finalmente, para pasar de minutos a fracción de grado hacemos el mismo procedimiento que realizamos recién:

$$\begin{aligned} 60' &\equiv 1° \\ 30.'25 &\equiv x \Longrightarrow x = \frac{30.'25\,.\,1°}{60'} = 0.°5041\hat{6} \end{aligned}$$

De este modo encontramos que $\alpha = 42^\circ\, 30'\, 15'' = 42.^\circ 5041\hat{6}$.

Es importante recordar que cuando estemos trabajando en estas unidades la calculadora debe estar en la función deg (degree, que quiere decir grado en inglés).

Sistema horario En este sistema una vuelta completa equivale a 24 horas. Esto se denota: 24^{h}. Luego, $\frac{3}{4}$ de vuelta equivale a 18^{h}, $\frac{1}{2}$ de vuelta equivale a 12^{h} y $\frac{1}{4}$ de vuelta equivale a 6^{h}.

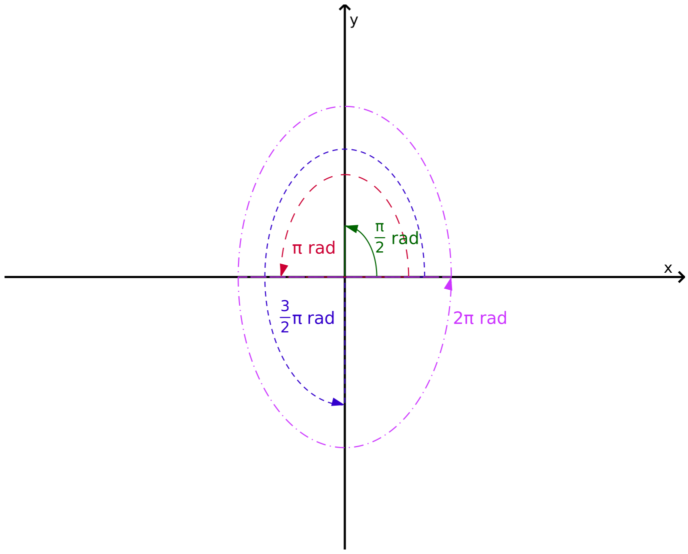


Las fracciones de hora también son los minutos y los segundos, esto quiere decir que: una hora equivale a 60 minutos, $1^{\mathrm{h}} \equiv 60^{\mathrm{m}}$, y 1 minuto equivale a 60 segundos, $1^{\mathrm{m}} \equiv 60^{\mathrm{s}}$. De este modo podemos escribir un ángulo de dos formas equivalentes: como fracción de hora o lo podemos expresar en horas, minutos y segundos.

Ejemplo: *Supongamos que queremos escribir el ángulo* $\alpha = 42^{\mathrm{h}}\, 30^{\mathrm{m}}\, 15^{\mathrm{s}}$ *como fracción de hora. Utilizando el mismo procedimiento que en el ejemplo del sistema sexagesimal obtenemos que* $\alpha = 42^{\mathrm{h}}\, 30^{\mathrm{m}}\, 15^{\mathrm{s}} = 42.^{\mathrm{h}} 5041\hat{6}$.

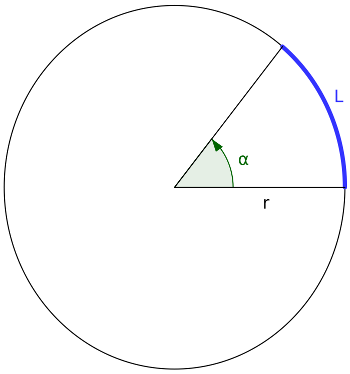
Para este caso las calculadoras no tienen una función específica, pero como las fracciones de hora y de grado son equivalentes, ***para trabajar en este sistema la calculadora debe estar en la función deg****. La diferencia estará en que si estamos trabajando en el sistema horario un ángulo de* 25^{h} *equivale a un día y una hora,* $25^{\mathrm{h}} \equiv 1^{\mathrm{d}}\, 1^{\mathrm{h}}$*, mientras que en el sistema sexagesimal un ángulo de* 361° *equivale a una vuelta y un grado (pero el ángulo se sigue escribiendo como* 361°*).*

Sistema circular En este sistema una vuelta completa equivale a 2π radianes. Esto se denota: 2π ó 2π rad. En general en este sistema no se escribe la unidad, es decir que un ángulo de 2π radianes se expresa como 2π. Los radianes se escriben como un número real, las fracciones de radianes no tienen una notación particular.1



Es importante recordar que cuando estemos trabajando en estas unidades la calculadora debe estar en la función rad (radianes).

Para definir cuánto mide un radián primero debemos definir la longitud de arco. Se define **la longitud de arco, *L*, como un tramo de la longitud total de la circunferencia.**[1]



Para calcular esta longitud hacemos el siguiente razonamiento: si una vuelta completa, es decir un ángulo de 2π radianes equivale a la longitud total de la circunferencia, $2\pi r$, entonces un ángulo α equivale a una longitud L. Por lo tanto:

[1]La historia del número pi y su significado lo pueden ver aquí. (https://www.youtube.com/watch?v=3Gdjkz60ON4)

$$\frac{2\,\pi}{\alpha} = \frac{2\,\pi\,r}{L}$$

Despejando L obtenemos que:

$$\boxed{L = \alpha\,r} \tag{5.1}$$

De aquí podemos definir cuánto mide un radián. **Un radián se define como el ángulo para el cual la longitud de arco, $\boldsymbol{L}$, es igual al radio, $\boldsymbol{r}$, de la circunferencia.**

5.1.1. Conversión entre sistemas

Para pasar de un sistema de medición a otro se utilizan las equivalencias entre los valores para un mismo ángulo en los distintos sistemas. De las tres figuras anteriores se puede ver que:

$$\begin{aligned} 90^\circ &\equiv 6^h \equiv \frac{\pi}{2} \\ 180^\circ &\equiv 12^h \equiv \pi \\ 270^\circ &\equiv 18^h \equiv \frac{3}{2}\,\pi \\ 360^\circ &\equiv 24^h \equiv 2\,\pi \end{aligned}$$

Ejemplo: *Supongamos que queremos pasar el ángulo $\alpha = 42^\circ\,30'\,15''$ del sistema sexagesimal al sistema horario. Lo primero que hay que hacer es escribir el ángulo en fracción de grado. Esto nos había dado que $\alpha = 42^\circ\,30'\,15'' = 42.^\circ 5041\hat{6}$. Luego para pasar al sistema horario utilizamos, por ejemplo la equivalencia $180^\circ \equiv 12^{\mathrm{h}}$. Entonces,*

$$\begin{aligned} 180^\circ &\equiv 12^{\mathrm{h}} \\ 42.^\circ 5041\hat{6} &\equiv x \Longrightarrow x = \frac{42.^\circ 5041\hat{6}\,.\,12^{\mathrm{h}}}{180^\circ} = 2.^{\mathrm{h}}8336\hat{1} \end{aligned}$$

Para escribir el ángulo en horas, minutos y segundos hacemos el proceso inverso al que hicimos anteriormente.

Primero pasamos a minutos:

$$\begin{aligned} 1^{\mathrm{h}} &\equiv 60^{\mathrm{m}} \\ 0.^{\mathrm{h}}8336\hat{1} &\equiv x \Longrightarrow x = \frac{0.^{\mathrm{h}}8336\hat{1}\,.\,60^{\mathrm{m}}}{1^{\mathrm{h}}} = 50.^{\mathrm{m}}01\hat{6} \end{aligned}$$

Y la fracción de minutos la pasamos a segundos:

$$\begin{aligned} 1^{\mathrm{m}} &\equiv 60^{\mathrm{s}} \\ 0.^{\mathrm{m}}01\hat{6} &\equiv x \Longrightarrow x = \frac{0.^{\mathrm{m}}1\hat{6}\,.\,60^{\mathrm{s}}}{1^{\mathrm{m}}} = 1^{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Finalmente, obtuvimos que $\alpha = 42^\circ\,30'\,15'' = 2^{\mathrm{h}}\,50^{\mathrm{m}}\,1^{\mathrm{s}}$.

Supongamos ahora que queremos pasar al sistema circular. De forma análoga tenemos que si $\alpha = \ 2^{\mathrm{h}}\, 50^{\mathrm{m}}\, 1^{\mathrm{s}} \ = \ 2.^{\mathrm{h}}8336\hat{1}$ *entonces para cambiar de sistema hacemos lo siguiente:*

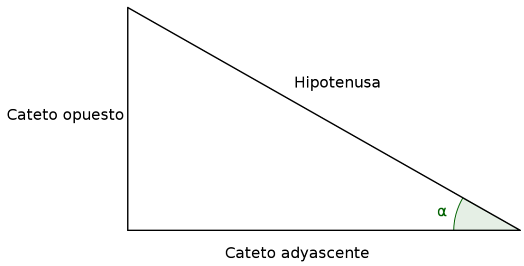
$$\begin{aligned} 24^{\mathrm{h}} \ &\equiv \ 2\,\pi \\ 2.^{\mathrm{h}}8336\hat{1} \ &\equiv \ x \Longrightarrow x \ = \ \frac{2.^{\mathrm{h}}8336\hat{1}\,.\,2\,\pi}{24^{\mathrm{h}}} \ = \ 0.741837654 \end{aligned}$$

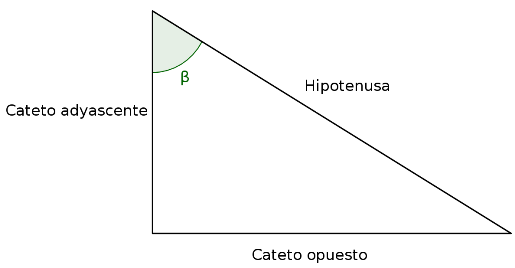
Por lo tanto $\alpha = 42^{\circ}\, 30'\, 15'' \ = \ 2^{\mathrm{h}}\, 50^{\mathrm{m}}\, 1^{\mathrm{s}} \ = \ 0.741837654.$

5.2. Funciones trigonométricas

Una primera manera de definir las funciones trigonométricas es a partir de un triángulo rectángulo.

Un triángulo rectángulo es aquél que tiene un ángulo recto como uno de sus ángulos interiores. En este caso, **los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos, y el tercer lado es la hipotenusa. Si uno toma un ángulo interior, que no sea el ángulo recto, entonces el cateto que forma dicho ángulo será el cateto adyacente, mientras que el otro será el cateto opuesto.**

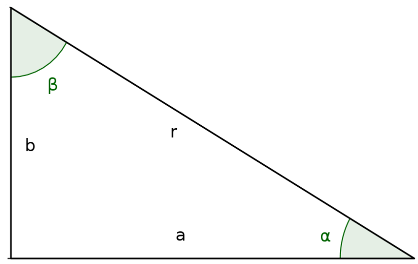




Las funciones trigonométricas son el seno, el coseno y la tangente (abreviadas como sen, cos y tan), y se definen como:

$$\begin{aligned}
\text{sen } \alpha &= \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \\
\cos \alpha &= \frac{\text{Cateto adyascente}}{\text{Hipotenusa}} \\
\tan \alpha &= \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyascente}}
\end{aligned}$$

Entonces en el triángulo, de la figura siguiente, formado por los lados r, a y b, las funciones trigonométricas serán:



$$\begin{aligned}
\text{sen } \alpha &= \frac{b}{r} & \text{sen } \beta &= \frac{a}{r} \\
\cos \alpha &= \frac{a}{r} & \cos \beta &= \frac{b}{r} \\
\tan \alpha &= \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{b}{a} & \tan \beta &= \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} = \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

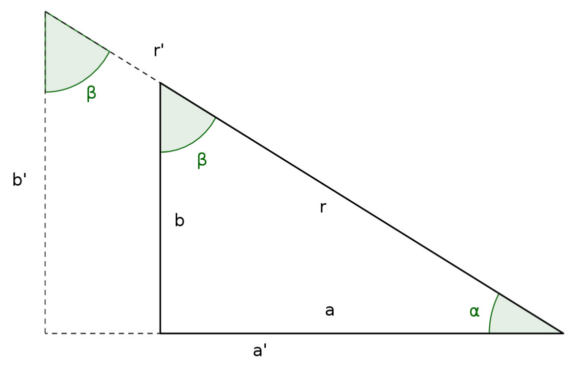
El teorema de Pitágoras (que demostraremos más a delante) dice que $r^2 = a^2 + b^2$. De aquí se tiene que $r^2 \geq a^2$ y $r^2 \geq b^2$. Aplicando raíz cuadrada en ambos miembros obtenemos que $|r| \geq |a|$ y $|r| \geq |b|$. Luego $1 \geq |\frac{a}{r}|$ y $1 \geq |\frac{b}{r}|$. Finalmente, teniendo en cuenta que $\cos \alpha = \text{sen } \beta = \frac{a}{r}$ y $\text{sen } \alpha = \cos \beta = \frac{b}{r}$ resulta que:

$$\begin{aligned}
|\cos \alpha| = |\text{sen } \beta| \leq 1 \\
|\text{sen } \alpha| = |\cos \beta| \leq 1
\end{aligned}$$

De este resultado se puede decir que para cualquier ángulo, α, tenemos que:

$$\boxed{\begin{array}{l} -1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1 \\ -1 \leq \cos\alpha \leq 1 \end{array}} \tag{5.2}$$

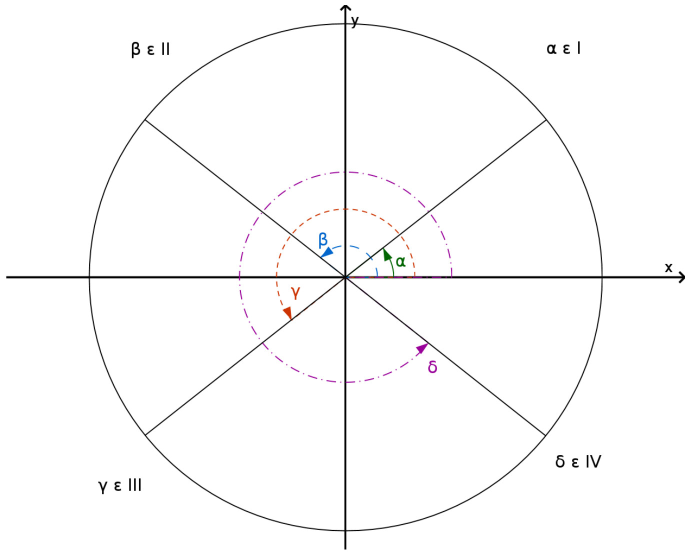
Si ahora agrandamos el triángulo sin modificar sus ángulos interiores, por ejemplo el triángulo formado por los lados r', a' y b', resulta que



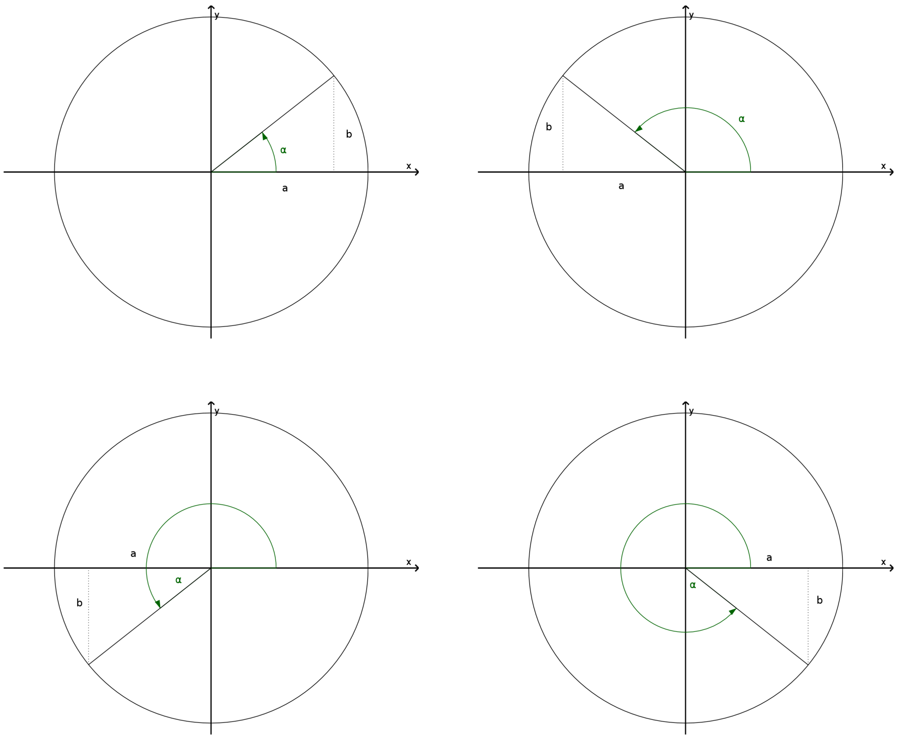
$$\begin{array}{rclrcl}
\operatorname{sen}\alpha & = & \dfrac{b}{r} = \dfrac{b'}{r'} & \operatorname{sen}\beta & = & \dfrac{a}{r} = \dfrac{a'}{r'} \\
\cos\alpha & = & \dfrac{a}{r} = \dfrac{a'}{r'} & \cos\beta & = & \dfrac{b}{r} = \dfrac{b'}{r'} \\
\tan\alpha & = & \dfrac{b}{a} = \dfrac{b'}{a'} & \tan\beta & = & \dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}
\end{array}$$

Esto significa que el valor de las funciones trigonométricas dependen del ángulo y no del tamaño del triángulo. Por lo tanto podemos deshacernos del triángulo y extender las funciones trigonométricas a todos los ángulos (y no restringirnos a los ángulos menores que 180° solamente como veníamos haciendo). Entonces ahora vamos a trabajar en lo que se llama la **circunferencia trigonométrica**, que **es una circunferencia de radio unidad cuyo centro coincide con el origen del sistema de coordenadas cartesiano.**

En el sistema de ejes cartesianos, el plano $x\,y$ se divide en 4 cuadrantes: el primer cuadrante corresponde al semiplano en el cual x e y son positivos; en el segundo cuadrante $x < 0$ e $y > 0$; en el tercer cuadrante x e y son negativos, y en el cuarto cuadrante $x > 0$ e $y < 0$. Estos cuadrantes se denotan con números romanos. Con este criterio y teniendo en cuenta que los ángulos positivos se miden desde el eje positivo de las abscisas y en sentido antihorario tendremos que un ángulo pertenece al primer cuadrante si está entre 0 y $\pi/2$, pertenece al segundo cuadrante si está entre $\pi/2$ y π, pertenece al tercer cuadrante si está entre π y $(3/2)\pi$, y pertenece al cuarto cuadrante si está entre $(3/2)\pi$ y 2π.



Para calcular el valor de las funciones trigonométricas en la circunferencia, lo que se hace es asociarle un triángulo rectángulo a cada ángulo. Este triángulo se construye trazando un segmento paralelo al eje de la ordenadas desde el punto de intersección entre el lado del ángulo y la circunferencia, hasta el eje de la abscisas. Entonces:



$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{1} = b \quad \cos \alpha = \frac{a}{1} = a \quad \tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{b}{a}$$

Como estamos en un sistema de ejes cartesianos tendremos que:

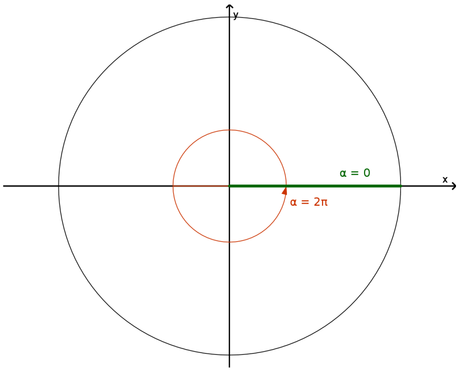
$$\alpha \in \mathrm{I} \Longrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos \alpha > 0 \\ \text{sen } \alpha > 0 \end{cases} \Longrightarrow \tan \alpha > 0$$

$$\alpha \in \text{II} \Longrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\,\alpha < 0 \\ \text{sen}\,\alpha > 0 \end{cases} \Longrightarrow \tan\,\alpha < 0$$

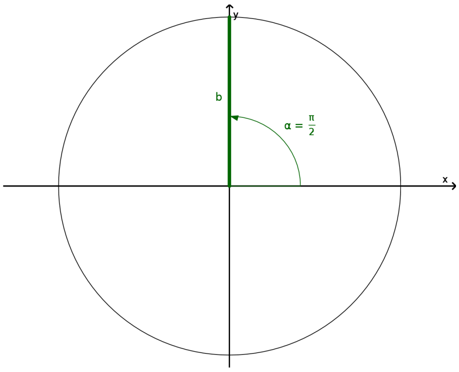
$$\alpha \in \text{III} \Longrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\,\alpha < 0 \\ \text{sen}\,\alpha < 0 \end{cases} \Longrightarrow \tan\,\alpha > 0$$

$$\alpha \in \text{IV} \Longrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\,\alpha > 0 \\ \text{sen}\,\alpha < 0 \end{cases} \Longrightarrow \tan\,\alpha < 0$$

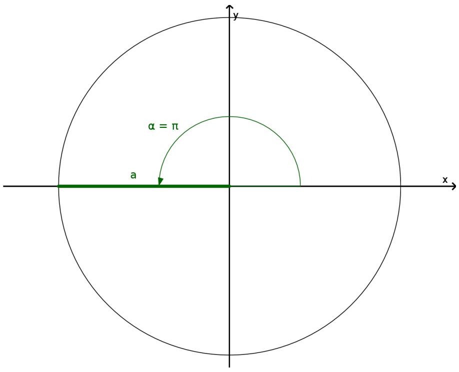
Para los extremos de los cuadrantes la funciones trigonométricas son:



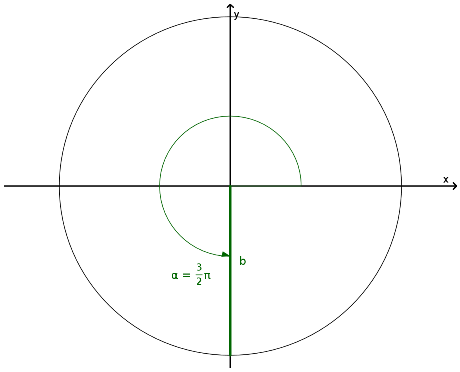
$$\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \alpha = 2\,\pi \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\alpha = 0 \\ \cos\,\alpha = 1 \end{cases} \Longrightarrow \tan\,\alpha = 0$$



$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\alpha = 1 \\ \cos\,\alpha = 0 \end{cases} \Longrightarrow \nexists\ \tan\,\alpha$$



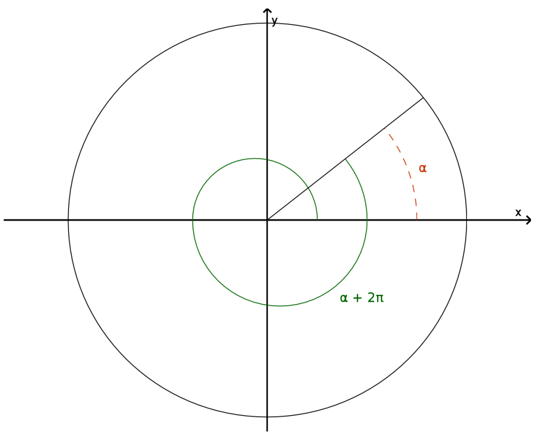
$$\alpha = \pi \Longrightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\alpha = 0 \\ \cos\,\alpha = -1 \end{cases} \Longrightarrow \tan\,\alpha = 0$$



$$\alpha = \frac{3}{2}\,\pi \Longrightarrow \begin{cases} \text{sen}\ \alpha = -1 \\ \cos\ \alpha = 0 \end{cases} \Longrightarrow \nexists\ \tan\ \alpha$$

ATENCIÓN

Los ángulos pueden ser mayores a $2\,\pi$, esto significa que los ángulos pueden dar una o varias vueltas. Por ejemplo, **el ángulo α y el ángulo $\beta_1 = \alpha + 2\,\pi$, son ángulos distintos pero los valores de sus funciones trigonométricas son iguales porque caen en el mismo lugar en la circunferencia trigonométrica.**

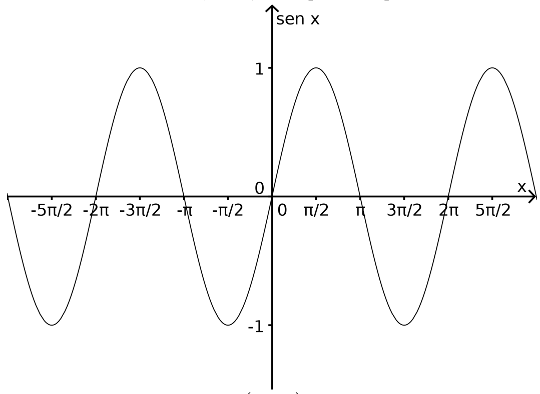


Lo mismo sucede si damos dos vueltas, $\beta_2 = \alpha + 2\,(2\,\pi)$, o tres vueltas, $\beta_3 = \alpha + 3\,(2\,\pi)$, o si damos una cantidad de vueltas tan grande como se quiera. Entonces, resulta que

