

Introducción a la Mecánica Analítica
Versión preliminar

Héctor Vucetich

14 de agosto de 2003

Índice general

1. Las leyes del movimiento	6
1.1. Espacio y tiempo	6
1.1.1. Sistemas de referencia	6
1.1.2. Cambios de coordenadas	8
1.1.3. Grupos y geometrías	10
1.1.4. Sistemas inerciales	12
1.2. La ley dinámica	14
1.2.1. Fuerzas	14
1.2.2. Las ecuaciones de movimiento	16
1.2.3. Fuerzas externas	17
1.2.4. Determinación de las constantes	18
1.3. Ejemplos	19
1.3.1. Caída de los cuerpos	19
1.3.2. El oscilador armónico	21
1.3.3. El cohete	23
1.3.4. Movimiento en un campo magnético	24
1.4. Energía	27
1.4.1. Fuerzas conservativas	27
1.4.2. Movimiento unidimensional	29
1.5. Teoremas de conservación	32
1.5.1. Impulso	33
1.5.2. Impulso angular	34
1.5.3. Conservación de la energía	35
1.5.4. Choques de partículas	36
2. Oscilaciones en una dimensión	39
2.1. Oscilaciones armónicas	39
2.1.1. Oscilaciones amortiguadas	40
2.1.2. Oscilaciones forzadas	42
2.1.3. La función de Green	46
2.2. Oscilaciones anarmónicas	49
2.2.1. Términos seculares	50
2.2.2. El método de Bogoljubov-Krylov	52

2.2.3.	Ejemplos	54
2.3.	Sistemas dinámicos autónomos	57
2.3.1.	Puntos de equilibrio	58
2.3.2.	Ciclos límite	62
2.4.	Osciladores anarmónicos forzados	66
2.4.1.	Denominadores pequeños	66
2.4.2.	Sincronización	68
2.5.	Mapas	72
2.5.1.	Mapas y dinámica	72
2.5.2.	Puntos fijos de mapas	74
2.5.3.	El mapa del círculo	76
2.5.4.	Mapas y sincronización	77
2.6.	Caos en una dimensión	78
2.6.1.	La ecuación logística	78
2.6.2.	Análisis de la universalidad	84
2.6.3.	La región caótica	86
3.	El problema de dos cuerpos	88
3.1.	Movimiento en un campo central	88
3.1.1.	El problema de un cuerpo equivalente	88
3.1.2.	La segunda ley de Képler	90
3.1.3.	El problema unidimensional equivalente	91
3.1.4.	Órbitas	92
3.2.	El problema de Képler	96
3.2.1.	Órbitas keplerianas	96
3.2.2.	Evolución temporal	98
3.2.3.	El vector de Lenz	100
3.3.	Dispersión de Partículas	103
3.3.1.	Sección eficaz	103
3.3.2.	Cálculo de la sección eficaz	105
3.3.3.	Fórmula de Ruthenford	106
3.3.4.	Fenómenos particulares de dispersión	107
4.	Las ecuaciones de Lagrange	110
4.1.	Movimiento vinculado	110
4.1.1.	Vínculos y grados de libertad	110
4.1.2.	Trabajos virtuales	112
4.1.3.	El principio de d'Alembert	114
4.1.4.	Ejemplos	115
4.1.5.	Multiplicadores de Lagrange	118
4.2.	El Principio de Mínima Acción	121
4.2.1.	Lagrangeano y acción	121
4.2.2.	Coordenadas generalizadas	124

