# CURSO DE NIVELACIÓN

## Apunte teórico
## Lectura adicional: Ecuaciones no algebraicas

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sin x &= 6\\ \frac{1}{\cancel{n}}\,\mathrm{si}\cancel{n}\,x &= 6\\ \mathrm{si}x &= 6\end{aligned}$$

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Universidad Nacional de La Plata

La Plata, febrero de 2012

# ÍNDICE GENERAL

# CAPÍTULO 1

# ECUACIONES NO ALGEBRAICAS

Como su nombre lo indica, estas ecuaciones involucran operaciones no algebraicas como raíces, logaritmos, exponenciales y funciones trigonométricas. Aquí veremos ejemplos de los primeros tres casos mencionados.

La resolución de este tipo de ecuaciones generalmente introduce raíces espúreas y la única forma de detectarlas es verificando que las soluciones encontradas satisfagan la ecuación. También es necesario definir el conjunto de validez de la ecuación.

## 1.1. Ecuaciones irracionales

Son las ecuaciones que involucran raices.

**Ejemplo:** Resolvamos la siguiente ecuación

$$x + \sqrt{x - 4} = 4$$

En este caso, como la variable está en el argumento de una raíz cuadrada, debemos definir el conjunto de validez: $x \geq 4$ (para que el argumento de la raín no sea negativo).

Ahora comencemos a resolver. Lo primero que hay que hacer es tratar de sacar la incógnita fuera de la raíz. Para esto hay que despejar la raíz y luego elevar al cuadrado en ambos miembros.

$$\begin{aligned}
x+\sqrt{x-4} &= 4 \\
\sqrt{x-4} &= 4-x \\
\left(\sqrt{x-4}\right)^2 &= (4-x)^2 \\
x-4 &= 16-8\,x+x^2 \\
0 &= 16-8\,x+x^2-x+4 \\
0 &= 20-9\,x+x^2
\end{aligned}$$

Así llegamos a una ecuación cuadrática que resolvemos utilizando la fórmula de Bhaskara. Entonces

$$x_{1,2}=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\,.\,1\,.\,20}}{2\,.\,1}=\frac{9\pm 1}{2}$$
$$\therefore\, x_1=\frac{9+1}{2}=5 \quad \text{y} \quad x_2=\frac{9-1}{2}=4$$

Ahora hay que verificar si $x_1$ y $x_2$ satisfacen la ecuación original. Lo primero que hay que ver es que las soluciones pertenezcan al conjunto de validez (en el caso que no pertenezcan serán raices espúreas). Luego, evaluamos la ecuación en $x_1$ y $x_2$ para ver si la satisfacen. Entonces

- Si $x=5$

  $$\begin{aligned}
  5+\sqrt{5-4} &= 4 \\
  5+1 &= 4 \\
  6 &= 4 \quad \text{ES ABSURDO}
  \end{aligned}$$

  Por lo tanto $x=5$ no es solución de la ecuación.

- Si $x=4$

  $$\begin{aligned}
  4+\sqrt{4-4} &= 4 \\
  4+0 &= 4 \\
  4 &= 4
  \end{aligned}$$

  Por lo tanto $x=4$ es raíz.

## 1.2. Ecuaciones exponenciales

**Ejemplo:** Resolvamos la siguiente ecuación

$$2^{x+1}=3^{2\,x}$$

En este caso la incógnita forma parte de una potencia y como ambas bases son positivas, los exponentes pueden ser cualquier número real, por lo que el conjunto de validez serán todos los reales.

Para poder resolver la ecuación es necesario sacar la incógnita de la potencia. Para esto vamos aplicar logaritmo en ambos miembros. En este caso nos conviene elegir base 2 o base 3 para el logaritmo, para facilitar las cuentas.

$$\begin{array}{rcl} 2^{x+1} &=& 3^{2\,x} \\ \log_2\left(2^{x+1}\right) &=& \log_2\left(3^{2\,x}\right) \\ (x+1)\,\log_2 2 &=& 2\,x\,\log_2 3 \\ x-2\,x\,\log_2 3 &=& -1 \\ x\,(1-2\,\log_2 3) &=& -1 \\ x &=& \dfrac{-1}{1-2\,\log_2 3} \end{array}$$

Ahora verifiquemos

$$\begin{array}{rcl} 2^{\left(\frac{-1}{1-2\,\log_2 3}+1\right)} &=& 3^{\left(2\,\frac{-1}{1-2\,\log_2 3}\right)} \\ 2^{\left(\frac{-1+1-2\,\log_2 3}{1-2\,\log_2 3}\right)} &=& 3^{\left(\frac{-2}{1-2\,\log_2 3}\right)} \\ \left[2^{\log_2\left(3^{-2}\right)}\right]^{\frac{1}{1-2\,\log_2 3}} &=& 3^{\left(\frac{-2}{1-2\,\log_2 3}\right)} \\ \left[3^{-2}\right]^{\frac{1}{1-2\,\log_2 3}} &=& 3^{\left(\frac{-2}{1-2\,\log_2 3}\right)} \\ 3^{\frac{-2}{1-2\,\log_2 3}} &=& 3^{\left(\frac{-2}{1-2\,\log_2 3}\right)} \end{array}$$

Por lo tanto $x = \dfrac{-1}{1-2\,\log_2 3}$ es solución.

## 1.3. Ecuaciones logarítmicas

**Ejemplo:** Resolvamos la siguiente ecuación

$$\log_x 16 = \log_2 x$$

El conjunto de validez de esta ecuación es: $x > 0$ y $x \neq 1$. Para resolver, lo primero que hay que hacer es sacar la incóngnita de la base del logaritmo, para eso hay que hacer un cambio de base. Y como en el segundo miembro la base del logaritmo es 2, nos conviene cambiar a base 2 en el primer miembro. Entonces:

$$\begin{aligned}
\log_x 16 &= \log_2 x \\
\frac{\log_2 16}{\log_2 x} &= \log_2 x \\
\log_2(2^4) &= (\log_2 x)^2 \\
4 &= (\log_2 x)^2 \\
\log_2 x &= \pm\sqrt{4}
\end{aligned}$$

Ahora, aplicando la definición de logaritmo tenemos que

$$\log_2 x = \pm 2 \Longrightarrow x = 2^{\pm 2}$$

Así tenemos dos soluciones $x_1 = 2^2 = 4$ y $x_2 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$. Como ambos valores pertenecen al conjunto de validez, lo que falta hacer es verificar que satizfagan la ecuación.

- Si $x = 4$

  $$\begin{aligned}
  \log_4 16 &= \log_2 4 \\
  \log_4(4^2) &= \log_2(2^2) \\
  2 &= 2
  \end{aligned}$$

  Por lo tanto $x = 4$ es solución.

- Si $x = \frac{1}{4}$

  $$\begin{aligned}
  \log_{\frac{1}{4}} 16 &= \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \\
  \frac{\log_4 16}{\log_4 \frac{1}{4}} &= \log_2(4^{-2}) \\
  \frac{2}{-1} &= \log_2(4^{-2}) \\
  -2 &= -2
  \end{aligned}$$

  Por lo tanto $x = \frac{1}{4}$ es solución.