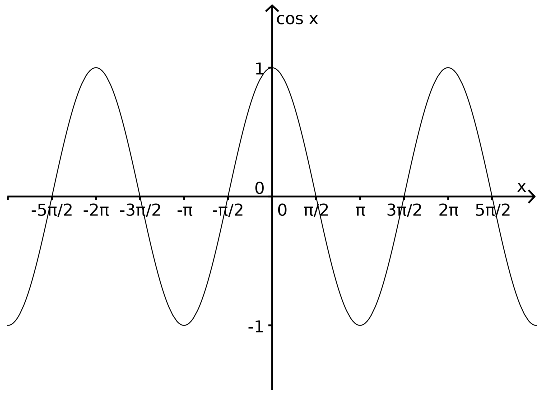
$$\forall\, k \in \mathbb{Z} \begin{cases} \text{sen}\ \alpha = \text{sen}\,(\alpha + 2\,k\,\pi) \\ \cos\ \alpha = \cos\,(\alpha + 2\,k\,\pi) \\ \tan\ \alpha = \tan\,(\alpha + 2\,k\,\pi) \end{cases}$$

Es importante resaltar que el dominio de las funciones trigonométricas seno y coseno son números reales que representan ángulos. Sin embargo, la imagen tanto del seno como del coseno son los números reales que están entre -1 y 1, es decir, $Im(\text{sen}) = Im(\cos) = [-1, 1]$. Mientras que el dominio de la tangente son todos los números reales excepto los números $(\pi/2) + 2k\pi$ y $(3\pi/2) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

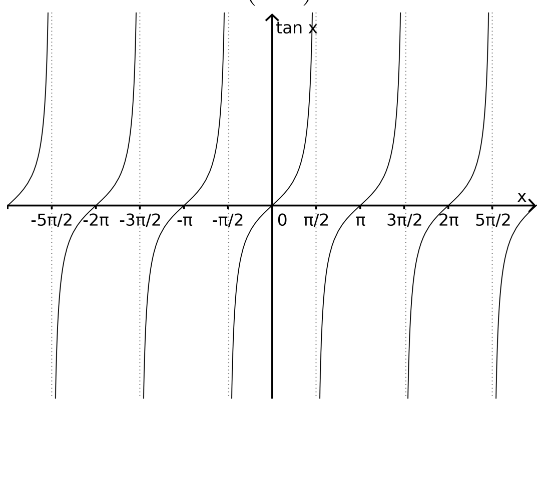
$$Dom(\text{sen}) = \mathbb{R}$$
$$Im(\text{sen}) = [-1; 1]$$



$$Dom(\cos) = \mathbb{R}$$
$$Im(\cos) = [-1; 1]$$



$$Dom(\tan) = \{\alpha \in \mathbb{R}/\, \alpha \neq (\pi/2) + 2k\pi,\, \alpha \neq (3\pi/2) + 2k\pi \text{ y } k \in \mathbb{Z}\}$$
$$Im(\tan) = \mathbb{R}$$

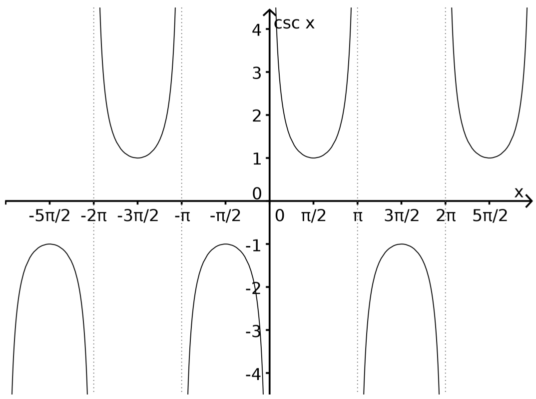


5.2.1. Funciones trigonométricas recíprocas

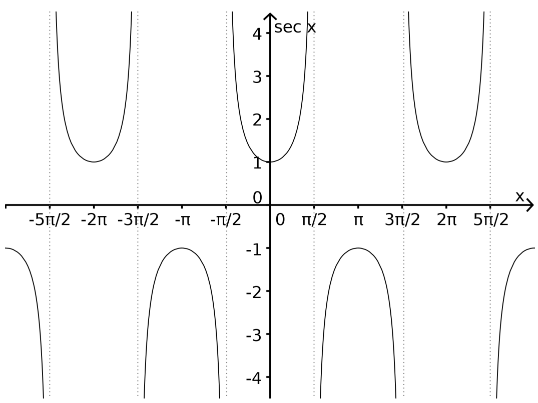
Las funciones trigonométricas recíprocas (no son las funciones trigonométricas inversas) son la cosecante, la secante, y la cotangente (abreviadas como csc, sec y cot), y se definen como:

$$\boxed{\begin{array}{rclcl} \csc\ \alpha & = & \dfrac{1}{\text{sen}\ \alpha} & & \text{para sen}\ \alpha \neq 0 \\ \sec\ \alpha & = & \dfrac{1}{\cos\ \alpha} & & \text{para cos}\ \alpha \neq 0 \\ \cot\ \alpha & = & \dfrac{1}{\tan\ \alpha} & = \dfrac{\cos\ \alpha}{\text{sen}\ \alpha} & \text{para sen}\ \alpha \neq 0 \end{array}} \tag{5.3}$$

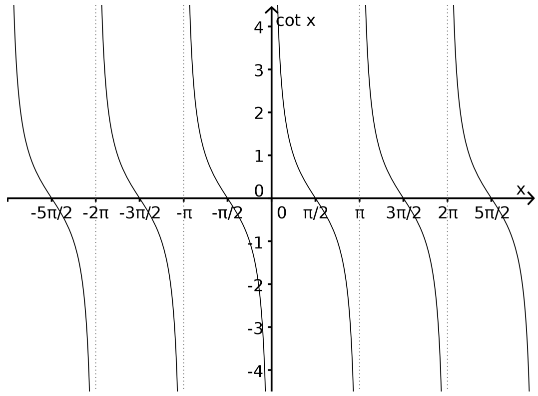
$$Dom(\text{csc}) = \mathbb{R} - \{\alpha /\ \alpha = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$
$$Im(\text{csc}) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



$$Dom(\text{sec}) = \mathbb{R} - \{\alpha /\ \alpha = (\pi/2) + 2k\pi,\ \alpha = (3\pi/2) + 2k\pi \text{ y } k \in \mathbb{Z}\}$$
$$Im(\text{sec}) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$



$$Dom(\cot) = \mathbb{R} - \{\alpha /\, \alpha = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$
$$Im(\cot) = \mathbb{R}$$



5.3. Relaciones Fundamentales

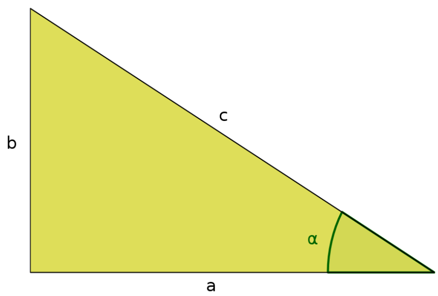
Lo que vamos a ver ahora son las relaciones que existen entre el seno y el coseno. Para la tangente también existen estas relaciones, pero como la tangente se define como el cociente del seno por el coseno, se pueden demostrar utilizando las identidades que veremos a continuación.

- **Relación pitagórica**

  Para poder demostrar esta identidad, primero vamos a demostrar el teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras

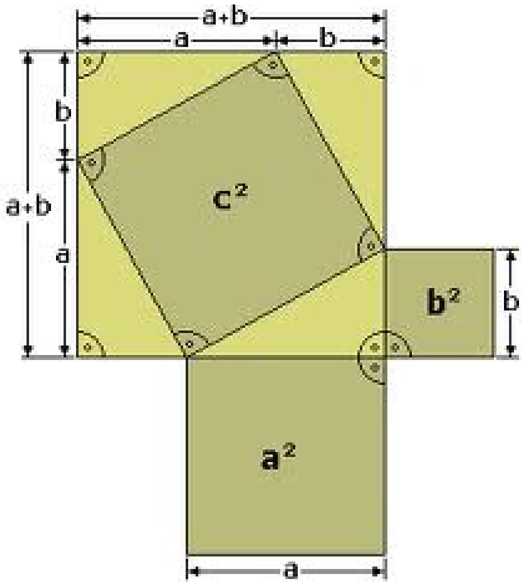
Dado un triángulo rectángulo cualquiera, el cuadrado de la longitud de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de la longitud de sus catetos.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Demostración

Para demostrar la identidad vamos a utilizar un cuadrado de lado $a + b$ subdividido como se muestra en la figura:



La superficie del cuadrado es $(a + b)^2$, pero también la podemos escribir como la suma de la superficie del cuadrado del medio más la superficie de los 4 triángulos: $c^2 + 4\,\frac{a\,b}{2}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= c^2 + 4\,\frac{a\,b}{2} \\ a^2 + b^2 + \cancel{2\,a\,b} &= c^2 + \cancel{2\,a\,b} \\ a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

De este modo hemos demostrado que **la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa**[2]

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2} \tag{5.4}$$

Una vez demostrado el teorema de Pitágoras, podemos reemplazar sus catetos por expresiones en función del ángulo α. Esto lo hacemos de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen}\,\alpha = \frac{b}{c} \implies b = c\,\operatorname{sen}\,\alpha$$

$$\cos\,\alpha = \frac{a}{c} \implies a = c\,\cos\,\alpha$$

[2]Esta misma demostración es la que explica Paenza aquí (https://www.youtube.com/watch?v=yDR5FDcMO5o).

Si reemplazamos estas dos expresiones en el teorema de Pitágoras obtenemos que:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ (c \cos \alpha)^2 + (c \operatorname{sen} \alpha)^2 &= c^2 \\ c^2 \cos^2 \alpha + c^2 \operatorname{sen}^2 \alpha &= c^2 \\ \cancel{c^2}(\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) &= \cancel{c^2} \end{aligned}$$

Así obtenemos la **relación pitagórica**:

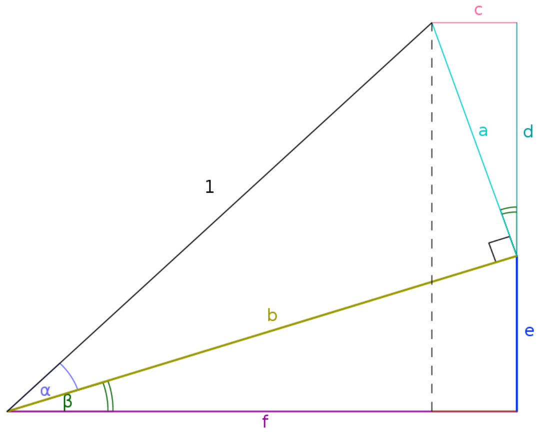
$$\boxed{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1} \tag{5.5}$$

Esta relación es una identidad, por lo tanto vale para cualquier ángulo.

- **Funciones trigonométricas de la suma de dos ángulos**

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}} \tag{5.6}$$

Estas expresiones las vamos a demostrar gráficamente. Tomemos dos triángulos. El primero será un triángulo cuya hipotenusa es igual a uno, sus catetos son a y b, y α es el ángulo formado por b y la hipotenusa. El segundo tiene a b como hipotenusa, sus catetos son e y f y β es el ángulo formado por b y f.



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= a \\ \cos \alpha &= b \\ \operatorname{sen} \beta &= \frac{e}{b} = \frac{c}{a} \\ \cos \beta &= \frac{f}{b} = \frac{d}{a} \end{aligned}$$

Ahora, despejando c, d, e y f tenemos que:

$$\begin{aligned} c &= a \operatorname{sen} \beta \\ d &= a \cos \beta \\ e &= b \operatorname{sen} \beta \\ f &= b \cos \beta \end{aligned}$$

Y reemplazando a y b por $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$, respectivamente, obtenemos que:

$$\begin{aligned} c &= \operatorname{sen}\,\alpha\ \operatorname{sen}\,\beta \\ d &= \operatorname{sen}\,\alpha\ \cos\,\beta \\ e &= \cos\,\alpha\ \operatorname{sen}\,\beta \\ f &= \cos\,\alpha\ \cos\,\beta \end{aligned}$$

Por otro lado, de la figura también tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= d+e \\ \cos(\alpha+\beta) &= f-c \end{aligned}$$

Reemplazando c, d, e y f por las expresiones encontradas obtenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= d+e = \operatorname{sen}\,\alpha\ \cos\,\beta + \cos\,\alpha\ \operatorname{sen}\,\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= f-c = \cos\,\alpha\ \cos\,\beta - \operatorname{sen}\,\alpha\ \operatorname{sen}\,\beta \end{aligned}$$

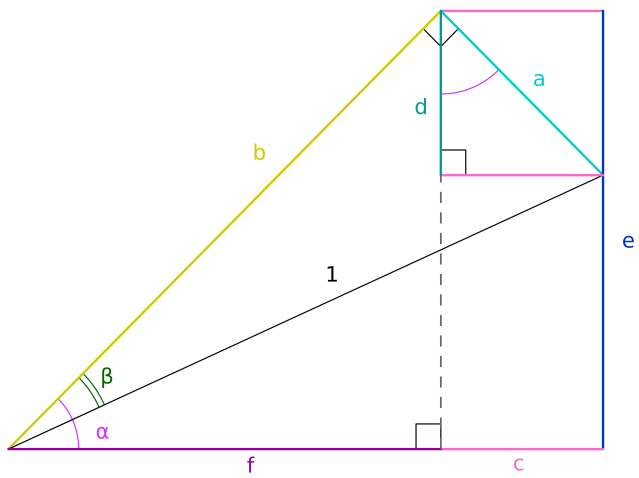
De este modo hemos encontrado las funciones trigonométricas para la suma de dos ángulos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\,\alpha\ \cos\,\beta + \cos\,\alpha\ \operatorname{sen}\,\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\,\alpha\ \cos\,\beta - \operatorname{sen}\,\alpha\ \operatorname{sen}\,\beta \end{aligned}$$

- **Funciones trigonométricas de la resta de dos ángulos**

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\,\alpha\ \cos\,\beta - \cos\,\alpha\ \operatorname{sen}\,\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\,\alpha\ \cos\,\beta + \operatorname{sen}\,\alpha\ \operatorname{sen}\,\beta \end{aligned}} \tag{5.7}$$

Esto lo vamos a demostrar de forma análoga al procedimiento anterior. De la siguiente figura tenemos que:



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\,\beta &= a \\ \cos\,\beta &= b \\ \operatorname{sen}\,\alpha &= \frac{e}{b} = \frac{c}{a} \\ \cos\,\alpha &= \frac{f}{b} = \frac{d}{a} \end{aligned}$$

Ahora, despejando c, d, e y f tenemos que:

$$\begin{aligned} c &= a \text{ sen } \alpha \\ d &= a \cos \alpha \\ e &= b \text{ sen } \alpha \\ f &= b \cos \alpha \end{aligned}$$

Y reemplazando a y b por $\text{sen}\,\alpha$ y $\cos\alpha$, respectivamente, obtenemos que:

$$\begin{aligned} c &= \text{sen } \beta \text{ sen } \alpha \\ d &= \text{sen } \beta \cos \alpha \\ e &= \cos \beta \text{ sen } \alpha \\ f &= \cos \beta \cos \alpha \end{aligned}$$

De la figura también tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(\alpha - \beta) &= e - d \\ \cos\,(\alpha - \beta) &= f + c \end{aligned}$$

Reemplazando c, d, e y f por las expresiones encontradas obtenemos que:

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(\alpha - \beta) &= e - d = \cos \beta \text{ sen } \alpha - \text{sen } \beta \cos \alpha \\ \cos\,(\alpha - \beta) &= f + c = \cos \beta \cos \alpha + \text{sen } \beta \text{ sen } \alpha \end{aligned}$$

De este modo hemos encontrado las funciones trigonométricas para la suma de dos ángulos:

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(\alpha - \beta) &= \text{sen } \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{ sen } \beta \\ \cos\,(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \end{aligned}$$

Las relaciones fundamentales se pueden sintetizar de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1 \\ \text{sen}\,(\alpha \pm \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \text{ sen } \beta \\ \cos\,(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \end{array}} \tag{5.8}$$

De estas expresiones se pueden deducir las funciones trigonométricas para el ángulo opuesto, el ángulo doble y el ángulo mitad.

- **Funciones trigonométricas del ángulo opuesto**

  Si α es un ángulo cualquiera, su opuesto será el ángulo $-\alpha$. Las funciones trigonométricas del ángulo $-\alpha$ se pueden escribir en función de α. Para esto vamos a utilizar las expresiones encontradas para la resta de dos ángulos (relación 5.7) teniendo en cuenta que el ángulo opuesto se puede escribir como una resta: $-\alpha = 0 - \alpha$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(-\alpha) &= \text{sen}\,(0 - \alpha) \\ &= \underbrace{\text{sen}\,(0)}_{=0} \cos(\alpha) - \underbrace{\cos\,(0)}_{=1} \text{sen}(\alpha) \\ &= -\text{ sen } \alpha \end{aligned}$$

Para el coseno hacemos lo mismo:

$$
\begin{aligned}
\cos(-\alpha) &= \cos(0 - \alpha) \\
&= \underbrace{\cos(0)}_{=1} \cos(\alpha) + \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{=0} \operatorname{sen}(\alpha) \\
&= \cos \alpha
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, **las funciones trigonométricas para el ángulo opuesto son:**

$$
\boxed{\begin{aligned}
\cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\
\operatorname{sen}(-\alpha) &= -\operatorname{sen} \alpha
\end{aligned}} \tag{5.9}
$$

- **Funciones trigonométricas del ángulo doble**

  Ahora vamos a utilizar las relaciones encontradas para la suma de dos ángulos (relaciones 5.6) ya que si α es un ángulo cualquiera, el ángulo doble será $2\,\alpha = \alpha + \alpha$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2\,\alpha) &= \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) \\
&= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) \\
&= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha
\end{aligned}
$$

  Para el coseno hacemos lo mismo:

$$
\begin{aligned}
\cos(2\,\alpha) &= \cos(\alpha + \alpha) \\
&= \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) \\
&= \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha
\end{aligned}
$$

  Por lo tanto, **las funciones trigonométricas para el ángulo doble son:**

$$
\boxed{\begin{aligned}
\cos(2\,\alpha) &= \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \\
\operatorname{sen}(2\,\alpha) &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha
\end{aligned}} \tag{5.10}
$$

- **Funciones trigonométricas del ángulo mitad**

  Esta demostración requiere un poco más de esfuerzo, pero de todos modos es bastante simple. Para encontrar las funciones del ángulo mitad vamos a hacer lo siguiente. Escribimos a un ángulo cualquiera α como $\frac{1}{2}\,\alpha + \frac{1}{2}\,\alpha$. Luego el coseno de α es:

$$
\begin{aligned}
\cos \alpha &= \cos\left(\frac{1}{2}\,\alpha + \frac{1}{2}\,\alpha\right) \\
&= \cos^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)
\end{aligned}
$$

  Ahora, por la relación pitagórica (ec. 5.5) tenemos que:

$$
\cos^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) = 1
$$

Entonces, para encontrar el seno del ángulo mitad despejamos el cuadrado del coseno de la relación anterior, esto es:

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) \;=\; 1\;-\;\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)$$

Y esto lo reemplazamos en la expresión para el coseno de α. Así encontramos que:

$$\begin{aligned}
\cos\,\alpha &= \cos^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\\
&= \left[1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\right] - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\\
&= 1 - 2\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)
\end{aligned}$$

Finalmente, despejando el seno del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) \;=\; \pm\sqrt{\frac{1\;-\;\cos\,\alpha}{2}}$$

El doble signo está asociado a la incertidumbre del cuadrante en el cual se encuentre el ángulo $\frac{1}{2}\,\alpha$, y sólo se elige el que corresponda al cuadrante.

Para hallar el coseno del ángulo mitad despejamos el coseno cuadrado de la relación pitagórica y la reemplazamos en la expresión del coseno de α.

$$\begin{aligned}
\cos\,\alpha &= \cos^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\\
&= \cos^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) - \left[1 - \cos^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\right]\\
&= -1 + 2\,\cos^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)
\end{aligned}$$

Finalmente, despejando el coseno del ángulo mitad:

$$\cos\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) \;=\; \pm\sqrt{\frac{1\;+\;\cos\,\alpha}{2}}$$

Por lo tanto **las funciones trigonométricas para el ángulo mitad serán:**

$$\boxed{\begin{aligned}
\cos\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) &= \pm\sqrt{\frac{1\;+\;\cos\,\alpha}{2}}\\
\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) &= \pm\sqrt{\frac{1\;-\;\cos\,\alpha}{2}}
\end{aligned}} \tag{5.11}$$

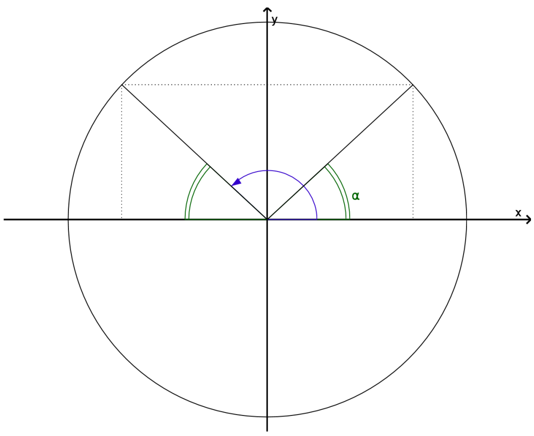
ATENCIÓN

Tener en cuenta que estas últimas tres demostraciones se desprenden de la suma y resta de ángulos. Se pueden deducir y no es necesario aprenderlas de memoria.

5.3.1. Reducción al primer cuadrante

La reducción al primer cuadrante consiste en escribir el seno y el coseno de un ángulo cualquiera, en función de las funciones trigonométricas de un ángulo α, tal que $\alpha \in \mathrm{I}$.

- Ángulo perteneciente al segundo cuadrante.



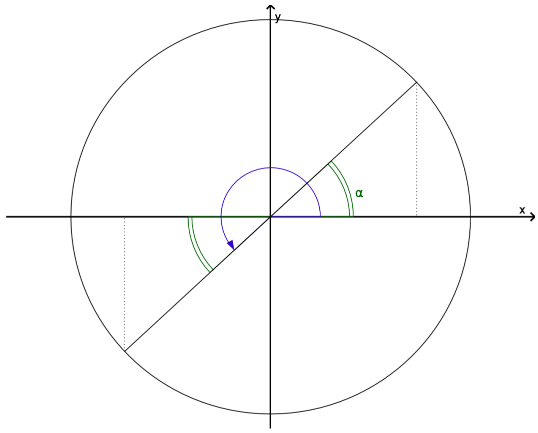
Del gráfico se ve que para cualquier ángulo del segundo cuadrante existe su suplementario. Por lo tanto, se puede escribir como $\pi - \alpha$. Utilizando las relaciones fundamentales se encuentra que:

$$\begin{aligned}\cos(\pi - \alpha) &= \underbrace{\cos\pi}_{=-1}\cos\alpha + \underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{=0}\operatorname{sen}\alpha = -\cos\alpha\\ \operatorname{sen}(\pi - \alpha) &= \underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{=0}\cos\alpha - \underbrace{\cos\pi}_{=-1}\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha\end{aligned}$$

Luego, para cualquier ángulo del segundo cuadrante tendremos que:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\pi - \alpha) &= -\cos\alpha\\ \operatorname{sen}(\pi - \alpha) &= \operatorname{sen}\alpha\end{aligned}} \tag{5.12}$$

- Ángulo perteneciente al tercer cuadrante.