4.2.3.	Las ecuaciones de Lagrange	126
4.2.4.	Movimiento en un campo central	128
4.2.5.	Potenciales generalizados	130
4.3.	Simetrías y leyes de conservación	133
4.3.1.	Simetrías y grupos	134
4.3.2.	El teorema de Noether	135
4.3.3.	Homogeneidad temporal y energía	136
4.3.4.	Construcción de lagrangeanos	137
5.	El cuerpo rígido	140
5.1.	Rotaciones	140
5.1.1.	El teorema de Euler	140
5.1.2.	Los ángulos de Euler	142
5.1.3.	Rotaciones infinitesimales	145
5.2.	Movimiento relativo	150
5.2.1.	Sistemas de referencia acelerados	151
5.2.2.	Sistemas en rotación	152
5.2.3.	El problema restringido de los tres cuerpos	155
5.3.	El tensor de inercia	158
5.3.1.	Impulso angular de un cuerpo rígido	158
5.3.2.	Nociones de álgebra tensorial	160
5.3.3.	Ejes de inercia	161
5.4.	Las ecuaciones de Euler	164
5.4.1.	Deducción de las ecuaciones	164
5.4.2.	El cuerpo simétrico	165
5.4.3.	Fenómenos giroscópicos	169
5.4.4.	El cuerpo asimétrico	170
5.5.	El trompo	173
5.5.1.	El trompo pesado	173
5.5.2.	Discusión del movimiento	175
5.5.3.	El trompo veloz	178
5.5.4.	Otros fenómenos similares	179
6.	Pequeñas oscilaciones	183
6.1.	Equilibrio en general	183
6.1.1.	Estados de equilibrio	183
6.1.2.	Ejemplos	184
6.2.	Oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio	187
6.2.1.	Modos normales	187
6.2.2.	Coordenadas normales	188
6.2.3.	Un ejemplo sencillo	190
6.2.4.	Oscilaciones de moléculas	193
6.3.	Oscilaciones alrededor de un movimiento estacionario	198

6.3.1.	Formulación general	198
6.3.2.	Los asteroides troyanos	199
6.4.	Sistemas disipativos	202
6.4.1.	El tratamiento general	202
6.4.2.	Un ejemplo sencillo	204
6.5.	Sistemas forzados	205
6.5.1.	Fuerzas externas en sistemas lineales	206
6.5.2.	Causalidad y analiticidad	207
7.	La cuerda vibrante	211
7.1.	La cadena de partículas	211
7.1.1.	Ecuaciones de movimiento	212
7.1.2.	Ondas	213
7.1.3.	Los modos normales	215
7.2.	La cuerda continua	216
7.2.1.	El límite de la cadena de partículas	217
7.2.2.	Separación de variables	218
7.2.3.	El espacio de Hilbert	221
7.2.4.	Disipación y forzamiento	222
7.2.5.	Otros sistemas continuos	224
7.3.	Ondas	226
7.3.1.	La ecuación de la onda	226
7.3.2.	Señales	229
7.3.3.	Velocidades de propagación	231
7.4.	La formulación lagrangeana de la cuerda vibrante	233
7.4.1.	La densidad lagrangeana	233
7.4.2.	Simetrías y leyes de conservación	235
7.5.	Cuerdas inhomogéneas	240
7.5.1.	Tensión y densidad variables	240
7.5.2.	Los modos normales	241
7.5.3.	Reflexión y transmisión de ondas	243
7.5.4.	Resonancia	245
8.	La formulación hamiltoniana	249
8.1.	Las ecuaciones de Hamilton	249
8.1.1.	Transformaciones de Legendre	249
8.1.2.	Ecuaciones de Hamilton	252
8.1.3.	El espacio de las fases	254
8.1.4.	Mapas	256
8.2.	Transformaciones canónicas	258
8.2.1.	La función generatriz	259
8.2.2.	Otras formas de la función generatriz	260
8.2.3.	Ejemplos sencillos	260

8.2.4.	Estructura simpléctica	263
8.2.5.	Invariantes integrales	264
8.2.6.	Oscilaciones alrededor de un movimiento estacionario	267
8.3.	Corchetes de Poisson	270
8.3.1.	Transformaciones canónicas infinitesimales	270
8.3.2.	Corchetes de Poisson	271
8.3.3.	Propiedades de los corchetes de Poisson	272
8.4.	Simetrías y leyes de conservación	274
8.4.1.	Simetrías de un sistema hamiltoniano	275
8.4.2.	Álgebras de Lie	276
8.5.	Sistemas hamiltonianos singulares	280
8.5.1.	Método de Dirac	281
8.5.2.	Magnitudes de primera y segunda clase	282
8.5.3.	Condiciones subsidiarias	284
8.5.4.	Ejemplos	286
9.	La Teoría de Hamilton-Jacobi	289
9.1.	La ecuación de Hamilton-Jacobi	289
9.1.1.	El teorema de Jacobi	289
9.1.2.	El oscilador armónico	291
9.1.3.	El problema de Képler	292
9.2.	Variables ángulo-acción	297
9.2.1.	El caso unidimensional	298
9.2.2.	El caso separable	301
9.2.3.	El problema de Képler	303
9.3.	Teoría Canónica de Perturbaciones	306
9.3.1.	El problema unidimensional	306
9.3.2.	Perturbaciones de orden superior	308
9.3.3.	Invariantes adiabáticos	310
9.4.	Resonancias y toros	312
9.4.1.	Resonancias	313

Capítulo 1

Las leyes del movimiento

El movimiento es la forma más simple de cambio en un sistema físico. Las leyes que lo rigen son la síntesis de varios siglos de observación, experiencia y análisis teórico. Por esta razón, no corresponde intentar una justificación detallada sobre la base de experiencias concretas, sino que enunciaremos los principios del movimiento en una forma cuasi axiomática. El conjunto de estos principios, que llamaremos colectivamente las *leyes de Newton* forman la base de la mecánica. Aunque posteriormente examinaremos otras formulaciones más cómodas o más poderosas para ciertos fines, las leyes de Newton forman la base de la mecánica y, en cierto sentido, de toda la física.

1.1. Espacio y tiempo

En esta sección, introduciremos las nociones de *espacio* y *tiempo*. Éstas son nociones primitivas de la teoría, que no pueden definirse en términos de otras más sencillas. En lo que sigue, discutiremos informalmente estas nociones, enunciando algunas hipótesis muy básicas sobre ellas y su papel en la descripción del mundo real.

1.1.1. Sistemas de referencia

Para describir el movimiento de un cuerpo es necesario comparar su posición, en instantes sucesivos, con la de otros cuerpos cercanos. Este conjunto de cuerpos se llama un *cuerpo de referencia*. En la vida cotidiana el cuerpo de referencia más importante es la corteza terrestre, pues a ella referimos nuestros desplazamientos más comunes. En astronomía, en cambio, se utiliza como cuerpo de referencia el *sistema de las estrellas fijas*: un conjunto de cuerpos respecto de los cuales se describe el movimiento de los demás. La estructura del cuerpo de referencia es irrelevante para el propósito de fijar la posición de otros cuerpos y se lo idealiza como un sistema de coordenadas cuya estructura dependerá de las leyes de la

geometría. Admitiremos que los axiomas de la geometría euclídea se verifican con mucha exactitud en nuestro espacio físico y por consiguiente es cómodo elegir un sistema de coordenadas cartesianas para representar al cuerpo de referencia. La hipótesis de la validez de la geometría euclídea tiene limitaciones que se discuten en los textos de Relatividad General.

Principio 1.1 (Euclides).

El espacio euclídeo E^3 describe¹ el espacio físico.

El tiempo es una magnitud física que representa la sucesión de cambios en un sistema físico. Un cuerpo cualquiera, que admita una sucesión de cambios monótona se llama un *reloj*. Los viejos relojes mecánicos o los modernos electrónicos son ejemplos de relojes, pero también lo son la masa de una sustancia radiactiva o el nivel de sedimento en el fondo de un lago. También la estructura del reloj es irrelevante para fijar la sucesión de fenómenos y lo idealizaremos como una variable real. Si al sistema de coordenadas que representa el cuerpo de referencia le asociamos el tiempo como un parámetro real, obtenemos lo que se llama un *sistema de referencia*.

Principio 1.2 (Tiempo).