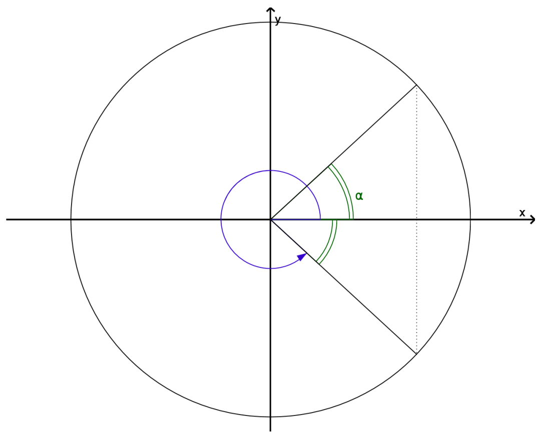
Del gráfico se ve que cualquier ángulo del tercer cuadrante se puede escribir como $\pi + \alpha$. Utilizando las relaciones fundamentales se encuentra que:

$$\cos(\pi + \alpha) = \underbrace{\cos\pi}_{=-1} \cos\alpha - \underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{=0} \operatorname{sen}\alpha = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = \underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{=0} \cos\alpha + \underbrace{\cos\pi}_{=-1} \operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\alpha$$

Luego, para cualquier ángulo del tercer cuadrante tendremos que:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos(\pi + \alpha) & = & -\cos\alpha \\ \operatorname{sen}(\pi + \alpha) & = & -\operatorname{sen}\alpha \end{array}} \tag{5.13}$$

- Ángulo perteneciente al cuarto cuadrante.



Del gráfico se ve que cualquier ángulo del cuarto cuadrante se puede escribir como $2\pi - \alpha$. Utilizando las relaciones fundamentales se encuentra que:

$$\cos(2\pi - \alpha) = \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} \cos\alpha + \underbrace{\operatorname{sen}(2\pi)}_{=0} \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$$
$$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = \underbrace{\operatorname{sen}(2\pi)}_{=0} \cos\alpha - \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} \operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\alpha$$

Luego, para cualquier ángulo del cuarto cuadrante tendremos que:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos(2\,\pi\,-\,\alpha) & = & \cos\,\alpha \\ \mathrm{sen}(2\,\pi\,-\,\alpha) & = & -\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{array}} \tag{5.14}$$

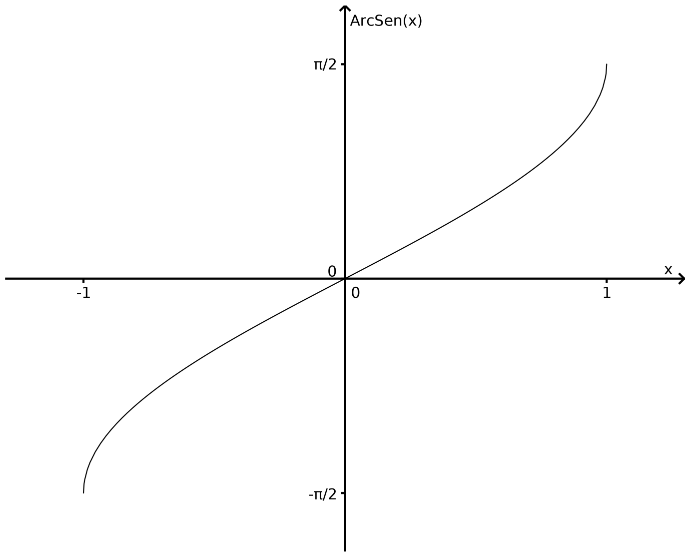
Las relaciones encontradas para el seno y el coseno de $(\pi\,-\,\alpha)$, $(\pi\,+\,\alpha)$ y $(2\,\pi\,-\,\alpha)$ valen siempre, aunque α no pertenezca al primer cuadrante. Esto es así porque hemos utilizado las relaciones encontradas para el seno y el coseno para la suma y para la resta de ángulos.

5.4. Funciones trigonométricas inversas

Son las funciones arcoseno (arc sen), arcocoseno (arc cos) y arcotangente (arctan). Estas funciones se utilizan cuando la incógnita forma parte del argumento de las funciones trigonométricas. Es importante mencionar que la imagen de estas funciones son ángulos.

Función arcoseno: Se define como:

$$\begin{cases} Dom(\mathrm{arc\,sen}) = [-1;1] \\ Im(\mathrm{arc\,sen}) = [-\pi/2;\pi/2] \\ f(x)\;=\;\mathrm{arc\,sen}\,(x) \end{cases}$$



Que el seno y el arcoseno sean funciones inversas significa que si sen $\alpha\;=\;x$ entonces,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{arc\,sen}[\mathrm{sen}\;\alpha] & = & \alpha \\ \mathrm{sen}[\mathrm{arc\,sen}\;x] & = & x \end{array}$$

En las calculadoras normalmente esta función se denota como $\mathbf{sen^{-1}}$, en este caso $\mathbf{sen^{-1}}\,\alpha \neq \dfrac{1}{\mathrm{sen}\;\alpha}$.

Dependiendo del signo del argumento del arcoseno, la imagen será un ángulo de algún cuadrante en particular. Es decir, si $\alpha\;=\;\mathrm{arc\,sen}\,(x)$ entonces resulta que $x\;=\;\mathrm{sen}\,(\alpha)$. Entonces, entre $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ tendremos que:

$$\begin{cases} \text{si } x = -1 & \Longrightarrow \quad \alpha = -\frac{\pi}{2} \\ \text{si } -1 < x < 0 & \Longrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \text{IV} \\ \text{si } x = 0 & \Longrightarrow \quad \alpha = 0 \\ \text{si } 0 < x < 1 & \Longrightarrow \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \text{I} \\ \text{si } x = 1 & \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{5.15}$$

ATENCIÓN

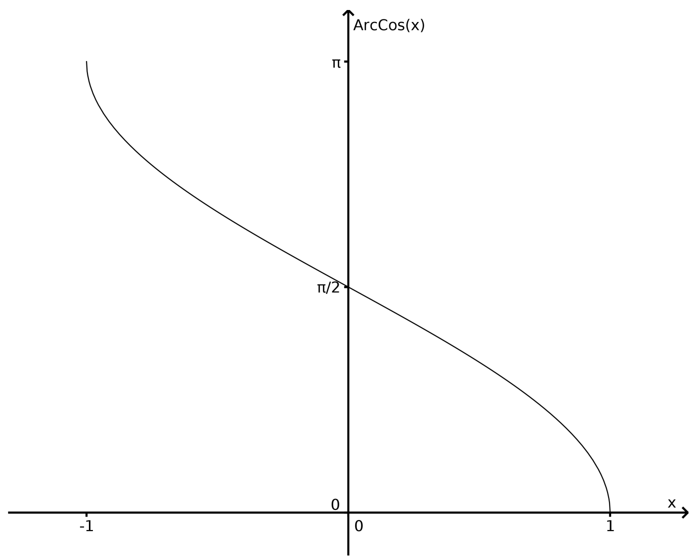
Utilizando las relaciones encontradas anteriormente, cuando estudiamos la reducción al primer cuadrante (relaciones 5.12, 5.13 y 5.14), podemos encontrar los valores de $\alpha \in [0; 2\pi)$ que satisfacen $\alpha = \operatorname{arc\,sen}(x)$.

$$\begin{cases} \text{si } x = -1 & \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{3}{2}\pi \\ \text{si } -1 < x < 0 & \Longrightarrow \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \quad \text{ó} \quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \text{III} \quad \text{ó} \quad \alpha \in \text{IV} \\ \text{si } x = 0 & \Longrightarrow \quad \alpha = 0 \quad \text{ó} \quad \alpha = \pi \\ \text{si } 0 < x < 1 & \Longrightarrow \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \text{I} \quad \text{ó} \quad \alpha \in \text{II} \\ \text{si } x = 1; & \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{5.16}$$

De aquí que entre $[0; 2\pi)$ siempre tendremos dos soluciones, excepto cuando $\operatorname{sen}(\alpha) = 1$ o $\operatorname{sen}(\alpha) = -1$.

Función arcocoseno: Se define como:

$$\begin{cases} Dom(\arccos) = [-1; 1] \\ Im(\arccos) = [0; \pi] \\ f(x) \ = \ \arccos{(x)} \end{cases}$$



Ahora si $\cos\alpha \ = \ x$ entonces,

$$\begin{aligned} \arccos[\cos\,\alpha] &= \alpha \\ \cos[\arccos\,x] &= x \end{aligned}$$

En las calculadoras normalmente esta función se denota como $\cos^{-1}$.

Dependiendo del signo del argumento la imagen será un ángulo de algún cuadrante en particular. Si $\alpha = \arccos(x)$ entonces resulta que $x = \cos(\alpha)$. Entonces, entre $[0;\pi]$ tendremos que:

$$\begin{cases} \text{si } x = -1 & \Longrightarrow \quad \alpha = \pi \\ \text{si } -1 < x < 0 & \Longrightarrow \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \text{II} \\ \text{si } x = 0 & \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \text{si } 0 < x < 1 & \Longrightarrow \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \text{I} \\ \text{si } x = 1 & \Longrightarrow \quad \alpha = 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

ATENCIÓN

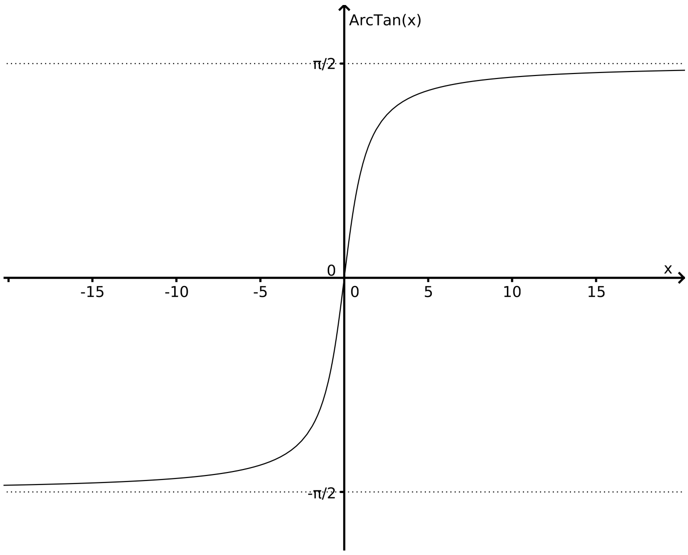
Utilizando las relaciones encontradas anteriormente, cuando estudiamos la reducción al primer cuadrante (relaciones 5.12, 5.13 y 5.14), podemos encontrar los valores de $\alpha \in [0;2\pi)$ que satisfacen $\alpha = \arccos(x)$.

$$\begin{cases} \text{si } x = -1 & \Longrightarrow \quad \alpha = \pi \\ \text{si } -1 < x < 0 & \Longrightarrow \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \text{ó} \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \text{II} \quad \text{ó} \quad \alpha \in \text{III} \\ \text{si } x = 0 & \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad \alpha = \frac{3}{2}\pi \\ \text{si } 0 < x < 1 & \Longrightarrow \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \text{I} \quad \text{ó} \quad \alpha \in \text{IV} \\ \text{si } x = 1; & \Longrightarrow \quad \alpha = 0 \end{cases} \tag{5.18}$$

De aquí que entre $[0;2\pi)$ siempre tendremos dos soluciones, excepto cuando $\cos(\alpha) = 1$ o $\cos(\alpha) = -1$.

Función arcotangente: Se define como:

$$\begin{cases} Dom(\arctan) = \mathbb{R} \\ Im(\arctan) = (-\pi/2; \pi/2) \\ f(x) \ = \ \arctan(x) \end{cases}$$



Ahora si $\tan\,\alpha \ = \ x$ entonces,

$$\begin{array}{rcl} \arctan[\tan\,\alpha] & = & \alpha \\ \tan[\arctan\,x] & = & x \end{array}$$

En las calculadoras normalmente esta función se denota como $\tan^{-1}$.

Dependiendo del signo del argumento la imagen será un ángulo de algún cuadrante en particular. Si $\alpha \ = \ \arctan(x)$ entonces resulta que $x \ = \ \tan(\alpha)$. Entonces, entre $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ tendremos que:

$$\begin{cases} \text{si } x < 0 & \Longrightarrow & -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 & \Longrightarrow & \alpha \in \text{IV} \\ \text{si } x = 0 & \Longrightarrow & \alpha = 0 & & \\ \text{si } 0 < x & \Longrightarrow & 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} & \Longrightarrow & \alpha \in \text{I} \end{cases} \tag{5.19}$$

ATENCIÓN

Utilizando las relaciones encontradas anteriormente, cuando estudiamos la reducción al primer cuadrante (relaciones 5.12, 5.13 y 5.14), podemos encontrar los valores de $\alpha \in [0; 2\pi)$ que satisfacen $\alpha = \arctan(x)$.

$$\begin{cases} \text{si } x < 0 & \Longrightarrow & \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \text{ó} \quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi & \Longrightarrow & \alpha \in \text{II} \quad \text{ó} \quad \alpha \in \text{IV} \\ \text{si } x = 0 & \Longrightarrow & \alpha = 0 \quad \text{ó} \quad \alpha = \pi & & \\ \text{si } 0 < x & \Longrightarrow & 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi & \Longrightarrow & \alpha \in \text{I} \quad \text{ó} \quad \alpha \in \text{III} \end{cases} \tag{5.20}$$

De aquí que entre $[0; 2\pi)$ siempre tendremos dos soluciones.

Ejemplos: *Vamos a resolver ecuaciones donde la incógnita es el ángulo, utilizando las funciones trigonométricas inversas:*

- **Ejemplo 1:** *Supongamos que queremos hallar un ángulo α tal que su seno sea igual a $1/2$. La ecuación que queremos resolver es:*

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$$

Entonces para despejar nuestra incógnita de la ecuación aplicamos la función arcoseno en ambos miembros.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{1}{2} \\ \operatorname{arc\,sen}[\operatorname{sen} \alpha] &= \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \alpha &= \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Ahora, como $\operatorname{sen} \alpha > 0$ tenemos entonces que $\alpha \in I$ ó $\alpha \in II$. De acuerdo a las relaciones encontradas en 5.16 y a los resultados encontrados en el ejercicio anterior, tendremos que las soluciones, en $[0; 2\,\pi)$, serán $\alpha_1 = \pi/6$ y $\alpha_2 = \pi - \alpha_1 = \frac{5}{6}\pi$.

En el caso en el que las soluciones no estén restringidas a un intervalo particular, entonces las soluciones son de la forma $\alpha_1 = \pi/6 + 2\,\pi\,k$ y $\alpha_2 = \frac{5}{6}\pi + 2\,\pi\,k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

- **Ejemplo 2:** *Supongamos que queremos hallar un ángulo β tal que su coseno sea igual a $-1/2$. La ecuación que queremos resolver es:*

$$\cos \beta = -\frac{1}{2}$$

Entonces para despejar nuestra incógnita de la ecuación aplicamos la función arcocoseno en ambos miembros.

$$\begin{aligned} \cos \beta &= -\frac{1}{2} \\ \operatorname{arc\,cos}[\cos \beta] &= \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \beta &= \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Ahora, como $\cos \beta < 0$ tenemos entonces que $\beta \in II$ ó $\beta \in III$. Entonces, de acuerdo a las relaciones 5.18 y a los resultados encontrados en el ejercicio anterior, las soluciones, en $[0; 2\,\pi)$, serán $\beta_1 = \frac{2}{3}\pi$ y $\beta_2 = 2\,\pi - \beta_1 = \frac{4}{3}\pi$.

En el caso de que las soluciones no estén restringidas a un intervalo particular, entonces las soluciones son de la forma $\beta_1 = \frac{2}{3}\pi + 2\,\pi\,k$ y $\beta_2 = \frac{4}{3}\pi + 2\,\pi\,k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

- **Ejemplo 3:** *Supongamos que queremos hallar un ángulo γ tal que su tangente sea igual a -1. La ecuación que queremos resolver es:*

$$\tan\gamma = -1$$

Entonces para despejar nuestra incógnita de la ecuación aplicamos la función arcotangente en ambos miembros.

$$\begin{aligned} \tan\gamma &= -1 \\ \arctan[\tan\gamma] &= \arctan(-1) \\ \gamma &= \arctan(-1) \end{aligned}$$

Ahora, como $\tan\gamma < 0$ *tenemos entonces que $\gamma \in II$ ó $\gamma \in IV$. Entonces, de acuerdo a las relaciones 5.20 y a los resultados encontrados en el ejercicio anterior, las soluciones, en $[0; 2\pi)$, serán $\gamma_1 = \frac{3}{4}\pi$ y $\gamma_2 = \pi + \gamma_1 = \frac{7}{4}\pi$.*

En el caso de que las soluciones no estén restringidas a un intervalo particular, entonces las soluciones son de la forma $\gamma_1 = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$ y $\gamma_2 = \frac{7}{4}\pi + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

5.5. Resolución de triángulos

Una aplicación de la trigonometría es la resolución de triángulos. Esto consiste en determinar los lados y/o los ángulos interiores a un triángulo conociendo algunos datos del mismo.

Para resolver este tipo de problemas, además de poder utilizar la relaciones fundamentales vistas anteriormente (identidades 5.8 y las relaciones 5.16, 5.18 y 5.20) vamos a utilizar dos teoremas y las relaciones entre los ángulos interiores de un triángulo.

5.5.1. Teorema del seno

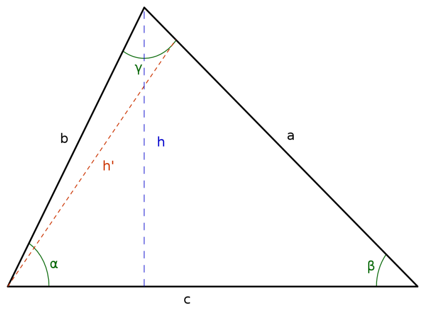
El teorema del seno dice que **dado cualquier triángulo de lados a, b y c, y cuyos ángulos interiores son α, formado por los lados b y c; β, formado por los lados a y c; y γ, formado por los lados a y b, se cumple que:**

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}} \tag{5.21}$$

Demostración

Para demostrar este teorema hay que ver que la relación 5.21 se cumple para todos los triángulos, por lo que vamos a demostrarlo para los triángulos acutángulo, obtusángulo y recto.

- **Triángulo acutángulo:** Si en el triángulo trazamos la altura h tomando al lado c como base podemos escribir que:



$$\left.\begin{array}{rcl} \operatorname{sen}\,\alpha & = & \dfrac{h}{b} \\ \operatorname{sen}\,\beta & = & \dfrac{h}{a} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} h & = & b\,\operatorname{sen}\,\alpha \\ h & = & a\,\operatorname{sen}\,\beta \end{array}\right.$$

Luego, igualando las dos expresiones de h encontramos que:

$$\begin{array}{rcl} b\,\operatorname{sen}\,\alpha & = & a\,\operatorname{sen}\,\beta \\ \dfrac{\operatorname{sen}\,\alpha}{a} & = & \dfrac{\operatorname{sen}\,\beta}{b} \end{array}$$

Si ahora trazamos la altura h' tomando al lado a como base podemos escribir que:

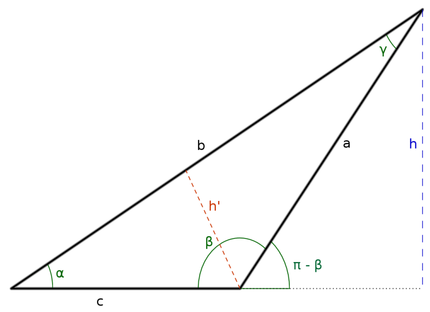
$$\left.\begin{array}{rcl} \operatorname{sen}\,\beta & = & \dfrac{h'}{c} \\ \operatorname{sen}\,\gamma & = & \dfrac{h'}{b} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} h' & = & c\,\operatorname{sen}\,\beta \\ h' & = & b\,\operatorname{sen}\,\gamma \end{array}\right.$$

Luego, igualando las dos expresiones de h' encontramos que:

$$\begin{array}{rcl} c\,\operatorname{sen}\,\beta & = & b\,\operatorname{sen}\,\gamma \\ \dfrac{\operatorname{sen}\,\beta}{b} & = & \dfrac{\operatorname{sen}\,\gamma}{c} \end{array}$$

Finalmente, encontramos que como $\dfrac{\operatorname{sen}\,\alpha}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\,\beta}{b}$ y $\dfrac{\operatorname{sen}\,\beta}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\,\gamma}{c}$ demostramos que el teorema del seno se cumple para los triángulos acutángulos.

- **Triángulo obtusángulo:** Esta demostración sigue la misma metodología que llevamos a cabo anteriormente. Trazamos la altura h tomando al lado c como base. Entonces,



$$\left.\begin{array}{rcl} \text{sen } \alpha & = & \dfrac{h}{b} \\ \text{sen}(\pi - \beta) = \text{sen } \beta & = & \dfrac{h}{a} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} h & = & b \text{ sen } \alpha \\ h & = & a \text{ sen } \beta \end{array}\right.$$

Por lo tanto,

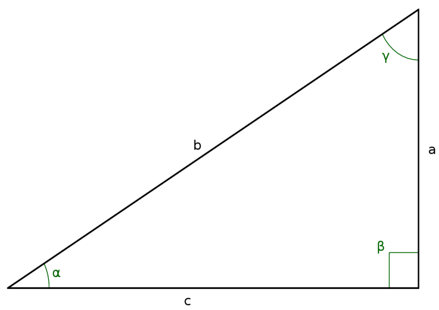
$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b}$$

Si ahora trazamos la altura h' tomando al lado b como base podemos escribir que:

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{sen } \alpha & = & \dfrac{h'}{c} \\ \text{sen } \gamma & = & \dfrac{h'}{a} \end{array}\right\} \Longrightarrow h' = c \text{ sen } \alpha = a \text{ sen } \gamma \Longrightarrow \frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$$

Finalmente, encontramos que como $\dfrac{\text{sen } \alpha}{a} = \dfrac{\text{sen } \beta}{b}$ y $\dfrac{\text{sen } \alpha}{a} = \dfrac{\text{sen } \gamma}{c}$ demostramos que el teorema del seno se cumple para los triángulos obtusángulos.

- **Triángulo rectángulo:** Esta demostración es un poco más simple porque ahora $\beta = \pi/2$ entonces sen $\beta = 1$.



$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\,\alpha &= \frac{a}{b} \\
b \operatorname{sen}\,\alpha &= a \\
b \operatorname{sen}\,\alpha &= a \operatorname{sen}\,\beta \quad (\text{vale porque } \operatorname{sen}\beta = 1) \\
\frac{\operatorname{sen}\,\alpha}{a} &= \frac{\operatorname{sen}\,\beta}{b}
\end{aligned}
$$

Análogamente tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\,\gamma &= \frac{c}{b} \\
b \operatorname{sen}\,\gamma &= c \\
b \operatorname{sen}\,\gamma &= c \operatorname{sen}\,\beta \\
\frac{\operatorname{sen}\,\gamma}{c} &= \frac{\operatorname{sen}\,\beta}{b}
\end{aligned}
$$

Finalmente, encontramos que como $\dfrac{\operatorname{sen}\,\alpha}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\,\beta}{b}$ y $\dfrac{\operatorname{sen}\,\beta}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\,\gamma}{c}$ demostramos que el teorema del seno se cumple para los triángulos rectángulos.

De este modo hemos demostrado que el teorema del seno vale para cualquier triángulo.

5.5.2. Teorema del coseno

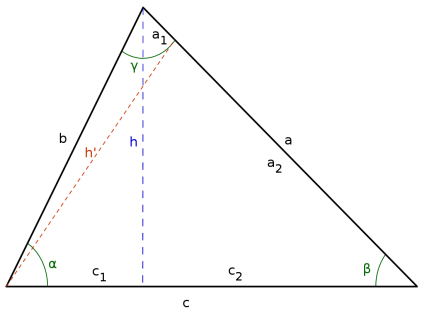
El teorema del coseno dice que **dado cualquier triángulo de lados a, b y c, y cuyos ángulos interiores son α, formado por los lados b y c; β, formado por los lados a y c; y γ, formado por los lados a y b, se cumple que:**

$$
\boxed{
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma
\end{aligned}
}
\tag{5.22}
$$

Demostración

Nuevamente este teorema hay que demostrarlo para todos los triángulos.