El tiempo físico puede representarse por la recta real.

El cuerpo más sencillo que podemos imaginar es el *punto material* o *partícula*. Intuitivamente una partícula es un cuerpo cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con las distancias a otros cuerpos próximos. Su movimiento se describe, en el sistema de referencia elegido, dando sus coordenadas en función del tiempo. La curva descrita por la partícula se llama su *trayectoria* u *órbita* y se representa con el vector posición del cuerpo en función del tiempo $\mathbf{r}(t)$. La velocidad del cuerpo respecto del sistema de referencia elegido es:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \tag{1.1}$$

y su aceleración:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} \tag{1.2}$$

El estudio geométrico de la trayectoria puede hacerse con el elegante método de Frénet, que se describe en los textos de Geometría Analítica, y no insistiremos sobre ello.

La noción de punto material es una idealización y será aplicable a un cuerpo dado o no según las circunstancias. Por ejemplo, se puede considerar a la Tierra como una partícula para estudiar su movimiento alrededor del Sol o las perturbaciones que ejerce sobre otros planetas, pero si se desea estudiar el movimiento de rotación (o el de un satélite artificial) será necesario tomar en cuenta su tamaño finito.

¹En lugar de “describe”, es más preciso “representa”

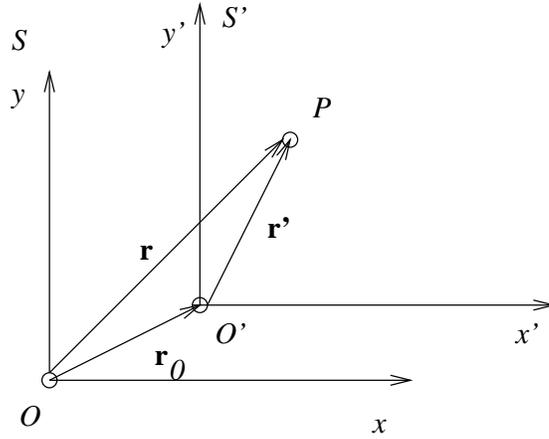


Figura 1.1: Transformaciones de coordenadas: Traslaciones

1.1.2. Cambios de coordenadas

La elección de un sistema de referencia es arbitraria, ya que la naturaleza del cuerpo de referencia es irrelevante. Dado un instante t , los teoremas de la geometría permiten hallar las coordenadas de un punto en el nuevo sistema de referencia S' en función de las coordenadas en el antiguo S . La transformación más simple es una *traslación* del sistema de coordenadas. Si \mathbf{r}_0 es la posición del origen de coordenadas de S' respecto de S , las nuevas coordenadas de la partícula serán:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \quad (1.3)$$

La notación vectorial que acabamos de usar es la más cómoda para la descripción de fenómenos en el espacio tridimensional. Sin embargo, para muchos problemas, es más cómodo utilizar la *notación en componentes*. En lugar de utilizar la notación (x, y, z) para las coordenadas, usaremos (x^1, x^2, x^3) , que abreviaremos, simplemente, escribiendo x^i , con $i \in (1, 2, 3)$. Con la nueva notación, la ecuación (1.3) se escribe:

$$x'^i = x^i - x_0^i \quad (1.4)$$

Utilicemos esta notación para describir una rotación del sistema de coordenadas. Las nuevas coordenadas deben ser combinaciones lineales de las antiguas y por lo tanto:

$$x'^i = \sum_k \lambda_k^i x^k \quad (1.5)$$

en donde λ_k^i son las componentes de la *matriz de transformación*. En esta ecuación y otras similares podemos simplificar la escritura si introducimos la *convención de Einstein*: suprimiremos los símbolos de suma y convendremos que se suma sobre