- **Triángulo acutángulo:** Si en el triángulo trazamos la altura h tomando al lado c como base podemos escribir que:



$$\begin{array}{rcl} \text{sen } \alpha = \dfrac{h}{b} & \Longrightarrow & h = b \text{ sen } \alpha \\ \cos \alpha = \dfrac{c_1}{b} & \Longrightarrow & c_1 = b \cos \alpha \\ c = c_1 + c_2 & \Longrightarrow & c_2 = c - c_1 = c - b \cos \alpha \end{array}$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$a^2 = h^2 + c_2^2$$

Luego, reemplazamos que $h = b \text{ sen } \alpha$ y $c_2 = c - b \cos \alpha$,

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + c_2^2 \\ &= (b \text{ sen } \alpha)^2 + (c - b \cos \alpha)^2 \\ &= b^2 \text{ sen}^2 \alpha + c^2 - 2\, c\, b \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha \\ &= b^2(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2\, b\, c \cos \alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos \alpha \end{aligned}$$

De este modo encontramos que $a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos \alpha$. Ahora hay que encontrar las otras dos igualdades. Esto se hace de forma análoga.

$$\begin{array}{rcl} \text{sen } \beta = \dfrac{h}{a} & \Longrightarrow & h = a \text{ sen } \beta \\ \cos \beta = \dfrac{c_2}{a} & \Longrightarrow & c_2 = a \cos \beta \\ c = c_1 + c_2 & \Longrightarrow & c_1 = c - c_2 = c - a \cos \beta \end{array}$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + c_1^2 \\ &= (a \text{ sen } \beta)^2 + (c - a \cos \beta)^2 \\ &= a^2 \text{ sen}^2 \beta + c^2 - 2\, c\, a \cos \beta + a^2 \cos^2 \beta \\ &= a^2(\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta) + c^2 - 2\, a\, c \cos \beta \\ &= a^2 + c^2 - 2\, a\, c \cos \beta \end{aligned}$$

Y para encontrar la última igualdad trazamos la altura h' y luego hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{sen }\gamma &= \frac{h'}{b} &\Longrightarrow\quad h' &= b \text{ sen }\gamma \\ \cos\gamma &= \frac{a_1}{b} &\Longrightarrow\quad a_1 &= b\cos\gamma \\ a = a_1 + a_2 & &\Longrightarrow\quad a_2 &= a - a_1 = a - b\cos\gamma \end{aligned}$$

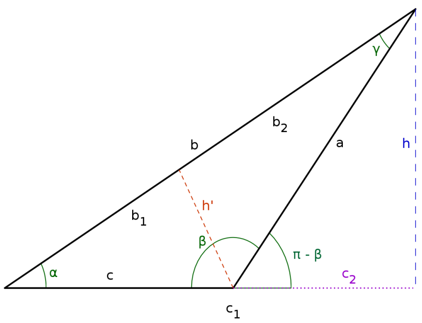
Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned} c^2 &= (h')^2 + a_2^2 \\ &= (b \text{ sen }\gamma)^2 + (a - b\cos\gamma)^2 \\ &= b^2 \text{ sen}^2\gamma + a^2 - 2\,a\,b\cos\gamma + b^2\cos^2\gamma \\ &= b^2(\text{sen}^2\gamma + \cos^2\gamma) + a^2 - 2\,a\,b\cos\gamma \\ &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma \end{aligned}$$

Finalmente, encontramos que para un triángulo acutángulo se cumple que:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma \end{aligned}$$

- **Triángulo obtusángulo:** Esta demostración es bastante similar a la anterior. Trazamos la altura h tomando al lado c como base podemos escribir que:



$$\begin{aligned} \text{sen }\alpha &= \frac{h}{b} &\Longrightarrow\quad h &= b \text{ sen }\alpha \\ \cos\alpha &= \frac{c_1}{b} &\Longrightarrow\quad c_1 &= b\cos\alpha \\ c_1 = c + c_2 & &\Longrightarrow\quad c_2 &= c_1 - c = b\cos\alpha - c \end{aligned}$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + c_2^2 \\ &= (b \text{ sen }\alpha)^2 + (b\cos\alpha - c)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha \end{aligned}$$

Para el lado b hacemos lo mismo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\pi - \beta) = \operatorname{sen} \beta = \frac{h}{a} &\implies h = a \operatorname{sen} \beta \\ \cos(\pi - \beta) = -\cos \beta = \frac{c_2}{a} &\implies c_2 = -a \cos \beta \\ c_1 = c + c_2 &\implies c_1 = c - a \cos \beta \end{aligned}$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + c_1^2 \\ &= (a \operatorname{sen} \beta)^2 + (c - a \cos \beta)^2 \\ &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos \beta \end{aligned}$$

Y para el lado c trazamos la altura h'.

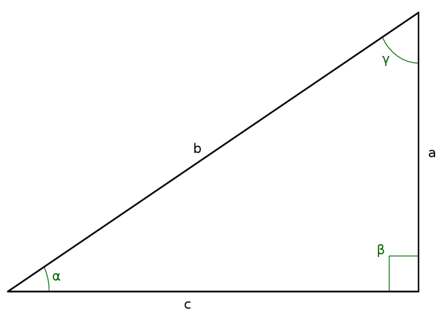
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \gamma = \frac{h'}{a} &\implies h' = a \operatorname{sen} \gamma \\ \cos \gamma = \frac{b_2}{a} &\implies b_2 = a \cos \gamma \\ b = b_1 + b_2 &\implies b_1 = b - a \cos \gamma \end{aligned}$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned} c^2 &= (h')^2 + b_1^2 \\ &= (a \operatorname{sen} \gamma)^2 + (b - a \cos \gamma)^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2\,b\,c \cos \gamma \end{aligned}$$

De este modo demostramos que el teorema del coseno vale para triángulos obtusángulos.

- **Triángulo rectángulo:** Esta demostración es más simple porque en este caso $\beta = \pi/2$ por lo que $\cos \beta = 0$.



Entonces, por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$b^2 \,=\, a^2 \,+\, c^2$$

Pero como $\cos\beta \,=\, 0$ resulta entonces que $-2\,a\,c\,\cos\beta \,=\, 0$. Por lo tanto,

$$b^2 \,=\, a^2 \,+\, c^2 \,-\, 2\,a\,c\,\cos\beta$$

Ahora, para hallar la segunda igualdad, despejamos a^2 de la expresión $b^2 \,=\, a^2 \,+\, c^2$ y sumamos y restamos c^2 en el segundo miembro:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 \,-\, c^2 \\ &= b^2 \,-\, c^2 \,+\, c^2 \,-\, c^2 \\ &= b^2 \,+\, c^2 \,-\, 2\,c^2 \end{aligned}$$

De la figura tenemos que:

$$\cos\alpha \,=\, \frac{c}{b} \Longrightarrow c \,=\, b\,\cos\alpha$$

Luego podemos escribir que:

$$c^2 \,=\, c\,.\,c = c\,b\,\cos\alpha$$

Reemplazamos esto en la expresión de a^2 y obtenemos que:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 \,+\, c^2 \,-\, 2\,c^2 \\ &= b^2 \,+\, c^2 \,-\, 2\,b\,c\,\cos\alpha \end{aligned}$$

Para hallar la última igualdad, hacemos el mismo procedimiento que hicimos para a^2, pero ahora teniendo en cuenta que $\cos\gamma \,=\, \frac{a}{b} \Longrightarrow a \,=\, b\,\cos\gamma$. Entonces,

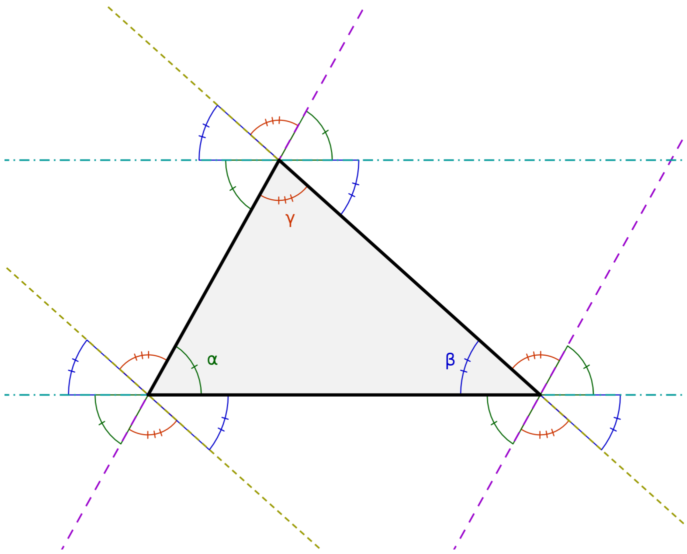
$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 \,-\, a^2 \\ &= b^2 \,-\, a^2 \,+\, a^2 \,-\, a^2 \\ &= b^2 \,+\, a^2 \,-\, 2\,a^2 \\ &= a^2 \,+\, b^2 \,-\, 2\,a\,b\,\cos\gamma \end{aligned}$$

Finalmente, demostramos que el teorema del coseno se cumple para cualquier ángulo. Ahora podemos pensar al teorema de Pitágoras como un caso particular del teorema del coseno.

5.5.3. Ángulos interiores de un triángulo

Geométricamente se puede demostrar, utilizando el teorema de Thales[3], que los ángulos interiores de un triángulo cualquiera suman 180°.

[3] El teorema de Thales dice que cuando dos rectas secantes son cortadas por varias rectas paralelas, los segmentos que se forman en una de las secantes son proporcionales a los que se forman en la otra. El grupo musical llamado Les Luthiers hizo una canción con el enunciado y la demostración del teorema, que lo pueden ver en aquí (http://www.youtube.com/watch?v=DsIh1m7B-xQ).



$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°} \tag{5.23}$$

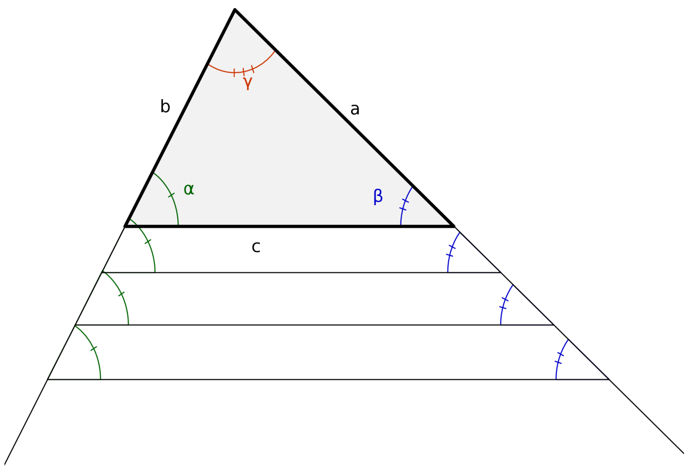
5.5.4. Resolución de triángulos

Como dijimos al comienzo de esta sección, la idea de resolver triángulos es poder determinar los lados y los ángulos interiores conociendo algunos datos del triángulo en cuestión.

Para poder resolver completamente un triángulo se necesitan conocer, al menos, tres de sus elementos. De modo que tendremos 5 casos diferentes, pero sólo existen 4 casos diferentes para los cuáles 1 lado siempre será conocido y por lo tanto podremos resolver el problema.

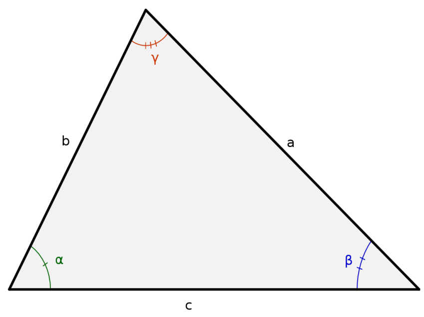
- *Se conocen los tres ángulos:*

  En el caso de que no se conozca ninguno de los lados, no se podrá resolver el problema debido a que existen infinitos triángulos semejantes.



- *Se conocen los tres lados:*

  Supongamos que conocemos las longitudes de los lados a, b y c de un triángulo y queremos hallar sus ángulos interiores. Para resolver el problema vamos a utilizar el teorema del coseno.



$$
\begin{aligned}
a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha &\implies \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} \\
b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta &\implies \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c} \\
\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ &\implies \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta
\end{aligned}
$$

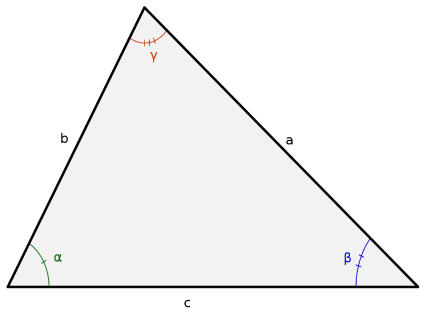
Así encontramos los tres ángulos que buscábamos:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}\right) \\
\beta &= \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}\right) \\
\gamma &= 180^\circ - \alpha - \beta
\end{aligned}
$$

En este caso, como los ángulos interiores a un triángulo son menores que 180°, si el coseno es positivo pertenecen al primer cuadrante, mientras que si es negativo pertenecen al segundo. Si la suma de dos de los ángulos interiores es mayor a 180°, no existe el triángulo.

- *Se conocen un lado y dos ángulos:*

  Supongamos que conocemos la longitud del lado b y la amplitud de los ángulos α y γ de un triángulo y queremos hallar sus elementos restantes. Para resolver el problema vamos a utilizar el teorema del seno.



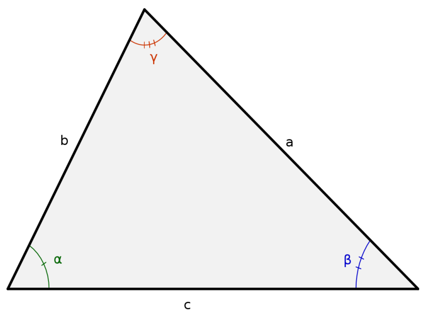
$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \implies \beta = 180° - \alpha - \gamma$$
$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} \implies a = b\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}$$
$$\frac{\text{sen } \gamma}{c} = \frac{\text{sen } \beta}{b} \implies c = b\frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \beta}$$

Así encontramos los dos lados y el ángulo que buscábamos:

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma$$
$$a = b\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}$$
$$c = b\frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \beta}$$

- *Se conocen dos lados y el ángulo comprendido:*

  Supongamos que conocemos las longitudes de los lados a y b, y la amplitud del ángulo γ de un triángulo y queremos hallar sus elementos restantes. Para resolver el problema vamos a utilizar el teorema del coseno.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma \implies c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha \implies \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \implies \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

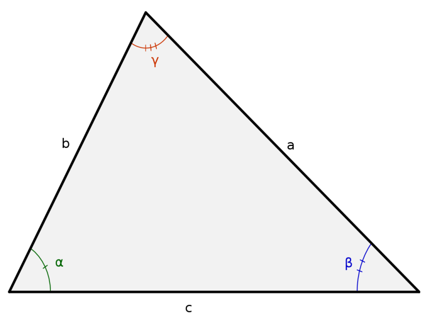
Así encontramos el lado y los ángulos que buscábamos:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma} \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}\right) \\ \beta &= 180^\circ - \alpha - \gamma \end{aligned}$$

En este caso se omite el doble signo cuando despejamos c, porque como es una longitud está obligado a ser positivo.

- *Se conocen dos lados y un ángulo no comprendido:*

  Supongamos que conocemos las longitudes de los lados a y b, y la amplitud del ángulo α de un triángulo y queremos hallar sus elementos restantes. Para resolver el problema vamos a utilizar el teorema del seno y del coseno.



$$\frac{\text{sen }\alpha}{a} = \frac{\text{sen }\beta}{b} \implies \text{sen }\beta = \frac{b}{a}\,\text{sen }\alpha$$

Esto es un resultado importante e implica que, siempre que sea posible, es mejor utilizar el teorema del coseno.

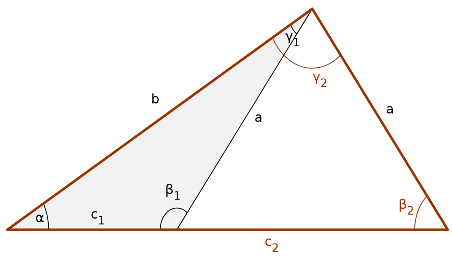
En este caso, como $\text{sen }\beta > 0$ tenemos dos soluciones: $\beta_2 \in \text{I}$ y $\beta_1 = \pi - \beta_2 \in \text{II}$. Por lo tanto tendremos dos triángulos posibles, uno para cuando $\beta \in \text{II}$:

$$\alpha + \beta_1 + \gamma_1 = 180^\circ \implies \gamma_1 = 180^\circ - \alpha - \beta_1$$
$$c_1^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma_1 \implies c_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma_1}$$

Y otro para cuando $\beta \in \text{I}$:

$$\alpha + \beta_2 + \gamma_2 = 180° \implies \gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2$$
$$c_2^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma_2 \implies c_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma_2}$$

Este es el único caso en el que tenemos dos soluciones.



$$\begin{aligned} \beta_1 &= \pi - \beta_2; \quad \beta_1 \in \mathrm{II} \\ \gamma_1 &= 180° - \alpha - \beta_1 \\ c_1 &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha\right); \quad \beta_2 \in \mathrm{I} \\ \gamma_2 &= 180° - \alpha - \beta_2 \\ c_2 &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma_2} \end{aligned}$$

Ejemplo: Problema de Eratóstenes

Eratóstenes nació en Cyrene (Actualmente Libia) en el año 276 a. C. Fue astrónomo, historiador, geógrafo, filósofo, poeta, crítico teatral, matemático y también gran amigo de Arquímedes. Estudió en Alejandría y Atenas. Alrededor del año 255 a. C fue el tercer director de la Biblioteca de Alejandría. Trabajó con problemas de matemáticas, como la duplicación del cubo y números primos. Escribió muchos libros de los cuales sólo se tienen noticias por referencias bibliográficas de otros autores.

Se considera que Eratóstenes fue el primero en medir, con un método científico, la longitud de circunferencia de la Tierra. Para ello utilizó la trigonometría.

Estudiando los papiros de la biblioteca, encontró un escrito que le llamó la atención: "en Siena (hoy Asuán, en Egipto) el día del solsticio de verano los objetos no proyectan sombra alguna y la luz del sol alumbra el fondo de los pozos". De aquí él dedujo que la ciudad estaba situada justamente sobre la línea del trópico (el trópico de Cáncer) y su latitud era igual a la de la eclíptica[4] *que ya conocía. Eratóstenes, suponiendo que Siena y Alejandría tenían la misma longitud (realmente distan 3°) y que el sol se encontraba tan alejado de la Tierra que sus rayos podían suponerse paralelos, observó que en Alejandría el mismo día del solsticio de verano al mediodía los objetos sí proyectaban*

[4]Se llama eclíptica al plano que contiene al sol y a la Tierra. El Ecuador tiene una inclinación de $23°\,27'$ con respecto a la Eclíptica.

sombra. Este resultado fue muy importante para la época, ya que demostraba que la Tierra era esférica[5]*. Midiendo la longitud de dicha sombra encontró que la ciudad distaba 1/50 parte de la circunferencia, es decir,* $7^\circ\,12'$ *de Alejandría.*

Posteriormente, midió la distancia entre ambas ciudades. Existen distintas versiones sobre cómo fue que midió esta distancia. Algunos dicen que contrató un regimiento de soldados que diera pasos de tamaño uniforme y los contara. Otros afirman que utilizó la distancia estimada por las caravanas que comerciaban entre ambas ciudades. También hay quienes creen que pudo obtener el dato en la propia Biblioteca de Alejandría.

Fijando la distancia entre las ciudades en 5.000 estadios, pudo calcular la circunferencia de la Tierra resultando de 250.000 estadios, de modo que a cada grado equivale, aproximadamente, a 700 estadios[6]*.*

Si suponemos que Eratóstenes usó el estadio equivalente a 185 m, resulta que la longitud de circunferencia de la Tierra es de 46250 km. Sin embargo, si suponemos utilizó el estadio egipcio (equivalente a 300 codos de 52,4 cm), la circunferencia calculada es de 39300 km.

El radio ecuatorial terrestre es de 6371 km, por lo tanto, la longitud de circunferencia sobre el Ecuador es igual a 40030 km. Esto significa que los cálculos de Eratóstenes fueron muy exactos considerando que los hizo hace más de 2200 años.

[5]Sólo dos personas que vivieron antes de Eratóstenes habían sugerido la idea de esfericidad de la Tierra. El primero fue Pitágoras, pero su idea se basaba en que la esfera era la figura geométrica perfecta y por lo tanto la Tierra, para ser perfecta, debía ser esférica. El segundo fue Aristóteles, su conclusión se basaba en dos cuestiones: la primera era que los viajeros que viajaban hacia el sur veían las constelaciones de ese hemisferio subir su posición en el horizonte. Eso sólo es posible si dicho horizonte se encuentra formando un ángulo con respecto al horizonte de alguien ubicado más al norte. Por lo tanto, la forma de la Tierra no podía ser plana. La segunda era que el borde de la sombra de la Tierra en la Luna durante la fase parcial de un eclipse lunar siempre es circular, sin importar cuan alta esté la Luna sobre el horizonte. La única figura geométrica cuya sombra proyectada en cualquier dirección es circular, es la esfera.

[6]Haciendo clic aquí podrás ver un video donde se cuenta esta historia.
(http://www.youtube.com/watch?v=H5kRZdsX7p4)

5.6. Resolución de problemas

Problema 1: Calcular:

$$\frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\operatorname{sen}(\pi-x)}\,\frac{\cos(3\pi-x)}{\cos(\pi+x)}+\sec^{-2}(-x)+\csc^{-2}(\pi-x)=$$

Para resolver este problema debemos utilizar las relaciones fundamentales y sus corolarios (funciones trigonométricas del ángulo opuesto, del ángulo doble y del ángulo mitad).

Analicemos factor por factor.

- $\operatorname{sen}(x+\pi)$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+\pi) &= \operatorname{sen}(x)\cos(\pi)+\cos(x)\operatorname{sen}(\pi)\\ &= \operatorname{sen}(x)\,(-1)+\cos(x)\,0\\ &= -\operatorname{sen}(x)\end{aligned}$$

- $\operatorname{sen}(\pi-x)$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\pi-x) &= \operatorname{sen}(\pi)\cos(x)-\cos(\pi)\operatorname{sen}(x)\\ &= 0\cos(x)-(-1)\operatorname{sen}(x)\\ &= \operatorname{sen}(x)\end{aligned}$$

- $\cos(3\pi-x)$

$$\begin{aligned}\cos(3\pi-x) &= \cos(3\pi)\cos(x)+\operatorname{sen}(3\pi)\operatorname{sen}(x)\\ &= \cos(2\pi+\pi)\cos(x)+\operatorname{sen}(2\pi+\pi)\operatorname{sen}(x)\\ &= \cos(\pi)\cos(x)+\operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(x)\\ &= (-1)\cos(x)+0\operatorname{sen}(x)\\ &= -\cos(x)\end{aligned}$$

- $\cos(\pi+x)$

$$\begin{aligned}\cos(\pi+x) &= \cos(\pi)\cos(x)-\operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(x)\\ &= (-1)\cos(x)-0\operatorname{sen}(x)\\ &= -\cos(x)\end{aligned}$$

- $\sec^{-2}(-x)$

$$\begin{aligned}\sec^{-2}(-x) &= [\sec(-x)]^{-2}\\ &= \left[\frac{1}{\cos(-x)}\right]^{-2}\\ &= [\cos(-x)]^{2}\\ &= [\cos(x)]^{2}\\ &= \cos^{2}(x)\end{aligned}$$

- $\csc^{-2}(\pi - x)$

$$\begin{aligned}
\csc^{-2}(\pi - x) &= [\csc(\pi - x)]^{-2} \\
&= \left[\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi - x)}\right]^{-2} \\
&= [\operatorname{sen}(\pi - x)]^{2} \\
&= [\operatorname{sen}(\pi)\cos(x) - \cos(\pi)\operatorname{sen}(x)]^{2} \\
&= [0\cos(x) - (-1)\operatorname{sen}(x)]^{2} \\
&= [\operatorname{sen}(x)]^{2} \\
&= \operatorname{sen}^{2}(x)
\end{aligned}$$

Ahora juntamos todos los resultados y resolvemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\operatorname{sen}(\pi - x)}\,\frac{\cos(3\pi - x)}{\cos(\pi + x)} + \sec^{-2}(-x) + \csc^{-2}(\pi - x) = \\
&= \frac{-\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,\frac{-\cos(x)}{-\cos(x)} + \cos^{2}(x) + \operatorname{sen}^{2}(x) = \\
&= \frac{-\cancel{\operatorname{sen}(x)}}{\cancel{\operatorname{sen}(x)}}\,\frac{\cancel{-\cos(x)}}{\cancel{-\cos(x)}} + \cos^{2}(x) + \operatorname{sen}^{2}(x) = \\
&= -1\,.\,1 + 1 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

<u>Problema 2:</u> Claudio y Daniel están a 53 metros uno de otro. Claudio, desde su posición, ve un cofre pirata, e inmediatamente mide el ángulo que el mismo forma con la posición de Daniel, resultando de 37°. Daniel, al advertirlo, mide enseguida el ángulo que forma el cofre con Claudio, resultando de 44°. Calcular quién de los dos se halla más cerca del cofre.

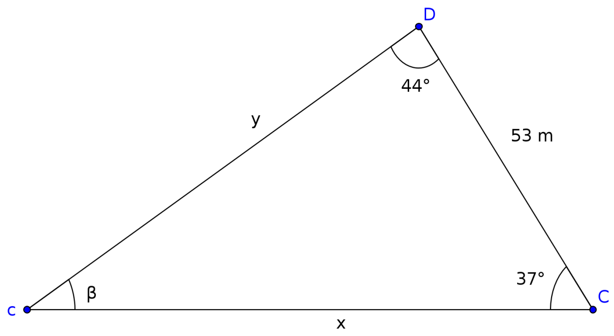
En estos problemas hay dos puntos importantes a tener en cuenta: uno es hacer el gráfico de la situación correctamente, y el otro es su resolución.

En el gráfico vamos a llamar C a la posición de Claudio, D a la posición de Daniel y c a la posición del cofre. Queda claro que éstos serán los vértices del triángulo.

Luego hay que reconocer los ángulos que corresponden a los datos del problema. Uno es el ángulo que mide Claudio, que es el ángulo que el cofre forma con Daniel. Esto quiere decir que el vértice del ángulo será Claudio.

El otro ángulo es el medido por Daniel, por lo tanto será el ángulo cuyo vértice es D.

Para poder saber quién está más cerca del cofre hay que calcular las longitudes de los segmentos $\overline{Cc}$ y $\overline{Dc}$. A estas distancias las llamaremos x e y respectivamente. Finalmente, nuestro esquema del problema es el siguiente:



Ahora para resolver el problema, primero vamos hallar la amplitud de ángulo restante, que llamaremos β. Esto lo hacemos utilizando el hecho de que los ángulos interiores suman 180°.

$$\begin{aligned} \beta + 37^\circ + 44^\circ &= 180^\circ \\ \beta &= 180^\circ - 37^\circ - 44^\circ \\ \beta &= 99^\circ \end{aligned}$$

Luego, para determinar los valores de x e y vamos a usar el teorema del seno. Primero busquemos x.

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen } \beta}{53\,\text{m}} &= \frac{\text{sen } 44^\circ}{x} \\ x &= 53\,\text{m}\,\frac{\text{sen } 44^\circ}{\text{sen } \beta} \\ x &= 53\,\text{m}\,\frac{\text{sen } 44^\circ}{\text{sen } 99^\circ} \\ x &\simeq 37.28\,\text{m} \end{aligned}$$

Ahora hacemos el mismo procedimiento para halla el valor de y.

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen } \beta}{53\,\text{m}} &= \frac{\text{sen } 37^\circ}{y} \\ y &= 53\,\text{m}\,\frac{\text{sen } 37^\circ}{\text{sen } \beta} \\ y &= 53\,\text{m}\,\frac{\text{sen } 37^\circ}{\text{sen } 99^\circ} \\ y &\simeq 32.29\,\text{m} \end{aligned}$$

Finalmente, encontramos que el que está más cerca del cofre es Daniel ya que se encuentra a una distancia de aproximadamente 32.29 m, mientras que Claudio se encuentra a una distancia de ~ 37.28 m.

Práctica 5

1. Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

   a) $15^\circ\, 24' \;=\; 924^{\mathrm{m}}$

   b) $162°5 \;=\; 162^\circ\, 5'$

   c) $\dfrac{5}{4}\,\pi \;=\; 225^\circ$

2. Completá con V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Justificá.

   a) Si el coseno de un ángulo es negativo, el ángulo pertenece al tercer o cuarto cuadrante.

   b) Si el coseno de un ángulo es negativo y el seno del mismo ángulo es positivo, el ángulo pertenece al segundo cuadrante.

   c) Si la tangente de un ángulo es positiva, se puede asegurar que dicho ángulo pertenece al primer cuadrante.

   d) Si un ángulo pertenece al tercer cuadrante, el seno de dicho ángulo es positivo.

   e) Si el seno de un ángulo es positivo y la tangente es positiva, el ángulo pertenece al primer cuadrante.

3. Hallar el seno, el coseno y la tangente del ángulo β, en función de las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha \in$ I cuadrante, sabiendo que:

   a) α y β son ángulos complementarios.

   b) α y β son ángulos suplementarios.

4. Demuestre, utilizando las relaciones fundamentales, las siguientes identidades:

   a) $\tan(\alpha \,+\, \beta) \;=\; \dfrac{\tan\,\alpha \,+\, \tan\,\beta}{1 \,-\, \tan(\alpha)\,\tan(\beta)}$

   b) $\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{\cos\gamma}{\cot\gamma}$

   c) $|\sec\delta| = \sqrt{1+\tan^2\delta}$

   d) $1 - \operatorname{sen}\theta = (\operatorname{sen}\theta/2 - \cos\theta/2)^2$

   e) $\sec(2\epsilon) = \dfrac{-1}{1-2\cos^2\epsilon}$

5. Completa la siguiente tabla.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	2π
sen x																	
cos x																	
tan x																	
csc x																	
sec x																	
cot x																	

A estos ángulos se les conoce con exactitud el valor de sus funciones trigonométricas. Esto quiere decir que en la resolución de problemas los podemos tomar como datos conocidos.

6. Encuentra el valor de los ángulos, pertenecientes al intervalo $[0, 2\pi)$, que satisfacen las siguientes condiciones:

   a) $\tan(\gamma) = 1$

   b) $\operatorname{sen}(\epsilon) = \sqrt{3}\,\cos(\epsilon)$

   c) $\arccos 1 = \theta$

   d) $\operatorname{sen}(\delta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   e) $\cos(\beta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   f) $\tan(\alpha) = 10^{10000}$

   g) $\operatorname{arc\,sen} 0 = x$

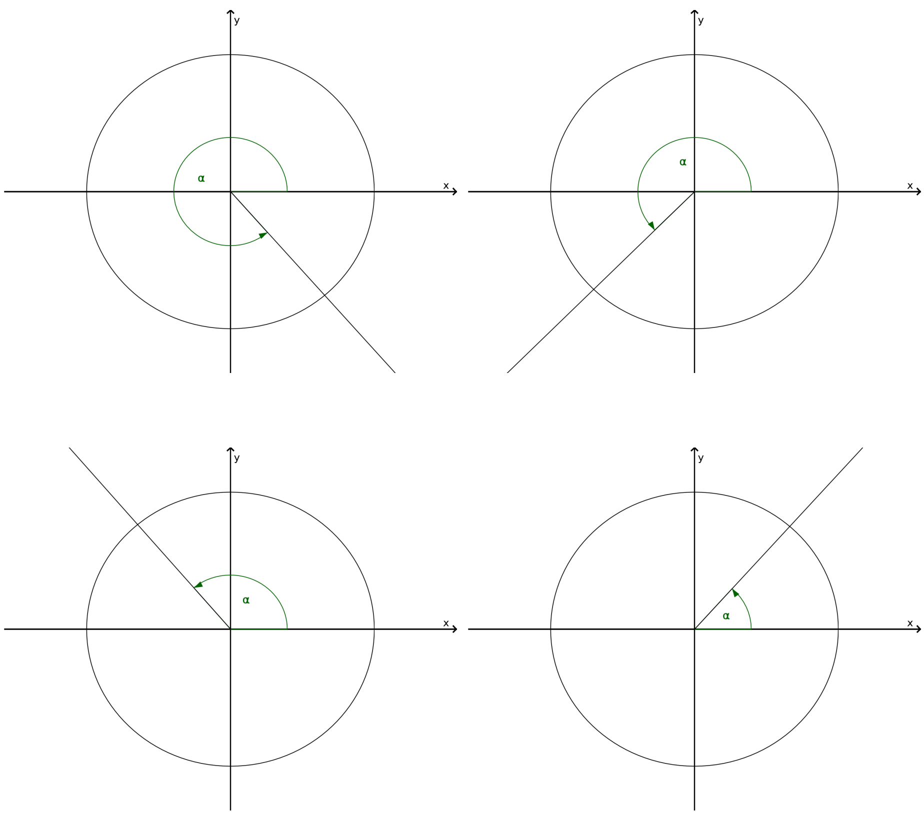
7. Calcula, en grados sexagesimales, el valor aproximado de cada uno de los siguientes ángulos: $\alpha = 1$ rad, $\beta = 8\pi$, $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$ y $\delta = 3.5$.

8. Expresa los siguientes ángulos en radianes, dando las respuestas en función de π: $\rho = 150°$, $\epsilon = 210°$, $\lambda = 60°$ y $\mu = 315°$.

9. Completa el siguiente cuadro:

Sistema horario	Sistema sexagesimal	Sistema circular
	$270°$	
		$\frac{\pi}{6}$
12^{h}		
		$\frac{2}{3}\,\pi$
		$\frac{3}{4}\,\pi$
3^{h}		
	$20°$	
84^{h}		

10. Dibuja en cada una de las circunferencias trigonométricas los segmentos que representan al sen α, cos α y tan α.



11. Calcula el valor de las restantes funciones trigonométricas, sin hallar el ángulo x, teniendo en cuenta los siguientes datos:

   a) sen $x\; = \;\dfrac{1}{2}$ y $x \in \mathrm{I}$

   b) tan $x\; = \;-\sqrt{3}$ y $x \in \mathrm{II}$

   c) cos $x\; = \;\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $x \in \mathrm{IV}$

12. Marca con una cruz la opción correcta. Justifica.

a) Si $f(x) = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, entonces $f(\pi/3)$ es igual a:

$\square\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\square\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\square\ \dfrac{1}{4}$ $\quad\square\ \dfrac{1}{2}$

b) Si $f(x) = -2\tan(-\pi - x)$, entonces $f(-\pi/6)$ es igual a:

$\square\ -2\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\square\ 2\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\square\ \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ $\quad\square\ -\sqrt{3}$

c) Si $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, entonces $f(-\pi/3)$ es igual a:

$\square\ -\sqrt{3}$ $\quad\square\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\square\ \sqrt{3}$ $\quad\square\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

13. Resuelve.

a) $\cos(-x)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \operatorname{sen}(\pi + x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) =$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi + x) - 2\operatorname{sen}(-x)}{4\cos(\pi + x) + \cos(2\pi - x)} =$

c) $\dfrac{\cos(\pi - x)\cos(\pi + x)}{2\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)} =$

d) $\operatorname{sen}^3(\pi + x) - \cos^3\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) =$

e) $\tan(-x)\cos(\pi + x)(\csc x)^{-1} + \operatorname{sen}^2(\pi + x) + 2\cos^2(-x) =$

f) $\dfrac{\cos(\pi + y)}{\operatorname{sen}(\pi/2 - y)}\ \dfrac{\operatorname{sen}(2y)}{\operatorname{sen}(4\pi + y)}\ \tan(-y)\arccos(-1) + \operatorname{sen}(-y + \pi) =$

14. Utilizando las fórmulas del seno y el coseno para la adición y sustracción y la tabla dada en la reducción al primer cuadrante, calcula en forma exacta (sin hacer la cuenta en la calculadora):

a) $\operatorname{sen}(75°)$

b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

c) $\tan(15°)$

d) $\csc\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)$

e) $\sec\left(\dfrac{7}{12}\pi\right)$

15. Simplifica la expresión mediante la aplicación de una fórmula de ángulo doble o semiángulo según corresponda:

    a) $\operatorname{sen}(18°)\, 2\, \cos(18°) \;=$

    b) $\dfrac{1 \,-\, \cos(4\,\alpha)}{\operatorname{sen}(4\,\alpha)} \;=$

    c) $-\, \operatorname{sen}^2(5\,\beta) \,+\, \cos^2(5\,\beta) \;=$

    d) $\sqrt{\dfrac{1 \,-\, \cos(8\,\delta)}{2}} \;=$

16. Determina cuáles de las siguientes expresiones son identidades trigonométricas.

    a) $\cos^2 \alpha \,=\, 1 \,-\, \operatorname{sen}^2 \alpha$

    b) $\operatorname{sen} \alpha \,+\, \cos \alpha \,=\, \tan \alpha$

    c) $\tan \alpha \,.\, \cot \alpha \,=\, 1$

    d) $\operatorname{sen} \alpha \,=\, 1 \,-\, \csc \alpha$

    e) $\cos \alpha \,=\, (\sec \alpha)^{-1}$

    f) $\operatorname{sen} \alpha \,+\, \cos \alpha \,=\, 1$

17. Verifica las siguientes identidades trigonométricas.

    a) $\dfrac{1 \,+\, \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \,+\, \tan \alpha \,=\, \dfrac{1 \,+\, \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \,.\, \cos \alpha}$

    b) $\dfrac{1 \,+\, \tan \beta}{1 \,+\, \cot \beta} \,=\, \tan \beta$

    c) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 \beta}\,(1 \,-\, \operatorname{sen}^2 \beta)} \,+\, \tan^2 \beta \,=\, \sec^2 \beta$

    d) $\dfrac{\operatorname{sen}(x \,+\, y) \,-\, \operatorname{sen}(x \,-\, y)}{\cos(x \,+\, y) \,+\, \cos(x \,-\, y)} \,=\, \tan y$

18. Plantea y resuelve cada uno de los siguientes problemas.

    a) ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol cuando un mástil de 24 m proyecta una sombra de 16 m?

    b) ¿Cuál es la altura de una antena si una persona que se encuentra a 250 m de su base, observa la punta bajo un ángulo de 22°?

    c) ¿Cuál es el área de un pentágono regular de 40 cm de perímetro?

    d) Un barrilete se encuentra a 40 m de altura y su cuerda tiene una longitud de 80 m. ¿Cuál es el ángulo que forma la cuerda con el piso?

e) ¿Cuál es el área de un rombo de 4 cm. de lado y un ángulo interior de 67°?

f) Un árbol está situado en la orilla de un río. El extremo superior del árbol, desde un cierto punto ubicado en la otra orilla del río, determina un ángulo de elevación de 17°. Si a 25 m de dicho punto y en dirección al árbol, el ángulo es de 35°, ¿cuál es la altura del mismo?

g) Tres pueblos X, W y Z, están unidos por carreteras rectas. La distancia entre X y W es de 6 km.; a los pueblos W y Z los separan 9 Km. El ángulo que forman las carreteras que unen X con W y W con Z es de 120°.¿Qué distancia hay entre X y Z?

h) En una plazoleta de forma triangular, los lados miden 60 m, 75 m y 50 m ¿Qué ángulos se forman en las esquinas de las mismas?

i) Un helicóptero viaja de una ciudad a otra, distantes entre si 40 Km. En un determinado momento, los ángulos que forman las visuales, desde el helicóptero, hacia las ciudades con la horizontal son de 14° y 26°, respectivamente. ¿Qué distancia hay en ese momento entre el helicóptero y las ciudades?

j) María está mirando por la ventana cómo llega su hijo de la escuela. Cuando está parado en el cordón de la vereda de enfrente, lo ve con un ángulo de 40°, y cuando llega al cordón de la vereda de su casa, lo ve con un ángulo de 28°. Si el ancho de la calle es de 15 m, ¿a qué altura está la ventana?

k) Claudio observa un árbol desde la orilla opuesta de un río, mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 43°; retrocede 10 m y mide un nuevo ángulo, obteniendo un resultado de 35°.¿Qué altura tiene el árbol?

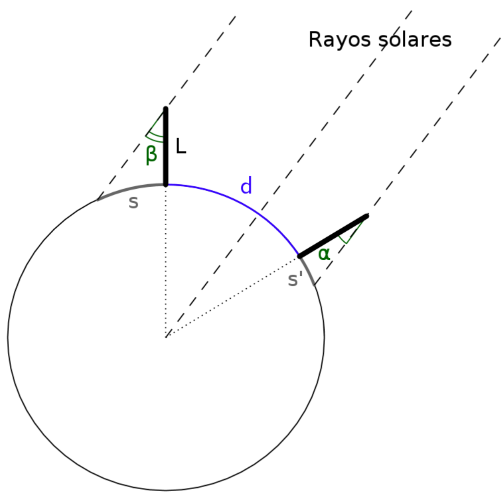
l) Desde un acantilado se ve un barco. El ángulo que forman la visual y la vertical es de 37°. Cuando el barco se aleja 200 m más desde el acantilado, se ve con un ángulo de 52°.¿Cuál es la altura del acantilado y a qué distancia se encontraba el barco del acantilado originalmente?

19. **Problema de Eratóstenes**

Para poder realizar el cálculo de Eratóstenes tomando dos punto cualesquiera del mundo, lo que hay que tener en cuenta es que **ambos puntos deben tener la misma longitud.**

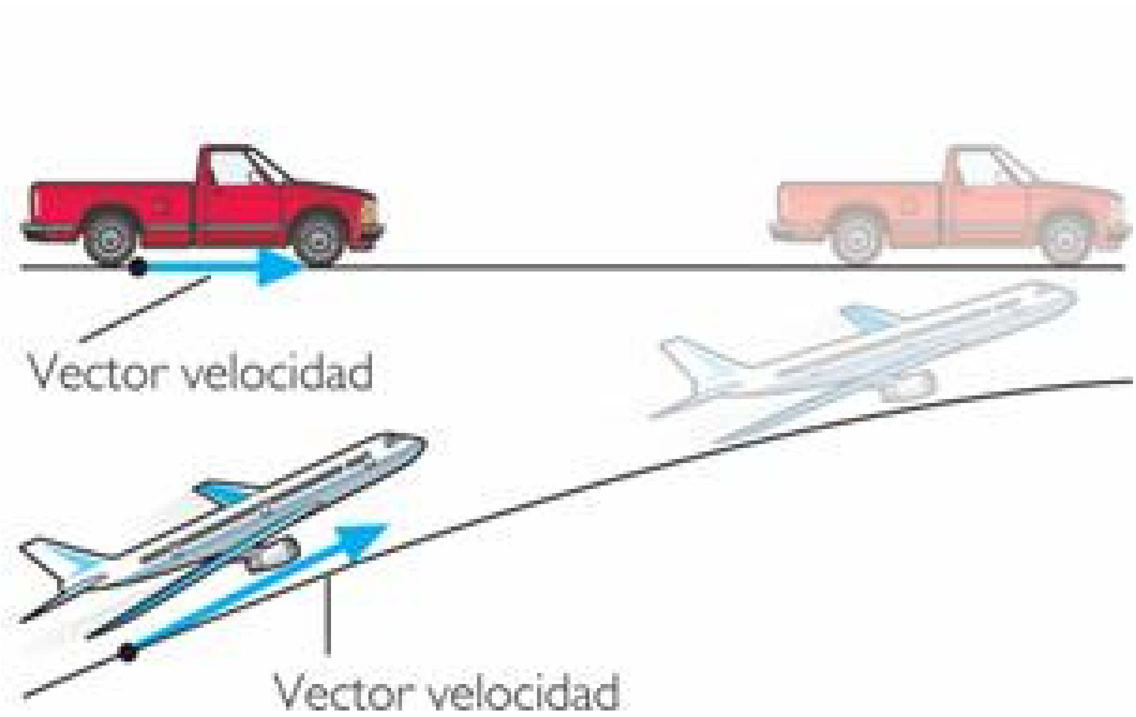
Entonces, vamos a suponer que tomamos dos postes de longitud L y los ubicamos en dos puntos diferentes, separados por una distancia d, sobre la superficie de la Tierra de modo que ambos estén sobre el mismo meridiano. Luego a la misma hora se miden las longitudes de sus sombras, siendo la sombra de uno de los postes de longitud s y la otra de longitud s'. Siguiendo el razonamiento de Eratóstenes calcule la longitud del radio terrestre (expresado en función de los datos del problema)[7].

[7]Sugerencia: Primero relea y comprenda bien el ejemplo dado en la Teoría sobre el cálculo realizado por Eratóstenes. Luego, tenga en cuenta que los triángulos formados por el poste, su sombra y el rayo de sol son rectángulos.


Rayos solares
L
β
d
s
α
s'

Capítulo 6

Vectores



Facultad de Ciencias
Astronómicas
y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Capítulo 6

Vectores

Vamos a definir un vector como un segmento de recta orientado que queda definido por tres propiedades:

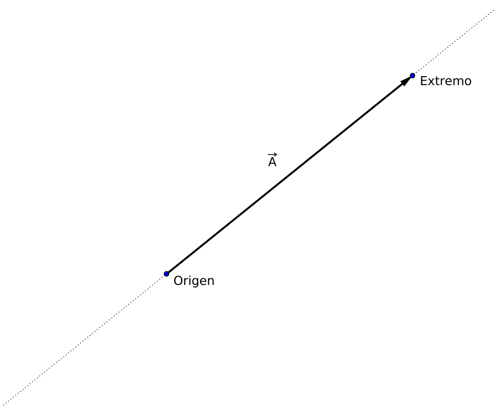
- Su **dirección**, determinada por la recta que contiene al vector.
- Su **sentido**, determinado por el origen y el extremo del vector.
- Su **módulo**, determinado por su longitud.

Los vectores que estudiaremos en este curso son los llamados vectores geométricos o vectores euclidianos. Estos vectores se utilizan para representar magnitudes físicas como las fuerzas y las velocidades, entre otras.

Matemáticamente se simbolizan con una letra, por ejemplo la letra A, sobre la cual se escribe una flecha, $\vec{A}$; también se suele escribir en negrita, $\boldsymbol{A}$.

$$\vec{A} \text{ ó } \boldsymbol{A} \quad \text{Se lee "vector A"}$$

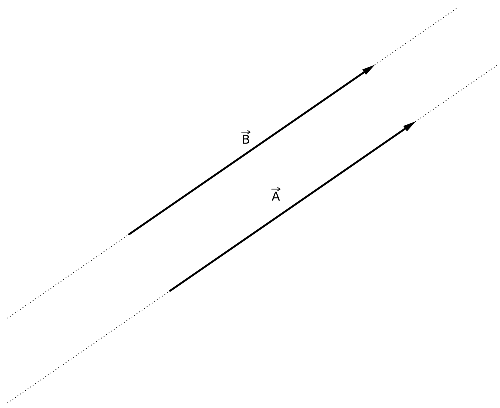
Gráficamente un vector se representa por una flecha que está determinada por dos puntos, el origen (donde nace la flecha) y el extremo (donde se ubica la punta de la flecha).



En la figura vemos que la recta punteada es la que define la dirección, la flecha indica el sentido, y la longitud del segmento de recta entre el origen y el extremo es el módulo.

De la definición dada para un vector se tiene que:

- **Dos vectores son iguales cuando tienen igual dirección, igual módulo e igual sentido.** Es importante ver que dos vectores pueden ser iguales aunque estén contenidos en rectas distintas, es decir que sus orígenes y sus extremos no coinciden.



- **Dos vectores son paralelos cuando tienen la misma dirección.** Es decir que deben estar contenidos en rectas paralelas. En particular cuando dos vectores tienen misma dirección y sentido contrario se dice que son vectores antiparalelos.

- **Dos vectores son perpendiculares cuando están contenidos en rectas perpendiculares.**

6.1. Componentes de un vector

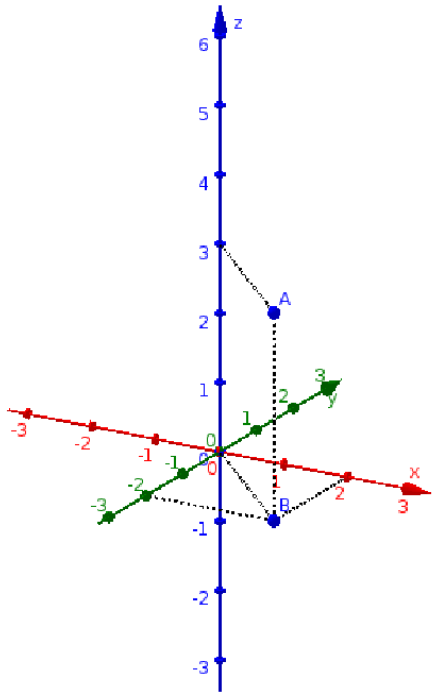
Las componentes de un vector se definen a partir de su origen y su extremo, y definen la dirección, el módulo y el sentido del vector en un sistema de coordenadas determinado. En este curso trabajaremos con un sistema de coordenadas cartesianas.[1] Pero antes de calcular estas componentes vamos a recordar cómo graficar un punto en un sistema de coordenadas cartesianas.

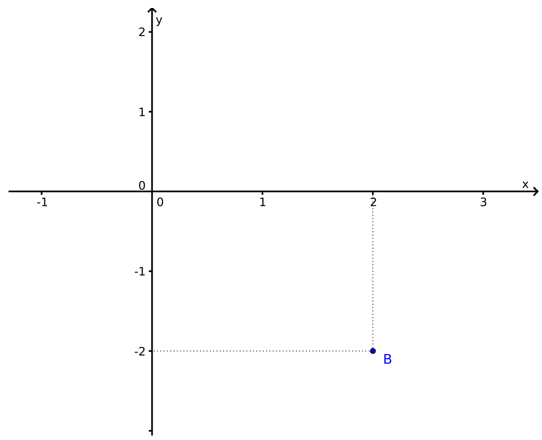
Como mencionamos anteriormente (en los capítulos en los que trabajamos con funciones). La representación geométrica de los sistemas de coordenadas consiste en dos o tres ejes perpendiculares entre sí y un origen de coordenadas que corresponde al punto en el cual dichos ejes se intersecan. De este modo las coordenadas se dan en forma de pares ordenados o ternas ordenadas, respectivamente. Cada elemento del par o de la terna se corresponde con uno de los ejes de manera unívoca.