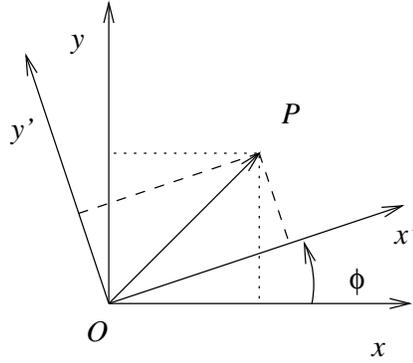


Figura 1.2: Transformaciones de coordenadas: Rotaciones

un índice que aparezca dos veces repetido. Usando esta convención la ecuación (1.5) se escribe:

$$x'^i = \lambda_{ik} x^k \quad (1.6)$$

La distancia entre d dos puntos P, Q no puede depender de la elección del sistema de coordenadas, pues es un *invariante* en el espacio euclídeo. Si Δx^i es la diferencia de coordenadas entre P, Q tendremos:

$$d^2 = \Delta x^i \Delta x^j = \Delta x'^i \Delta x'^j \quad (1.7)$$

Para que se cumpla la relación (1.7) los coeficientes δ_{ij} deben cumplir:

$$\lambda_{ik} \lambda_{jk} = \delta_{ij} \quad (1.8)$$

en donde δ_{ij} es el *símbolo de Kronecker*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (1.9)$$

Las transformaciones de coordenadas que satisfacen (1.8) se llaman *transformaciones ortogonales*. Diremos que ellas (así como las traslaciones) *conservan la longitud*.

Aunque la notación “en componentes” que acabamos de utilizar es la más cómoda para muchos problemas, es deseable recobrar la brevedad y elegancia de la notación vectorial cuando se discuten transformaciones de coordenadas. Podemos hacerlo si introducimos notación matricial para las transformaciones. Sea Λ la matriz de los coeficientes λ_k^i . Convendremos en que Λ actúa sobre las coordenadas \mathbf{r} como si éste fuera una matriz columna. Es fácil ver que con esta notación, las ecuaciones (1.6) y (1.8) se escriben:

$$\mathbf{r}' = \Lambda \mathbf{r} \quad (1.10)$$

$$\Lambda^\top \Lambda = \mathbf{I} \quad (1.11)$$

en donde Λ^\top es la transpuesta de Λ e \mathbf{I} es la matriz unidad.

El cambio más general de sistemas de referencia en un espacio euclídeo es una translación compuesta con una rotación. Si el segundo sistema de referencia se mueve respecto del primero ambas transformaciones serán funciones del tiempo. Sin embargo, las transformaciones no quedan especificadas pues cada sistema de referencia tiene su propio parámetro temporal. Admitiremos, sin embargo, que es posible elegir los tiempos de modo que intervalos correspondientes sean iguales en todos los sistemas de referencia:

$$\Delta t' = \Delta t \quad (1.12)$$

Esta es otra hipótesis cuyos límites de validez deben examinarse en el contexto de la física relativista. En las condiciones que se presentan para la mayor parte de las aplicaciones de la mecánica, la ecuación (1.12) es una aproximación excelente. Finalmente, definiremos la operación de *traslación temporal* como:

$$t' = t - t_0 \quad (1.13)$$

que completa el cambio de sistemas de referencia.

1.1.3. Grupos y geometrías

En la sección anterior hemos visto que traslaciones y rotaciones conservan la distancia entre dos puntos $d(P, Q)$. Esta importante propiedad de invarianza significa que esta cantidad es un objeto geométrico, independiente de la elección del sistema de coordenadas. En esta sección vamos a generalizar esta propiedad.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación paramétrica de una recta con cosenos directores representados por el versor $\check{\mathbf{n}}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \check{\mathbf{n}}t \quad (1.14)$$

Bajo una rotación de coordenadas, los vectores de la ecuación (1.14) se transforman con la regla (1.10). La nueva ecuación de la recta, pues, se obtiene multiplicando (1.14) por Λ :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \check{\mathbf{n}}'t \quad (1.15)$$

y la ecuación de la recta conserva su forma cuando se cambian las coordenadas. Esta propiedad se llama la *covarianza* de la ecuación y expresa el hecho de que la recta es un objeto geométrico, independiente del sistema de coordenadas utilizado para describirlo. Esta propiedad es general: las ecuaciones que describen objetos geométricos, tales como las trayectorias de las partículas, deben ser independientes del sistema de coordenadas elegido y por lo tanto deben describirse con ecuaciones covariantes.