Ejemplo: *Supongamos que el punto A tiene coordenadas 2 en x, -2 en y y 3 en z; y que el punto B tiene coordenadas 2 en x y -2 en y. Esto se simboliza de la siguiente manera:* $A = (2, -2, 3)$ *y* $B = (2, -2)$.

---

[1]Existen otros sistemas de coordenadas como por ejemplo coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.



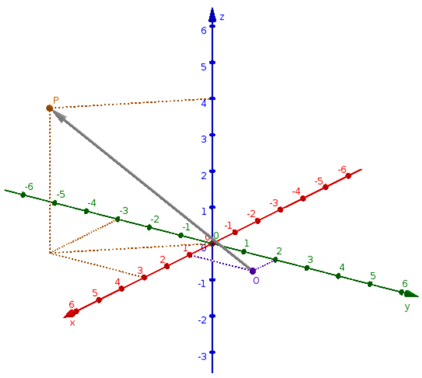


En la figura de la derecha estamos viendo el plano xy, mientras que en el gráfico de la izquierda el plano xy estaría perpendicular a la hoja. Las coordenadas del punto B en el espacio quedan representadas por la terna $(2, -2, 0)$.

Ahora, al comienzo de este capítulo dijimos que un vector se representa gráficamente como una flecha que une dos puntos, el origen y el extremo. De modo que las componentes A_x, A_y y A_z del vector $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ están dadas por la resta de las coordenadas del extremo y del origen. Esto se hace del siguiente modo: supongamos que el origen tiene coordenadas $O = (O_x, O_y, O_z)$ y que el extremo tiene coordenadas $P = (P_x, P_y, P_z)$, entonces las componentes de $\vec{A}$ serán

$$\begin{aligned} A_x &= P_x - O_x \\ A_y &= P_y - O_y \\ A_z &= P_z - O_z \end{aligned} \tag{6.1}$$

Ejemplo: *Si el origen y el extremo son los puntos* $O = (1, 2, 0)$ *y* $P = (3, -3, 4)$, *respectivamente. Entonces las componentes de* $\vec{A}$ *serán*



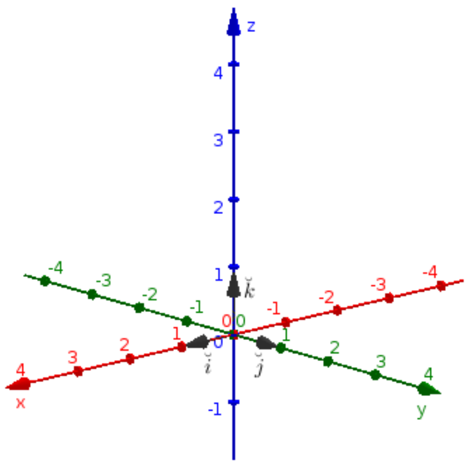
$$
\begin{array}{lllllll}
A_x & = & P_x - O_x & = & 3-1 & = & 2 \\
A_y & = & P_y - O_y & = & -3-2 & = & -5 \\
A_z & = & P_z - O_z & = & 4-0 & = & 4
\end{array}
$$

Por lo tanto, en este caso, el vector $\vec{A}$ *se simboliza como* $\vec{A} = (2, -5, 4)$.

Una forma equivalente de escribir un vector es la siguiente:

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\breve{i} + A_y\breve{j} + A_z\breve{k} \tag{6.2}$$

donde $\breve{i} = (1, 0, 0)$, $\breve{j} = (0, 1, 0)$ y $\breve{k} = (0, 0, 1)$ son los vectores que determinan la dirección y el sentido de los ejes cartesianos como se muestra en la figura siguiente y poseen módulo igual a 1. A estos particulares vectores se los llama **versores**. A veces los versores también se escriben como $\breve{e}_x$, $\breve{e}_y$ y $\breve{e}_z$.



Se define al vector nulo como el vector que tiene todas sus componentes nulas y se simboliza como:

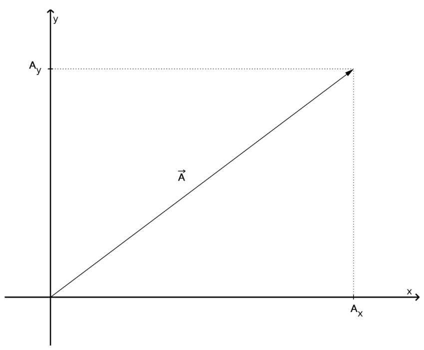
$$\vec{0} = (0, 0, 0) \tag{6.3}$$

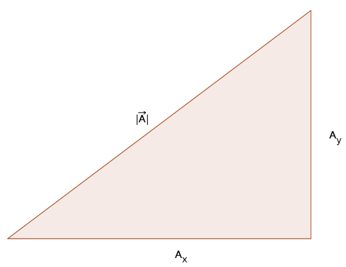
Los vectores quedan definidos por sus componentes, esto quiere decir que las tres propiedades que mencionamos, la dirección, el sentido y el módulo,

se pueden determinar a partir de sus componentes. La dirección y el sentido del vector quedan determinados por los puntos origen y extremo del mismo: la dirección estará definida por la recta que pasa por ambos puntos y el sentido será del origen hacia el extremo.

El módulo, como dijimos anteriormente, es la distancia entre el origen y el extremo (es la longitud geométrica de la flecha que representa al vector). Se simboliza como $|\vec{A}|$, también se simboliza con la letra del vector pero sin la flecha encima: $|\vec{A}| = A$. Para calcular el módulo a partir de las componentes del vector, primero vamos a considerar un vector en el plano, es decir, un vector que sólo tenga dos componentes, y luego calcularemos el módulo de un vector en el espacio (3 componentes).

Grafiquemos el vector $\vec{A} = (A_x, A_y)$ en un sistema de coordenadas cartesianas.





Como se puede ver en la figura, para calcular la longitud del vector podemos utilizar el triángulo rectángulo cuyos vértices son los puntos $(0, 0)$; (A_x, A_y) y $(A_x, 0)$. Luego, podemos calcular la distancia entre los puntos $(0, 0)$ y (A_x, A_y) utilizamos el teorema de Pitágoras:

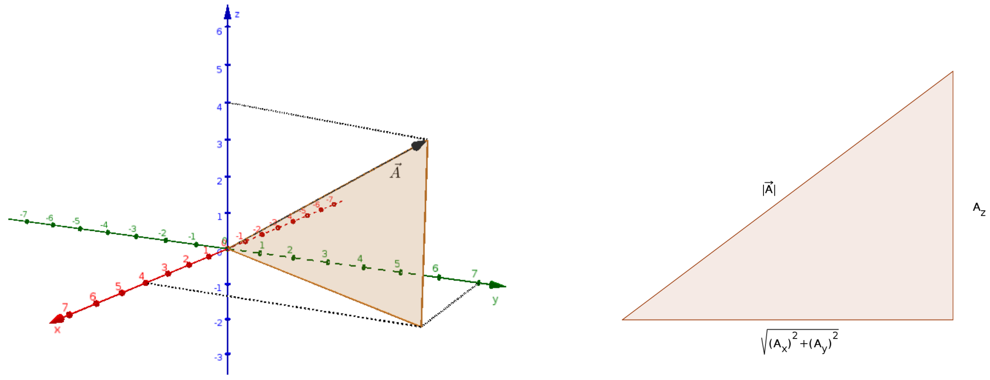
$$\left(|\vec{A}|\right)^2 = |\vec{A}|^2 = (A_x)^2 + (A_y)^2$$

Teniendo en cuenta que lo que estamos calculando es una distancia, y que las distancias son siempre positivas, aplicamos raíz cuadrada en ambos miembros y obtenemos el módulo del vector:

$$\boxed{|\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}} \tag{6.4}$$

En lo que sigue también nos referiremos al módulo de $\vec{A}$ ($|\vec{A}|$) como A.

La misma idea vamos a utilizar para determinar el módulo de un vector en el espacio. En este caso, el vector es $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, y el triángulo rectángulo que vamos a utilizar tiene como vértices a los puntos $(0, 0, 0)$; $(A_x, A_y, 0)$ y (A_x, A_y, A_z).



Luego, aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos que:

$$\begin{aligned}
|\vec{A}|^2 &= \left(\sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2}\right)^2 + (A_z)^2 \\
|\vec{A}|^2 &= (A_x)^2+(A_y)^2+(A_z)^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto el módulo de un vector queda definido por sus componentes del siguiente modo:

$$\boxed{|\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2+(A_z)^2}} \tag{6.5}$$

Es importante remarcar que el módulo de un vector representa una distancia, por lo tanto siempre será mayor o igual que cero.

$$\begin{gathered}
|\vec{A}| \geq 0 \\
|\vec{A}| = 0 \Longleftrightarrow \vec{A} = \vec{0}
\end{gathered} \tag{6.6}$$

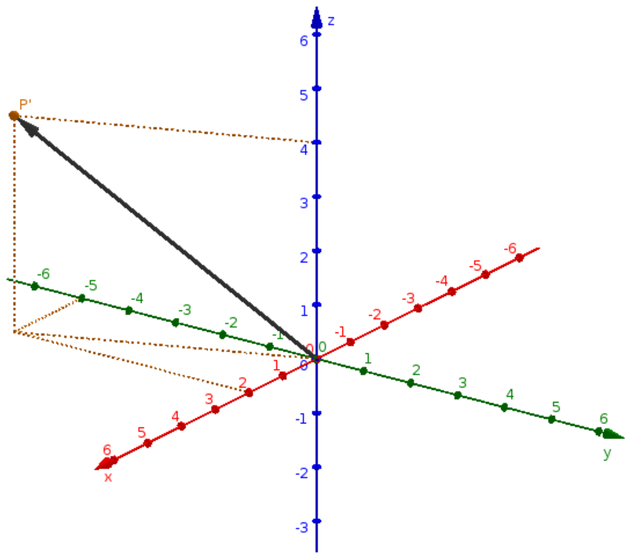
Se dice que un vector es unitario cuando su módulo es igual a la unidad.

$$\vec{A} \text{ es unitario} \Longleftrightarrow |\vec{A}| = 1$$

Los versores $\breve{i}$, $\breve{j}$ y $\breve{k}$ son vectores unitarios.

Anteriormente dijimos que dos vectores son iguales cuando tiene igual módulo, dirección y sentido. Por lo tanto de acuerdo a la definición de componentes dada, **dos vectores serán iguales cuando tengan las mismas componentes.** Por esta razón todos los vectores pueden trasladarse al origen de coordenadas y a todo punto del espacio se le puede asociar un vector.

Ejemplo: *Al trasladar el vector* $\vec{A} = (2, -5, 4)$ *del ejemplo anterior al origen de coordenadas, las coordenadas del punto* P' *correspondiente al extremo son iguales a las componentes del vector, por lo tanto el punto* P' *tiene coordenadas* $(2, -5, 4)$.



6.1.1. Ángulos de posición

Los ángulos de posición de un vector son aquellos que indican su dirección y su sentido (no indican el módulo de un vector). En el sistema de coordenadas cartesianas los ángulos de posición de un vector son θ y ϕ y se definen de la siguiente manera:

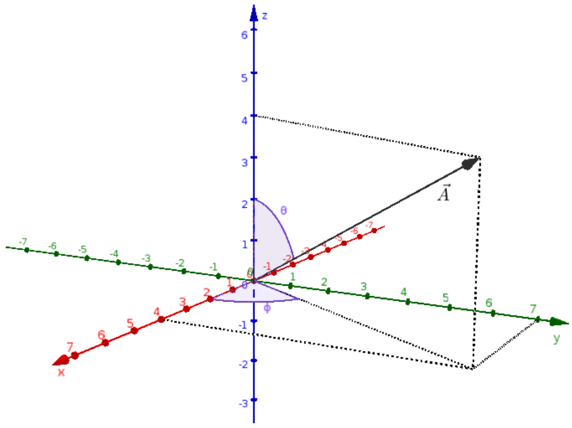
Ángulo $\boldsymbol{\theta}$: se mide desde el eje z positivo hacia el vector.

$$0 \leq \theta \leq \pi \tag{6.7}$$

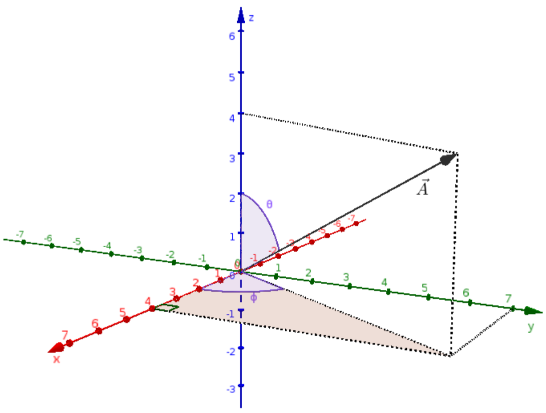
Ángulo $\boldsymbol{\phi}$: se mide en el plano xy desde el eje x positivo hacia la proyección del vector sobre el plano xy.[2]

$$0 \leq \phi < 2\pi \tag{6.8}$$

[2] Si iluminamos al vector desde algún lugar la proyección del vector sería la sombra del vector. En este caso para obtener la proyección del vector sobre el plano xy deberíamos iluminar al vector desde arriba para que la sombra quede en dicho plano.

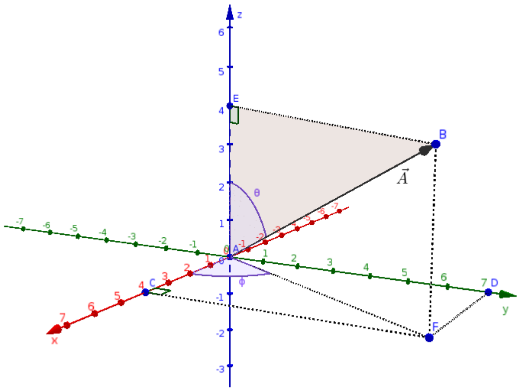


Los ángulos de posición se pueden escribir en función de las componentes del vector. Para determinar el ángulo de posición ϕ del vector $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ utilizamos el triángulo rectángulo cuyos vértices son los puntos $(A_x, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$ y $(A_x, A_y, 0)$ que está sombreado en la figura siguiente.



$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi &= \frac{A_y}{\sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}} \\ \cos\phi &= \frac{A_x}{\sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}} \\ \tan\phi &= \frac{A_y}{A_x} \end{aligned}} \tag{6.9}$$

De forma similar, para calcular el ángulo θ utilizamos el triángulo rectángulo de vértices $(0, 0, A_z)$, $(0, 0, 0)$ y (A_x, A_y, A_z) que está sombreado en la figura siguiente.



$$\boxed{\begin{array}{rcl} \operatorname{sen}\theta & = & \dfrac{\sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2}}{|\vec{A}|} \\ \cos\theta & = & \dfrac{A_z}{|\vec{A}|} \\ \tan\theta & = & \dfrac{\sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2}}{A_z} \end{array}} \tag{6.10}$$

De estas relaciones, se pueden deducir las expresiones de las componentes del vector en función de sus ángulos de posición. De las expresiones de $\cos\phi$, $\operatorname{sen}\phi$ y $\cos\theta$ despejamos A_x, A_y y A_z respectivamente.

$$\begin{array}{rclcrcl} \cos\phi & = & \dfrac{A_x}{\sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2}} & \Longrightarrow & A_x & = & \sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2}\cos\phi \\ \operatorname{sen}\phi & = & \dfrac{A_y}{\sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2}} & \Longrightarrow & A_y & = & \sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2}\operatorname{sen}\phi \\ \cos\theta & = & \dfrac{A_z}{|\vec{A}|} & \Longrightarrow & A_z & = & |\vec{A}|\cos\theta \end{array}$$

Y de la expresión para el $\operatorname{sen}\theta$ obtenemos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2}}{|\vec{A}|} \Longrightarrow \sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2} = |\vec{A}|\operatorname{sen}\theta$$

Reemplazando este resultado en las expresiones anteriores de A_x y A_y obtenemos las componentes del vector en función de sus ángulos de posición:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} A_x & = & |\vec{A}|\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ A_y & = & |\vec{A}|\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ A_z & = & |\vec{A}|\cos\theta \end{array}} \tag{6.11}$$

Por lo tanto, otra forma equivalente de definir un vector es dando los valores de su módulo y sus ángulos de posición.

6.2. Operaciones con vectores

En esta sección veremos cómo operar con vectores. Los vectores se pueden sumar, restar, multiplicar por otro vector o por un un escalar (número real); pero no podemos dividir dos vectores.

A partir de ahora vamos a considerar que $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ y $\vec{C} = (C_x, C_y, C_z)$ son tres vectores cualesquiera y que k es una escalar.

Las demostraciones de las propiedades de cada una de las operaciones las dejaremos a cargo del lector. Algunas de ellas las describiremos en la lectura adicional “Más sobre vectores”.

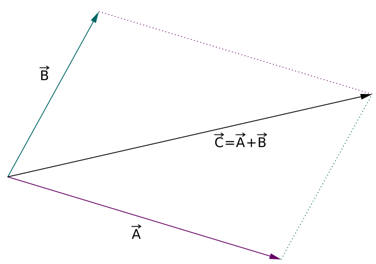
Suma algebraica entre vectores: La suma de vectores se realiza componente a componente, esto quiere decir que **el resultado de la suma es otro vector** $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.

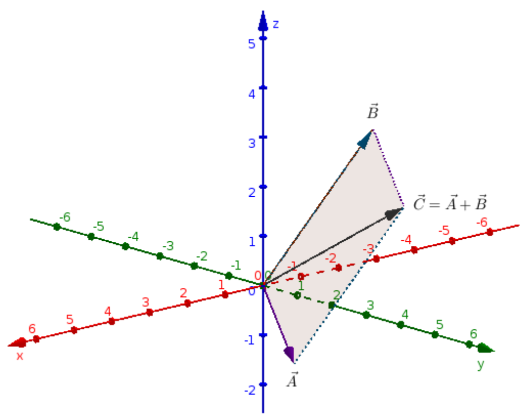
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) \\ &= (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \end{aligned}} \tag{6.12}$$

De modo que las componentes de $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ son:

$$\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \\ C_z &= A_z + B_z \end{aligned}$$

La representación gráfica de la suma de vectores sigue la **regla o ley del paralelogramo**: se grafican los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con el mismo origen. Desde el extremo de $\vec{A}$ se grafica una recta paralela al vector $\vec{B}$, y desde el extremo de $\vec{B}$ se grafica una recta paralela a $\vec{A}$. De modo que el vector suma $\vec{A} + \vec{B}$ es una vector cuyo origen coincide con el de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y su extremo es el punto de intersección de las rectas.





Es importante notar que los tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ siempre están contenidos en un mismo plano.

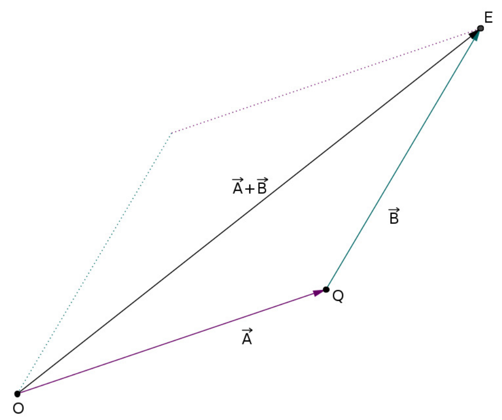
La regla del paralelogramo se puede demostrar fácilmente utilizando la definición de las componentes de un vector. Supongamos que el vector $\vec{A}$ de componentes (A_x, A_y, A_z) tiene origen en el punto O y extremo en el punto Q y que las coordenadas de O son (x, y, z). Como las componentes de un vector quedan determinadas por los puntos correspondientes a su origen y su extremo, podemos determinar las coordenadas del punto Q utilizando la relación 6.1:

$$
\begin{aligned}
Q_x &= O_x + A_x = x + A_x \\
Q_y &= O_y + A_y = y + A_y \\
Q_z &= O_z + A_z = z + A_z
\end{aligned}
$$

Así encontramos que el punto Q tiene coordenadas $(x+A_x, y+A_y, z+A_z)$. Ahora traslademos el vector $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ de modo que su origen coincida con el extremo de $\vec{A}$, es decir con el punto Q. Si llamamos E al extremo de $\vec{B}$, tenemos que las coordenadas del punto E serán $E_x = x + A_x + B_x$, $E_y = y + A_y + B_y$ y $E_z = z + A_z + B_z$. Luego las componentes del vector con origen en O y extremo en E son:

$$
\begin{aligned}
E_x - O_x &= A_x + B_x \\
E_y - O_y &= A_y + B_y \\
E_z - O_z &= A_z + B_z
\end{aligned}
$$

De este modo vemos que el vector suma $\vec{A} + \vec{B}$ corresponde a la diagonal del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



Producto de un vector por un escalar: Se multiplica cada componente del vector por el escalar. **Como resultado se tiene otro vector.**

Una manera intuitiva de ver cómo se calcula el vector $k\vec{A}$ es la siguiente.

$$
\begin{aligned}
k\vec{A} &= \underbrace{\vec{A} + \vec{A} + \ldots + \vec{A}}_{k \text{ veces}} \\
&= (\underbrace{A_x + A_x + \ldots + A_x}_{k \text{ veces}}, \underbrace{A_y + A_y + \ldots + A_y}_{k \text{ veces}}, \underbrace{A_z + A_z + \ldots + A_z}_{k \text{ veces}}) \\
&= (kA_x, kA_y, kA_z)
\end{aligned}
$$

Sin embargo, esto sólo vale si $k \in \mathbb{N}$. Otra forma de calcularlo para $k \in \mathbb{R}$ es:

$$\begin{aligned} k\vec{A} &= k\,(A_x\,\breve{\imath} + A_y\,\breve{\jmath} + A_z\,\breve{k}) \\ &= kA_x\,\breve{\imath} + kA_y\,\breve{\jmath} + kA_z\,\breve{k} \\ &= (kA_x, kA_y, kA_z) \end{aligned}$$

De modo que el producto de un vector por un escalar se calcula como:

$$\boxed{k\vec{A} = (kA_x, kA_y, kA_z)} \tag{6.13}$$

Por lo tanto esta operación da como resultado un vector $\vec{C} = k\vec{A}$ cuyas componentes son:

$$\begin{aligned} C_x &= kA_x \\ C_y &= kA_y \\ C_z &= kA_z \end{aligned}$$

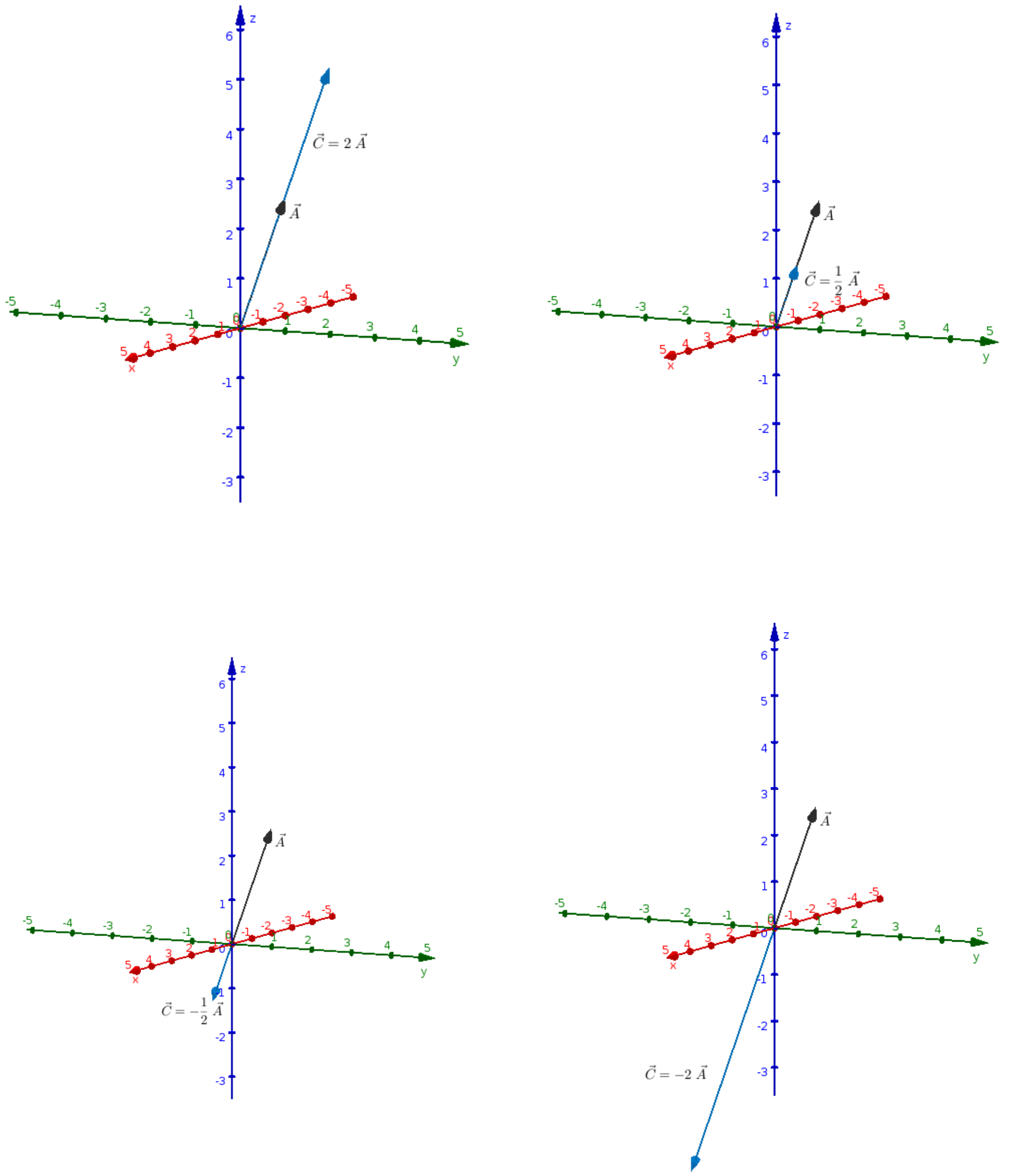
Es importante tener en cuenta que el vector $k\vec{A}$ es paralelo al vector $\vec{A}$.

$$k\vec{A} \parallel \vec{A} \tag{6.14}$$

Esto se ve fácilmente utilizando la regla del paralelogramo. Para calcular $k\vec{A}$ hay que alinear k vectores $\vec{A}$ uno a continuación del otro. De aquí que **la multiplicación de un vector por un escalar sólo puede modificar el módulo o el sentido de un vector, pero nunca puede modificar su dirección:**

- Si $1 < k$, el vector aumenta su módulo, $|k\vec{A}| > |\vec{A}|$, manteniendo su sentido.
- Si $0 < k < 1$, el vector disminuye su módulo, $|k\vec{A}| < |\vec{A}|$, manteniendo su sentido.
- Si $-1 < k < 0$, el vector disminuye su módulo, $|k\vec{A}| < |\vec{A}|$, y cambia su sentido.
- Si $k < -1$, el vector aumenta su módulo, $|k\vec{A}| > |\vec{A}|$, y cambia su sentido.

Ejemplo: *Supongamos que el vector $\vec{A}$ tiene componentes (2,2,2) y veamos cómo se modifica al multiplicarlo por distintos escalares.*



Resta algebraica entre vectores: El vector opuesto de $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ es $-\vec{A}$. Luego, si pensamos que $-\vec{A} = (-1)\vec{A}$, entonces haciendo el producto de un escalar por un vector encontramos que:

$$\boxed{\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \Longrightarrow -\vec{A} = (-A_x, -A_y, -A_z)} \tag{6.15}$$

Por lo tanto los vectores $\vec{A}$ y $-\vec{A}$ tienen igual módulo, igual dirección y sentidos opuestos, es decir que son antiparalelos.

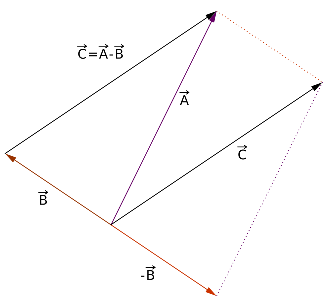
Con esta definición se puede ver que, al igual que para números reales, la resta entre vectores es la suma del opuesto. Esto es

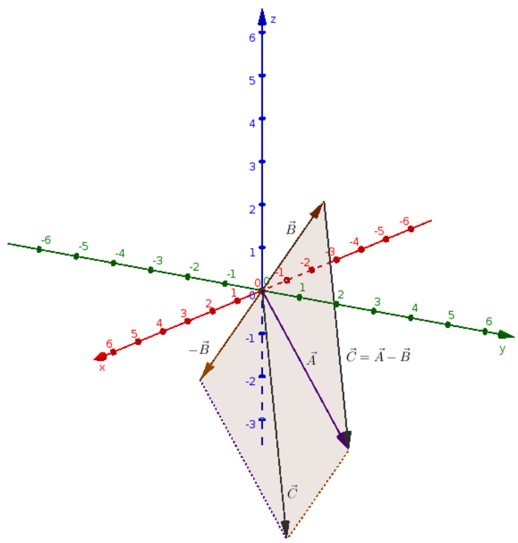
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A} - \vec{B} &= (A_x, A_y, A_z) + (-B_x, -B_y, -B_z) \\ &= (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z) \end{aligned}} \tag{6.16}$$

De este modo vemos que **el resultado de restar dos vectores es otro vector** $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ cuyas componentes son:

$$\begin{aligned} C_x &= A_x - B_x \\ C_y &= A_y - B_y \\ C_z &= A_z - B_z \end{aligned}$$

Utilizando la regla del paralelogramo para la suma de vectores se puede ver que los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ forman un triángulo.





Producto entre vectores: Se definen dos productos diferentes entre vectores de acuerdo al tipo de resultado que da la operación: el producto escalar y el producto vectorial. Como sus nombres lo indican **el resultado de un producto escalar es un escalar, mientras que el resultado del producto vectorial es un vector.**

1. **Producto escalar o producto punto:** El producto escalar entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se simboliza como $\vec{A} \cdot \vec{B}$. En este caso no puede obviarse el punto (como sucede en el producto entre escalares o en el producto entre un escalar y un vector). Esta operación se define como la suma del producto componente a componente:

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z} \tag{6.17}$$

De esta definición se ve que el producto escalar de un vector cualquiera con el vector nulo es igual a cero.

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{0} = 0 \\ \vec{0} \cdot \vec{A} = 0 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Propiedades del producto escalar:

a) **Conmutativo**

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \tag{6.19}$$

b) **Distributivo con respecto a la suma y a la resta**

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \pm \vec{A} \cdot \vec{C} \tag{6.20}$$

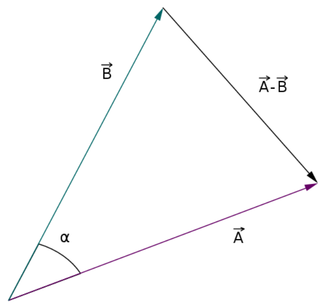
c) **Producto escalar por un escalar**
Sea k un número real cualquiera, luego,

$$k(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (k\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (k\vec{B}) \tag{6.21}$$

d) **El producto escalar de un vector consigo mismo es igual al cuadrado de su módulo**

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = (\vec{A})^2 = |\vec{A}|^2 = A^2 \tag{6.22}$$

El producto escalar también puede expresarse en función del producto de los módulos y del ángulo subtendido entre los vectores. Para demostrarlo vamos a aplicar el teorema del coseno al triángulo formado por los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{A} - \vec{B}$.



$$|\vec{A}-\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$$

Ahora, de la resta de dos vectores tenemos que:

$$\vec{A}-\vec{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z)$$

Luego, el módulo de este vector será:

$$|\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2}$$

Por lo tanto, utilizando la fórmula del cuadrado de un binomio, la definición de módulo de un vector y la definición de producto escalar, resulta que:

$$\begin{aligned}
|\vec{A}-\vec{B}|^2 &= (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2 \\
&= [(A_x)^2 - 2A_xB_x + (B_x)^2] + [(A_y)^2 - 2A_yB_y + (B_y)^2] \\
&\quad +[(A_z)^2 - 2A_zB_z + (B_z)^2] \\
&= [(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2] + [(B_x)^2 + (B_y)^2 + (B_z)^2] \\
&\quad -2(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \\
&= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\vec{A}\cdot\vec{B}
\end{aligned}$$

Así tenemos que:

$$\begin{aligned}
|\vec{A}-\vec{B}|^2 &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha \\
|\vec{A}-\vec{B}|^2 &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\vec{A}\cdot\vec{B}
\end{aligned}$$

Luego, igualamos las dos expresiones,

$$\begin{aligned}
|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\vec{A}\cdot\vec{B} \\
\cancel{|\vec{A}|^2} + \cancel{|\vec{B}|^2} - |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha &= \cancel{|\vec{A}|^2} + \cancel{|\vec{B}|^2} - 2\vec{A}\cdot\vec{B} \\
\cancel{-2}|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha &= \cancel{-2}\vec{A}\cdot\vec{B} \\
|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha &= \vec{A}\cdot\vec{B}
\end{aligned}$$

Por lo tanto el producto escalar entre dos vectores cualesquiera (de dos o tres componentes) se puede escribir como:

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = A\,B\,\cos\alpha} \tag{6.23}$$

Donde α es el ángulo subtendido entre los vectores.

De esta expresión se puede ver que si el ángulo subtendido es de 90° ó 270° el producto escalar resulta nulo. Por lo tanto **el producto escalar entre dos vectores perpendiculares es nulo.**

$$\boxed{\vec{A}\neq\vec{0},\ \vec{B}\neq\vec{0}\text{ y }\vec{A}\perp\vec{B}\iff\vec{A}\cdot\vec{B}=0} \tag{6.24}$$

2. **Producto vectorial o producto cruz:** El producto vectorial entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se simboliza como $\vec{A}\times\vec{B}$ y su definición es:

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\breve{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\breve{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\breve{k}} \tag{6.25}$$

donde $\breve{i}$, $\breve{j}$ y $\breve{k}$ son los versores correspondientes a cada eje cartesiano. Es decir que el producto vectorial da como resultado un vector $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$ cuyas componentes son:

$$\begin{aligned} C_x &= A_yB_z - A_zB_y \\ C_y &= -(A_xB_z - A_zB_x) = A_zB_x - A_xB_z \\ C_z &= A_xB_y - A_yB_x \end{aligned}$$

De esta definición se ve que:

$$\begin{aligned} \vec{A}\times\vec{0} = \vec{0} \\ \vec{0}\times\vec{A} = \vec{0} \end{aligned} \tag{6.26}$$

Propiedades del producto vectorial

a) **Anticonmutativo**

$$\vec{A}\times\vec{B} = -(\vec{B}\times\vec{A}) \tag{6.27}$$

b) **Distributivo con respecto a la suma y a la resta**

$$\vec{A}\times(\vec{B}\pm\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}\pm\vec{A}\times\vec{C} \tag{6.28}$$

c) **Producto vectorial por un escalar**
Sea k un número real cualquiera, luego

$$k(\vec{A}\times\vec{B}) = (k\vec{A})\times\vec{B} = \vec{A}\times(k\vec{B}) \tag{6.29}$$

d) **El producto vectorial de un vector consigo mismo es igual al vector nulo**

$$\vec{A}\times\vec{A} = \vec{0} \tag{6.30}$$

e) **El vector resultante del producto vectorial es perpendicular a los vectores involucrados en el producto**

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \Longrightarrow \vec{C} \perp \vec{A} \text{ y } \vec{C} \perp \vec{B} \tag{6.31}$$

f) **Doble producto vectorial**

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \tag{6.32}$$

La regla nemotécnica para acordarse de esta propiedad es **"BACa menos CABallo"**. La idea de escribir "baca" en vez de "vaca" es para hacer referencia al primer término $\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C})$. Mientras que "caballo" hace referencia al segundo término $\vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$.

g) **Producto mixto**

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \tag{6.33}$$

h) **Módulo del producto vectorial**
Del mismo modo que el producto escalar se puede expresar en función del ángulo subtendido, α, el módulo del producto vectorial se puede escribir como:

$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \operatorname{sen} \alpha} \tag{6.34}$$

Para demostrar esto vamos a calcular el cuadrado del módulo del producto vectorial, esto es:

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

donde hemos utilizado la propiedad 6.22. Luego realizando el producto mixto y utilizando la propiedad 6.32 resulta que:

$$\begin{aligned} |\vec{A} \times \vec{B}|^2 &= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \\ &= \vec{A} \cdot [\vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{B})] \\ &= \vec{A} \cdot [\vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{A})] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el producto escalar es distributivo y conmutativo obtenemos que:

$$\begin{aligned} |\vec{A} \times \vec{B}|^2 &= \vec{A} \cdot [\vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{A})] \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{A})(\vec{B} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{B} \cdot \vec{A}) \\ &= |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \end{aligned}$$

Ahora utilizando que $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \alpha$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
|\vec{A}\times\vec{B}|^2 &= |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2-(\vec{A}\cdot\vec{B})^2\\
&= |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2-|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2\cos^2\alpha\\
&= |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2(1-\cos^2\alpha)\\
&= |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2\operatorname{sen}^2\alpha
\end{aligned}$$

Como el ángulo subtendido entre dos vectores cumple que $0\leq\alpha\leq\pi$, resulta que $\operatorname{sen}\alpha\geq 0$. Por lo tanto, podemos tomar la raíz cuadrada en ambos miembros, entonces:

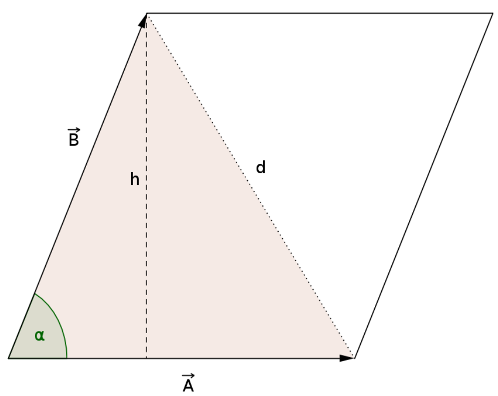
$$\begin{aligned}
|\vec{A}\times\vec{B}|^2 &= |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2\operatorname{sen}^2\alpha\\
\sqrt{|\vec{A}\times\vec{B}|^2} &= \sqrt{|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2\operatorname{sen}^2\alpha}\\
|\vec{A}\times\vec{B}| &= |\vec{A}||\vec{B}|\operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}$$

Así hemos logrado demostrar que el módulo del producto vectorial se puede escribir en función del ángulo subtendido entre los vectores. De aquí resulta que **si dos vectores son paralelos su producto vectorial es nulo.**

$$\boxed{\vec{A}\neq\vec{0},\ \vec{B}\neq\vec{0}\text{ y }\vec{A}\parallel\vec{B}\Longleftrightarrow\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}}\tag{6.35}$$

Interpretación geométrica

La representación geométrica de $|\vec{A}\times\vec{B}|$ es el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes están representados por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

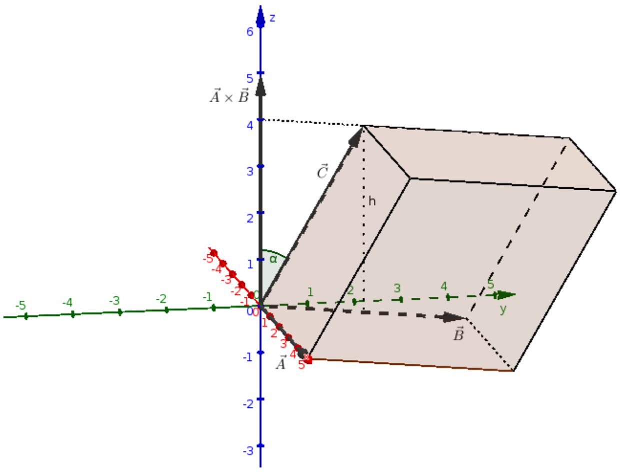


De la figura vemos que el área del paralelogramo es igual a dos veces el área del triángulo de lados $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$ y d. Tomando como base del triángulo el lado $|\vec{A}|$, la altura será $h=|\vec{B}|\operatorname{sen}\alpha$. Por lo tanto,

$$\text{Área} = 2\,\frac{|\vec{A}|h}{2} = |\vec{A}||\vec{B}|\,\text{sen}\,\alpha = |\vec{A}\times\vec{B}|$$

Así el módulo del producto vectorial representa al área del paralelogramo de la figura anterior.

Del mismo modo se puede demostrar que el producto mixto $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$ representa el volumen del paralelepípedo cuya base es el paralelogramo de la figura anterior.



El volumen de un paralelepípedo es igual al área de la base por la altura. En este caso el área de la base es igual a $|\vec{A}\times\vec{B}|$ y la altura es $h = |\vec{C}|\cos\alpha$. Entonces, el volumen es:

$$\text{Volumen} = |\vec{A}\times\vec{B}||\vec{C}|\cos\alpha = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$$

6.3. Resolución de problemas

Problema 1: Dados los vectores $\vec{G} = (0;1;1)$, $\vec{H} = (1;0;-1)$ y $\vec{J} = (1;-1;1)$, indica cuáles de las siguientes expresiones tienen sentido justificando tu respuesta y resolviéndola en caso de ser posible.

1. $\vec{G}\cdot(\vec{H}\times\vec{J}) + \vec{J}$
2. $\vec{H}\cdot(\vec{J}+\vec{G})$

Para determinar qué operaciones son posibles hay que tener en cuenta que la suma (y la resta) y el producto vectorial entre vectores dan como resultado un vector, mientras que el producto escalar entre vectores da como resultado un escalar. Además la única operación posible entre un escalar y un vector es el producto.

1. Analicemos el primer caso: $\vec{G}\cdot(\vec{H}\times\vec{J}) + \vec{J}$. Como siempre el signo + separa en términos. Entonces para que la operación suma sea válida hay que ver que el

primer término sea un vector. Para esto tenemos que resolver primero el producto vectorial $\vec{H}\times\vec{J}$. Esto da como resultado un nuevo vector. Luego podemos hacer el producto escalar entre $\vec{G}$ y el vector resultante del producto vectorial. Finalmente, el resultado de este producto escalar da como resultado un escalar.

Por lo tanto, el primer caso no es una operación válida ya que tendremos la suma entre un escalar y un vector.

$$\underbrace{\vec{G}\cdot\overbrace{(\vec{H}\times\vec{J})}^{\text{vector}}}_{\text{escalar}}+\underbrace{\vec{J}}_{\text{vector}} \qquad \text{No es válida la operación}$$

2. Veamos ahora el segundo caso: $\vec{H}\cdot(\vec{J}+\vec{G})$. Aquí el orden en el que hay que resolver las operaciones también está dado por el paréntesis. Luego la operación es válida ya que la suma entre vectores da como resultado un vector, y el producto escalar se puede realizar.

$$\underbrace{\vec{H}}_{\text{vector}}\cdot\underbrace{(\vec{J}+\vec{G})}_{\text{vector}} \qquad \text{Es válida la operación}$$

Ahora hay que calcularla:

$$\vec{J}+\vec{G}=(1;-1;1)+(0;1;1)=(1+0;-1+1;1+1)=(1;0;2)$$

Luego,

$$\vec{H}\cdot(\vec{J}+\vec{G})=(1;0;-1)\cdot(1;0;2)=1\,.\,1+0\,.\,0+(-1)\,.\,2=1-2=-1$$

Problema 2: Sean $\vec{A}=(1;-3;1)$, $\vec{B}=(2,-1,1)$ y $\vec{V}=\vec{B}-\vec{A}$. Determina un vector $\vec{U}$ perpendicular a $\vec{V}$ tal que $|\vec{U}|=1$.

La forma más fácil de encontrar un vector perpendicular a $\vec{V}$ es haciendo un producto vectorial entre $\vec{V}$ y un vector cualquiera ya que el vector resultante será perpendicular a los dos vectores involucrados en el producto. Entonces elijamos un vector cualquiera (siempre conviene elegir un vector que simplifique el producto), pero en este caso vamos a demostrarlo de forma genérica. Tomemos un vector $\vec{C}=(a,b,c)$ y hagamos el producto vectorial $\vec{V}\times\vec{C}$ teniendo en cuenta que $\vec{V}=\vec{B}-\vec{A}=(2,-1,1)-(1;-3;1)=(2-1;-1-(-3);1-1)=(1;2;0)$.

$$\begin{aligned}\vec{V}\times\vec{C}&=(V_yC_z-V_zC_y)\breve{i}-(V_xC_z-V_zC_x)\breve{j}+(V_xC_y-V_yC_x)\breve{k}\\&=[2\,.\,c-0\,.\,b]\breve{i}-[1\,.\,c-0\,.\,a]\breve{j}+[1\,.\,b-2\,.\,a]\breve{k}\\&=2\,c\,\breve{i}-c\,\breve{j}+(b-2\,a)\breve{k}=(2c;-c;b-2a)\end{aligned}$$

Llamemos $\vec{U'}=\vec{V}\times\vec{C}=(2c;-c;b-2a)$. El módulo de este vector es $|\vec{U'}|=\sqrt{(2c)^2+c^2+(b-2a)^2}$ $=\sqrt{5c^2+(b-2a)^2}$. Por lo tanto hay que conseguir un vector paralelo a $\vec{U'}$ pero que tenga módulo igual a uno.

Para conseguir vector paralelo a $\vec{U'}$ simplemente hay que multiplicar al vector $\vec{U'}$ por un escalar cualquiera. Pero en este caso, como queremos que el módulo del vector resultante sea igual a 1, el escalar que vamos a elegir es $|\vec{U'}|^{-1}$, es decir que tomando el vector $\frac{\vec{U'}}{|\vec{U'}|}$ conseguimos un vector paralelo a $\vec{U'}$ y de módulo 1, ya que

$$\left|\frac{\vec{U'}}{|\vec{U'}|}\right| = \frac{|\vec{U'}|}{|\vec{U'}|} = 1$$

Por lo tanto el vector $\vec{U}$ que buscamos (perpendicular a $\vec{V}$ y de módulo 1) es:

$$\vec{U} = \frac{\vec{U'}}{|\vec{U'}|} = \frac{(2c; -c; b-2a)}{\sqrt{5c^2 + (b-2a)^2}}$$

Otra opción para resolver este ejercicio es utilizar el hecho de que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo. Entonces si ahora elegimos un vector $\vec{U'} = (a, b, c)$, el producto escalar entre $\vec{U'}$ y $\vec{V} = (1, 2, 0)$ será igual a:

$$\vec{U'} \cdot \vec{V} = a\,.\,1 + b\,.\,2 + c\,.\,0 = 0$$

Por lo tanto

$$a + 2\,b = 0$$

Si despejamos b obtenemos que

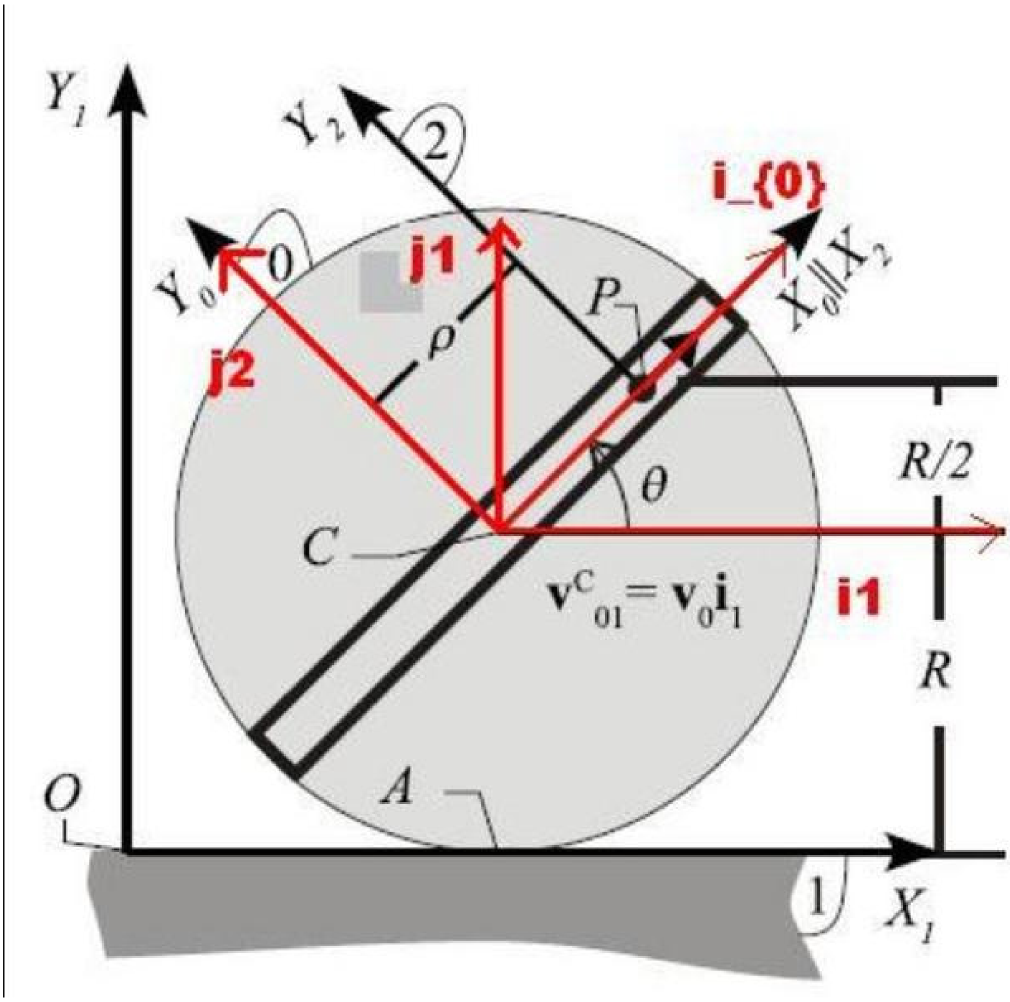
$$b = -\frac{1}{2}\,a$$

De modo que el vector perpendicular a $\vec{V}$ debe ser igual a $(a, -\frac{1}{2}\,a, c)$ donde a y c son dos números reales cualesquiera. Luego, como queremos que además de ser perpendicular a $\vec{V}$ queremos que tenga módulo igual a uno, tendremos que el vector $\vec{U}$ buscado es igual a:

$$\vec{U} = \frac{\vec{U'}}{|\vec{U'}|}$$

Lectura complementaria

Más sobre vectores



Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Realizado por Yael Aidelman
en el marco del Observatorio Pedagógico
La Plata, 2012

Más sobre vectores

En esta sección vamos a demostrar todas las propiedades enunciadas en el capítulo de Vectores.