Podemos expresar el resultado anterior con mayor precisión si recordamos la noción de *grupo*. Se llama así a un conjunto \mathcal{G} , entre cuyos elementos está definida una operación binaria \otimes , la *ley de multiplicación del grupo*, que satisface las propiedades siguientes:

\oplus	I	R	R'
I	I	R	R'
R	R	R'	I
R'	R'	I	R

Cuadro 1.1: Tabla de multiplicación de C_3

1. Si $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ entonces $g_1 \otimes g_2 \in \mathcal{G}$
2. La operación \otimes es asociativa.
3. Existe un elemento neutro (o unidad) con la propiedad:

$$e \otimes g = g \otimes e = g$$

4. Para cada elemento g del grupo existe un elemento inverso g^{-1} tal que:

$$g^{-1} \otimes g = g \otimes g^{-1} = e$$

Un subgrupo $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ es un subconjunto de \mathcal{G} que a su vez forma grupo.

Un ejemplo sencillo de grupo es el grupo C_3 , formado por tres elementos $\langle I, R, R' \rangle$ con la tabla de multiplicación indicada en la Tabla 1.1. Es claro en este ejemplo que I es el elemento unidad de C_3 y que $R' = R^{-1}$.

Para la mecánica (y para la geometría) Mucho más interesante que la noción abstracta de grupo es la noción de *acción de un grupo* sobre una variedad diferenciable. Diremos que un grupo \mathcal{G} *actúa sobre un conjunto* X si existe una función $\theta : \mathcal{G} \times X \rightarrow X$ que satisface las dos condiciones siguientes:

1. Si e es el elemento unidad de \mathcal{G} , entonces para todo $x \in X$:

$$\theta(e, x) = x$$

2. Si $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, entonces para todo $x \in X$:

$$\theta(g_1 \otimes g_2, x) = \theta(g_1, \theta(g_2, x))$$

Usualmente, se escribe $gx = \theta(g, x)$ y se dice que g actúa como un operador sobre x . Un grupo que actúa sobre un conjunto X se llama un *grupo de transformaciones* sobre X . La Figura 1.3 muestra la acción de C_3 sobre el plano euclídeo como grupo de rotaciones de un triángulo equilátero.

Las transformaciones de coordenadas forman, evidentemente, grupos: el grupo de rotaciones y el de translaciones. Ambos son subgrupos del *grupo euclídeo*: el grupo de transformaciones que conserva la distancia entre dos puntos. Podemos

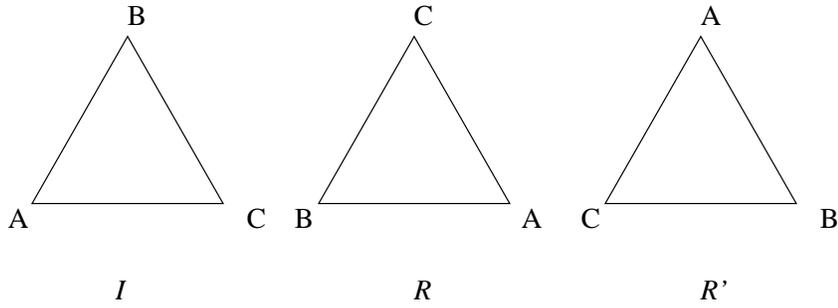


Figura 1.3: Rotaciones de un triángulo equilátero

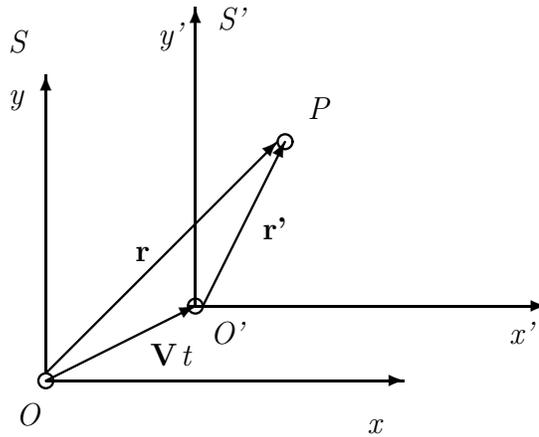


Figura 1.4: Transformaciones de coordenadas: Boosts

ahora dar un criterio para definir un objeto geométrico: es un subconjunto del espacio cuyas ecuaciones son covariantes bajo el grupo euclídeo.

El *programa de Erlangen*, propuesto por Félix Klein a fines del siglo XIX, propuso clasificar las geometrías a través de los grupos de invarianza que admitían. Así, la geometría euclídea está caracterizada por el grupo euclídeo, su invariante fundamental es la distancia entre puntos y las ecuaciones covariantes describen objetos geométricos con propiedades métricas. En la geometría proyectiva el grupo correspondiente es el proyectivo, el invariante es la razón anarmónica y las ecuaciones covariantes describen objetos con propiedades proyectivas. En lo que sigue generalizaremos esta afirmación: las leyes de la mecánica las elegiremos de modo que sean covariantes bajo un grupo más amplio, el grupo de Galileo.

1.1.4. Sistemas inerciales

Hay una clase particular de sistemas de referencia, los *sistemas inerciales*, importante porque en ellos las leyes del movimiento toman una forma sencilla.

Intuitivamente, los sistemas inerciales se caracterizan porque una partícula aislada (a distancias muy grandes de cualquier otro cuerpo) se mueve respecto de ellos con velocidad constante. Un sistema de referencia que se mueve con velocidad constante respecto de las estrellas fijas es una buena aproximación a un sistema inercial. La corteza terrestre no lo es pues las estrellas (que podemos considerar como partículas aisladas) describen circunferencias respecto de la corteza terrestre. Sin embargo, durante un intervalo mucho menor que un día la trayectoria de la estrella se sonfunde con la tangente y durante esos intervalos la corteza terrestre se comporta como un sistema inercial.

Sean S y S' dos sistemas inerciales; los ejes de S' no pueden rotar en función del tiempo respecto de S pues entonces una partícula en reposo respecto de S no se moverá con velocidad constante respecto de S' . El único movimiento admisible es una traslación de S' respecto de S con velocidad constante. Es fácil hallar la ley de transformación entre ambos sistemas inerciales en el caso particular en que los ejes correspondientes son paralelos. Si el origen de S' se mueve con velocidad \mathbf{V} respecto de S , (y si el origen de los tiempos coincide) hallamos:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t \quad (1.16)$$

$$t' = t \quad (1.17)$$

Estas ecuaciones definen la *transformación de Galileo* entre dos sistemas inerciales. Obviamente, forman un grupo conmutativo. El grupo formado por las rotaciones, traslaciones, traslaciones temporales y transformaciones de Galileo transforma sistemas inerciales en sistemas inerciales y se llama el *grupo de Galileo*. Podemos ahora caracterizar rigurosamente a los sistemas inerciales: es la clase de sistemas de referencia cerrada respecto del grupo de Galileo.

Estamos ahora en condiciones de enunciar un nuevo principio: el *principio de relatividad de Galileo*:

Principio 1.3 (Relatividad Galileana).

Las leyes de la mecánica son covariantes bajo el grupo de Galileo.

Hemos definido los sistemas inerciales a partir de sus propiedades de transformación, pero ninguna de nuestras hipótesis supone la existencia de un sistema inercial. Por lo tanto, admitiremos que existe al menos un sistema inercial. Esta hipótesis es una versión moderna del “Principio de inercia” formulado por Galileo y Newton.

Principio 1.4 (Inercia).