Además veremos cómo se puede escribir la expresión de una recta en forma vectorial.

6.4. Propiedades del producto entre vectores

6.4.1. Propiedades del producto escalar

1. **Conmutativo**

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \tag{6.36}$$

Esto se muestra fácilmente:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= B_x A_x + B_y A_y + B_z A_z \\ &= \vec{B} \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

2. **Distributivo con respecto a la suma y a la resta**

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \pm \vec{A} \cdot \vec{C} \tag{6.37}$$

La demostración es la siguiente

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \pm \vec{C}) &= \vec{A} \cdot (B_x \pm C_x, B_y \pm C_y, B_z \pm C_z) \\ &= A_x(B_x \pm C_x) + A_y(B_y \pm C_y) + A_z(B_z \pm C_z) \\ &= A_x B_x \pm A_x C_x + A_y B_y \pm A_y C_y + A_z B_z \pm A_z C_z \\ &= (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \pm (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) \\ &= \vec{A} \cdot \vec{B} \pm \vec{A} \cdot \vec{C} \end{aligned}$$

3. **Producto escalar por un escalar**

Sea k un número real cualquiera, luego

$$k(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (k\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (k\vec{B}) \tag{6.38}$$

La demostración es inmediata, por lo que se la dejaremos hacer al lector.

4. **El producto escalar de un vector con sí mismo es igual al cuadrado de su módulo**

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = (\vec{A})^2 = |\vec{A}|^2 = A^2 \qquad (6.39)$$

Esto se obtiene aplicando la definición de producto escalar y la definición de módulo de un vector por lo que también le dejaremos la demostración al lector.

5. **Cuadrado de un binomio de vectores**

$$(\vec{A}\pm\vec{B})^2 = (\vec{A})^2 \pm 2\vec{A}\cdot\vec{B} + (\vec{B})^2 \qquad (6.40)$$

Para demostrarlo utilizamos las propiedades asociativa y conmutativa

$$\begin{aligned}(\vec{A}\pm\vec{B})^2 &= (\vec{A}\pm\vec{B})\cdot(\vec{A}\pm\vec{B})\\ &= \vec{A}^2 \pm \vec{A}\cdot\vec{B} \pm \vec{B}\cdot\vec{A} + \vec{B}^2\\ &= \vec{A}^2 \pm 2\vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}^2\end{aligned}$$

Del producto escalar de un vector con sí mismo también se puede escribir que

$$\begin{aligned}(\vec{A}\pm\vec{B})^2 &= |\vec{A}\pm\vec{B}|^2\\ &= \vec{A}^2 \pm 2\vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}^2\\ &= |\vec{A}|^2 \pm 2\vec{A}\cdot\vec{B} + |\vec{B}|^2\end{aligned}$$

6.4.2. Propiedades del producto vectorial

1. **Anticonmutativo:**

$$\vec{A}\times\vec{B} = -(\vec{B}\times\vec{A}) \qquad (6.41)$$

Para demostrar esta propiedad simplemente aplicamos la definición de producto vectorial:

$$\begin{aligned}-(\vec{B}\times\vec{A}) &= -[(B_yA_z - B_zA_y)\breve{i} - (B_xA_z - B_zA_x)\breve{j} + (B_xA_y - B_yA_x)\breve{k}]\\ &= -(B_yA_z - B_zA_y)\breve{i} + (B_xA_z - B_zA_x)\breve{j} - (B_xA_y - B_yA_x)\breve{k}\\ &= (-B_yA_z + B_zA_y)\breve{i} + (B_xA_z - B_zA_x)\breve{j} + (-B_xA_y + B_yA_x)\breve{k}\\ &= (B_zA_y - B_yA_z)\breve{i} - (-B_xA_z + B_zA_x)\breve{j} + (B_yA_x - B_xA_y)\breve{k}\\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\breve{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\breve{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\breve{k}\\ &= \vec{A}\times\vec{B}\end{aligned}$$

2. **Distributivo con respecto a la suma y a la resta**

$$\vec{A} \times (\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} \pm \vec{A} \times \vec{C} \tag{6.42}$$

La demostración es simple. Primero vamos a calcular la suma y después vamos a realizar el producto vectorial. Luego vamos a reacomodar las cosas para llegar a la expresión del segundo miembro. Entonces

$$\vec{B} \pm \vec{C} = (B_x \pm C_x, B_y \pm C_y, B_z \pm C_z)$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\vec{A} \times (\vec{B} \pm \vec{C}) = [A_y(B_z \pm C_z) - A_z(B_y \pm C_y)]\breve{\imath} \\
&-[A_x(B_z \pm C_z) - A_z(B_x \pm C_x)]\breve{\jmath} + [A_x(B_y \pm C_y) - A_y(B_x \pm C_x)]\breve{k} \\
&= [A_yB_z \pm A_yC_z - A_zB_y \mp A_zC_y]\breve{\imath} - [A_xB_z \pm A_xC_z - A_zB_x \mp A_zC_x]\breve{\jmath} \\
&+[A_xB_y \pm A_xC_y - A_yB_x \mp A_yC_x]\breve{k} \\
&= (A_yB_z - A_zB_y)\breve{\imath} + (\pm A_yC_z \mp A_zC_y)\breve{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\breve{\jmath} \\
&-(\pm A_xC_z \mp A_zC_x)\breve{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\breve{k} + (\pm A_xC_y \mp A_yC_x)\breve{k} \\
&= [(A_yB_z - A_zB_y)\breve{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\breve{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\breve{k}] \\
&+[(\pm A_yC_z \mp A_zC_y)\breve{\imath} - (\pm A_xC_z \mp A_zC_x)\breve{\jmath} + (\pm A_xC_y \mp A_yC_x)\breve{k}] \\
&= [(A_yB_z - A_zB_y)\breve{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\breve{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\breve{k}] \\
&\pm[(A_yC_z - A_zC_y)\breve{\imath} - (A_xC_z - A_zC_x)\breve{\jmath} + (A_xC_y - A_yC_x)\breve{k}] \\
&= \vec{A} \times \vec{B} \pm \vec{A} \times \vec{C}
\end{aligned}$$

3. **Producto vectorial por un escalar**

   Sea k un número real cualquiera, luego

$$k(\vec{A} \times \vec{B}) = (k\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k\vec{B}) \tag{6.43}$$

Para demostrar esta propiedad aplicamos la definición del producto vectorial y luego realizamos el producto entre un vector y un escalar.

$$\begin{aligned}
&k(\vec{A} \times \vec{B}) = k[(A_yB_z - A_zB_y)\breve{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\breve{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\breve{k}] \\
&= k(A_yB_z - A_zB_y)\breve{\imath} - k(A_xB_z - A_zB_x)\breve{\jmath} + k(A_xB_y - A_yB_x)\breve{k} \\
&= [(kA_y)B_z - (kA_z)B_y]\breve{\imath} - [(kA_x)B_z - (kA_z)B_x]\breve{\jmath} + [(kA_x)B_y - (kA_y)B_x]\breve{k} \\
&= (k\vec{A}) \times \vec{B}
\end{aligned}$$

Del mismo modo se demuestra que $k(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times (k\vec{B})$.

4. **El producto vectorial de un vector con sí mismo es igual al vector nulo**

$$\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0} \tag{6.44}$$

La demostración es muy simple, por lo que se la dejaremos hacer al lector.

5. **El vector resultante del producto vectorial es perpendicular a los vectores involucrados en el producto**

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \Longrightarrow \vec{C} \perp \vec{A} \text{ y } \vec{C} \perp \vec{B} \tag{6.45}$$

Anteriormente vimos que si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es nulo. Por lo tanto hay que demostrar que $\vec{C} \cdot \vec{A} = 0$ y que $\vec{C} \cdot \vec{B} = 0$. Ahora, como $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ entonces $\vec{C} = (A_yB_z - A_zB_y)\breve{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\breve{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\breve{k}$. Luego

$$\begin{aligned}
\vec{C} \cdot \vec{A} &= (A_yB_z - A_zB_y)A_x - (A_xB_z - A_zB_x)A_y + (A_xB_y - A_yB_x)A_z \\
&= \cancel{A_yB_zA_x} - \cancel{A_zB_yA_x} - \cancel{A_xB_zA_y} + \cancel{A_zB_xA_y} + \cancel{A_xB_yA_z} - \cancel{A_yB_xA_z} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{C} \cdot \vec{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)B_x - (A_xB_z - A_zB_x)B_y + (A_xB_y - A_yB_x)B_z \\
&= \cancel{A_yB_zB_x} - \cancel{A_zB_yB_x} - \cancel{A_xB_zB_y} + \cancel{A_zB_xB_y} + \cancel{A_xB_yB_z} - \cancel{A_yB_xB_z} \\
&= 0
\end{aligned}$$

6. **Doble producto vectorial**

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \tag{6.46}$$

Esta propiedad la vamos a demostrar por partes. Teniendo en cuenta que $\vec{B} \times \vec{C} = (B_yC_z - B_zC_y)\breve{i} - (B_xC_z - B_zC_x)\breve{j} + (B_xC_y - B_yC_x)\breve{k}$, calculamos el primer miembro de la igualdad:

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= [A_y(B_xC_y - B_yC_x) + A_z(B_xC_z - B_zC_x)]\breve{i} \\
&\quad -[A_x(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_yC_z - B_zC_y)]\breve{j} \\
&\quad +[-A_x(B_xC_z - B_zC_x) - A_y(B_yC_z - B_zC_y)]\breve{k}
\end{aligned}$$

Ahora vamos a calcular los dos términos del segundo miembro.

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) &= B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\breve{i} \\
&\quad +B_y(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\breve{j} \\
&\quad +B_z(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\breve{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) &= C_x(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\breve{i}\\ &\quad +C_y(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\breve{j}\\ &\quad +C_z(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\breve{k}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}&\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\breve{i}\\ &+B_y(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\breve{j} + B_z(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\breve{k}\\ &-C_x(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\breve{i} - C_y(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\breve{j}\\ &-C_z(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\breve{k}\\ &= [\cancel{B_xA_xC_x} + B_xA_yC_y + B_xA_zC_z - \cancel{C_xA_xB_x} - C_xA_yB_y - C_xA_zB_z]\breve{i}\\ &+[B_yA_xC_x + \cancel{B_yA_yC_y} + B_yA_zC_z - C_yA_xB_x - \cancel{C_yA_yB_y} - C_yA_zB_z]\breve{j}\\ &+[B_zA_xC_x + B_zA_yC_y + \cancel{B_zA_zC_z} - C_zA_xB_x - C_zA_yB_y - \cancel{C_zA_zB_z}]\breve{k}\\ &= [A_y(B_xC_y - B_yC_x) + A_z(B_xC_z - B_zC_x)]\breve{i}\\ &-[A_x(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_yC_z - B_zC_y)]\breve{j}\\ &+[-A_x(B_xC_z - B_zC_x) - A_y(B_yC_z - B_zC_y)]\breve{k}\\ &= \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\end{aligned}$$

De aquí se puede ver que el producto vectorial no es asociativo

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$$

Ya que

$$\begin{aligned}(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} &= -\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})\\ &= -[\vec{A}(\vec{C}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A})]\\ &= \vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A}) - \vec{A}(\vec{C}\cdot\vec{B})\\ &= \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{A}(\vec{C}\cdot\vec{B})\end{aligned}$$

7. **Producto mixto**

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} \tag{6.47}$$

Para demostrar esta propiedad vamos a calcular los dos miembros y ver que son iguales. Entonces, el primer miembro será

$$\begin{aligned}&\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\\ &= \vec{A}\cdot[(B_yC_z - B_zC_y)\breve{i} - (B_xC_z - B_zC_x)\breve{j} + (B_xC_y - B_yC_x)\breve{k}]\\ &= A_x(B_yC_z - B_zC_y) - A_y(B_xC_z - B_zC_x) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)\end{aligned}$$

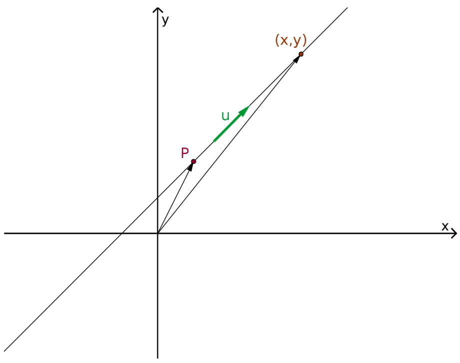
Y el segundo miembro será

$$
\begin{aligned}
\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} &= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \\
&= [(A_y B_z - A_z B_y)\breve{\imath} - (A_x B_z - A_z B_x)\breve{\jmath} + (A_x B_y - A_y B_x)\breve{k}] \cdot \vec{C} \\
&= (A_y B_z - A_z B_y) C_x - (A_x B_z - A_z B_x) C_y + (A_x B_y - A_y B_x) C_z \\
&= A_y B_z C_x - A_z B_y C_x - A_x B_z C_y + A_z B_x C_y + A_x B_y C_z - A_y B_x C_z \\
&= A_x (B_y C_z - B_z C_y) - A_y (B_x C_z - B_z C_x) + A_z (B_x C_y - B_y C_x) \\
&= \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}
\end{aligned}
$$

6.5. Expresión vectorial de la recta

En el capítulo 4 estudiamos de forma detallada la función lineal y vimos diferentes formas de obtener su forma funcional. Ahora vamos a ver cómo se puede representar una recta de manera vectorial.

Para encontrar la representación vectorial de una función lineal es necesario conocer un vector $\vec{u}$ contenido (o paralelo) a la recta y un punto P perteneciente a ella.



A todo punto del espacio se le puede asociar un vector cuyo origen coincide con el origen de coordenadas y su extremo es el punto en cuestión. De este modo, podemos definir el vector $\vec{P} = (p_x, p_y)$ asociado al punto P. Luego tomamos un punto cualquiera sobre la recta y le asociamos el vector $\vec{x} = (x, y)$. Haciendo la diferencia $\vec{x} - \vec{P}$ obtenemos un vector $\vec{u'}$ con origen en el punto P y extremo en el punto (x, y) que pertenece a la recta. Por lo tanto $\vec{u'}$ es paralelo a $\vec{u}$, luego existe un número real[3] k tal que $\vec{u'} = k\,\vec{u}$. Finalmente, la expresión vectorial de la recta es

$$
\begin{gathered}
\vec{x} - \vec{P} = k\,\vec{u} \\
(x, y) - (p_x, p_y) = k\,(u_x, u_y) \\
(x - p_x, y - p_y) = (k\,u_x, k\,u_y)
\end{gathered}
\tag{6.48}
$$

Para encontrar la forma explícita hay que escribir la expresión anterior pero para cada componente:

[3] La existencia de un escalar k tal que $\vec{u'} = k\,\vec{u}$, donde $\vec{u}$ y $\vec{u'}$ son dos vectores paralelos cualesquiera se demuestra utilizando la definición del producto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{u'} = u_x\,u'_x + u_y\,u'_y$. Pero, como queremos que $\vec{u'} = k\,\vec{u}$ resulta que $u'_x = k\,u_x$ y $u'_y = k\,u_y$. Entonces, $\vec{u} \cdot \vec{u'} = k(u_x^2 + u_y^2) = k|\vec{u}|^2$. Finalmente, encontramos el valor del escalar $k = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{u'}}{|\vec{u}|^2}$

$$\begin{aligned} x - p_x &= k\,u_x \\ y - p_y &= k\,u_y \end{aligned} \tag{6.49}$$

Despejando k en ambas expresiones resulta que

$$\begin{aligned} &\frac{x - p_x}{u_x} = \frac{y - p_y}{u_y} \\ &(x - p_x)\frac{u_y}{u_x} + p_y = y \\ &\underbrace{\frac{u_y}{u_x}}_{=\,a}\; x \underbrace{-\frac{u_y}{u_x}\,p_x + p_y}_{=\,b} = y \\ &a\,x + b = y \end{aligned}$$

Práctica 6

1. Completa el siguiente cuadro y representa los vectores en un sistema de ejes cartesianos:

Vector	Punto Inicial	Punto Final	Componentes del vector
$\vec{A}$	(1;3)	(3;5)	
$\vec{B}$	(2;-1)		(3;5)
$\vec{C}$		(-3;1/2)	(0;3/2)
$\vec{D}$		(-1;-3)	(-1;-3)
$\vec{E}$	(-2;1;-2)	(0;-1;-3)	
$\vec{F}$		(1;0;-3)	(2;-1;2)
$\vec{G}$	(2/3;-1/2;1)		(1;3/4;-2)

2. Determina el módulo y los ángulos de posición de los siguientes vectores. Grafique.

   a) $\vec{A} = (2; 4)$
   b) $\vec{G} = (3; 1; 2)$
   c) $\vec{C} = (-4; -3)$
   d) $\vec{D} = (8; -6)$
   e) $\vec{E} = (4; 4; -7)$
   f) $\vec{F} = (2/3; -5/2; 1)$
   g) $\vec{G} = (0, 0, 25)$
   h) $\vec{H} = (0, -3, 0)$

3. Determina las componentes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sabiendo que:

   a) $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ y $|\vec{A}| = 5$
   b) $B = \frac{2}{3}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\phi = 120°$

4. Dados los vectores $\vec{C} = (-1, 2, -3)$ y $\vec{D} = (0, 4, \frac{1}{2})$ realiza las siguientes operaciones en forma gráfica y analítica:

   a) $\frac{1}{2}\vec{D} - \vec{C}$

b) $-\vec{D}+(-2)\vec{C}$

5. Calcula el producto $\vec{A}\cdot\vec{B}$ con los datos que se indican en cada caso (α es el ángulo comprendido entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$):

   a) $\vec{A}=(1;5)$; $|\vec{B}|=\sqrt{6}$ y $\alpha=45°$

   b) $|\vec{A}|=|\vec{B}|=3$ y $\alpha=150°$

6. Determina cuáles de estos vectores son perpendiculares:
   $\vec{H}=(1,-2,-1)$, $\vec{I}=(-2,1,-2)$, $\vec{J}=(-\frac{11}{2},-3,\frac{1}{2})$

7. Calcula el producto $\vec{A}\times\vec{B}$ con los datos que se indican en cada caso:

   a) $\vec{A}=2\vec{B}$ y $\vec{A}=3\breve{\imath}-\frac{3}{2}\breve{\jmath}-1\breve{k}$

   b) $\vec{A}=(4;-1;2)$ y $\vec{B}=(1;2;-1)$

8. Dados los vectores $\vec{A}=(-1;-2;3)$, $\vec{B}=(1;0;-2)$ y $\vec{C}=(1;2;-3)$ calcula, de ser posible, las siguientes operaciones (en caso de no ser posible justificar la desición):

   a) $2\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}$

   b) $2\vec{A}\cdot(\vec{B}-\vec{C})\times\vec{A}$

   c) $2\vec{A}\cdot\vec{C}\times(\vec{B}-\vec{C})$

   d) $\vec{C}\times(\vec{C}-|\vec{A}|\vec{B})$

   e) $\vec{A}\cdot(2\vec{B})\times\vec{C}$

   f) $B+\vec{A}\cdot\vec{C}-|\vec{A}\times\vec{B}|$

9. Verifica las siguientes afirmaciones:

   a)
   - $\breve{\imath}\times\breve{\jmath}=\breve{k}$
   - $\breve{\jmath}\times\breve{k}=\breve{\imath}$
   - $\breve{k}\times\breve{\imath}=\breve{\jmath}$

   b)
   - $\breve{k}\times\breve{\jmath}=-\breve{\imath}$
   - $\breve{\jmath}\times\breve{\imath}=-\breve{k}$
   - $\breve{\imath}\times\breve{k}=-\breve{\jmath}$

10. Halla $(2;-3;1)\times(\breve{\imath}+\breve{\jmath}-2\breve{k})$

11. Dados los vectores $\vec{A}=(2;1;-3)$ y $\vec{B}=(1;0;2)$ determina:

    a) Un vector unitario perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ simultáneamente.

    b) El área del triángulo formado por los vectores $\vec{A}$ y $2\vec{B}$

12. Hallar el ángulo entre los vectores $\vec{P} = (-2, 2, 4)$ y $\vec{Q} = (5, 2, -3)$.

13. Dados dos vectores tales que $|\vec{A}| = \frac{1}{2}$ y $|\vec{B}| = 3$ calcule el producto escalar entre ambos suponiendo que éste es negativo, sabiendo que el módulo del producto vectorial es igual a $\frac{6}{5}$.

14. Halla el perímetro y la amplitud de los ángulos interiores del triángulo ABC cuyos vértices son $A = (5; 3; 0)$, $B = (2; -3; 1)$ y $C = (-5; -2; 1)$.

15. Un avión vuela en dirección S 30°O con una velocidad de 500 km/h ¿Cuáles son las componentes S y O de la velocidad?

16. Un río recto fluye al Este a una velocidad de 4 km/h. Un nadador cruza en dirección Sur a una velocidad de 2,5 km/h respecto al río. Determina la velocidad del nadador respecto a la orilla.

17. Encuentra la resultante de la actuación de las siguientes fuerzas sobre un punto P y explicita si el mismo se encuentra en equilibrio[4]:

    a) $\vec{F_1} = (3; 2)$ y $\vec{F_2} = (5; -4)$

    b) $\vec{F_1} = 2\breve{i} + 5\breve{j}$; $\vec{F_2} = -\breve{i} + 2\breve{j}$ y $\vec{F_3} = -\breve{i} - 7\breve{j}$

    c) $\vec{F_1} = (1; -2; 3)$; $\vec{F_2} = (2; 5; -4)$ y $\vec{F_3} = -3\breve{i} + 3\breve{j} - \breve{k}$

18. Un bloque que pesa 50 $\vec{\mathrm{kg}}$ está sostenido por dos cuerdas que forman con el techo ángulos de 50° y 30° respectivamente. Encuentra las tensiones en ambas cuerdas.

19. Demuestre las siguientes propiedades considerando que $\vec{A} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{B} = (b_x, b_y, b_z)$ y $\vec{C} = (c_x, c_y, c_z)$ son tres vectores cualesquiera.

    a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

    b) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \pm \vec{A} \cdot \vec{C}$

    c) $k(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (k\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (k\vec{B})$ con $k \in \mathbb{R}$.

    d) $\vec{A} \cdot \vec{A} = (\vec{A})^2 = |\vec{A}|^2 = A^2$

    e) $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$

    f) $\vec{A} \times (\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} \pm \vec{A} \times \vec{C}$

    g) $k(\vec{A} \times \vec{B}) = (k\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k\vec{B})$ con $k \in \mathbb{R}$.

    h) $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$

    i) $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \Longrightarrow \vec{C} \perp \vec{A}$ y $\vec{C} \perp \vec{B}$

[4]Un objeto se encuentra en equilibrio cuando la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él es igual a cero.