Existe un sistema inercial.

Problemas 1.1

Problema 1.1.1.

La aceleración de una partícula puede descomponerse en la aceleración tangencial,

paralela a la velocidad, y la aceleración centrípeta, perpendicular a la anterior. Probar que esta última es igual a v^2/ρ , con ρ el radio de curvatura de la trayectoria.

Problema 1.1.2.

Hallar la matriz de rotación en el caso de una rotación plana alrededor del eje z .

Problema 1.1.3.

Probar que la distancia entre dos puntos es un invariante bajo transformaciones de Galileo.

Problema 1.1.4.

Probar que la transformación más general de Galileo es un “empujón” de velocidad \mathbf{V} , seguido de una rotación de ejes.

Problema 1.1.5.

El sistema inercial S'' se mueve con velocidad constante \mathbf{U} respecto de S' . Hallar la transformación de Galileo entre S y S'' .

1.2. La ley dinámica

En la sección anterior hemos dado elementos cinemáticos básicos para la descripción del movimiento. Pasemos a enunciar las leyes que lo rigen.

1.2.1. Fuerzas

La noción de fuerza, como las de espacio y tiempo, es primitiva en la teoría y una idealización de la idea sencilla de esfuerzo muscular. Dado su carácter direccional, representaremos una fuerza con un vector \mathbf{F} y diremos que esa fuerza actúa sobre una partícula dada.

La fuerza que actúa sobre la partícula a , digamos, está producida por otras partículas cercanas. Llamaremos *fuerza total* sobre la partícula a a la suma vectorial de las fuerzas producidas por la presencia de otras partículas:

Principio 1.5 (Superposición de fuerzas).

$$\mathbf{F}_a = \sum_b \mathbf{F}_{ab} \quad (1.18)$$

en donde \mathbf{F}_{ab} es la fuerza que la partícula b produce sobre la a .

El principio de superposición de fuerzas afirma que la presencia de otras partículas no altera la fuerza entre dos partículas dadas en el sistema. La validez de esta hipótesis depende de cuán buena sea la aproximación de punto material. En cuerpos finitos cargados (tales como una molécula) la presencia de otros cuerpos alterará la distribución de carga y la fuerza total sobre un átomo

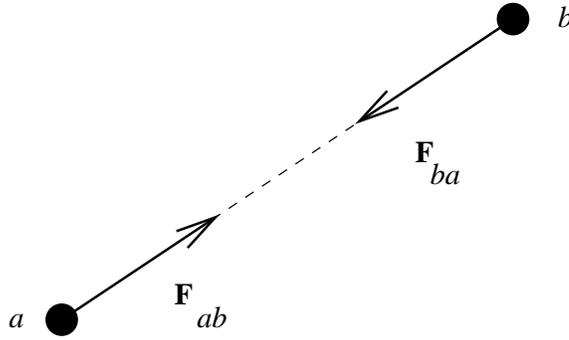


Figura 1.5: Acción y Reacción

dentro de una molécula no puede representarse por una suma de fuerzas entre pares.

Si nos limitamos a partículas, podemos afirmar mucho más sobre las fuerzas entre ellas. La partícula a ejercerá una fuerza sobre la b y viceversa. El *principio de acción y reacción* afirma que esas fuerzas son del mismo módulo, de sentido opuesto y actúan en la dirección de la recta que une ambas partículas:

Principio 1.6 (Acción y reacción).

$$\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba} = f(r_{ab})\mathbf{r}_{ab} \quad (1.19)$$

Las fuerzas opuestas se llaman, naturalmente, acción y reacción. Un ejemplo no muy divertido del principio de acción y reacción es el dolor que se siente al darle un puntapié a un adoquín con el pie desnudo, que es consecuencia de las fuerzas que ejerce la piedra sobre el pie, iguales y opuestas a la que el pie ejerce sobre la piedra.

El principio de acción y reacción es una consecuencia del principio de relatividad de Galileo. En efecto, supongamos que las fuerzas dependen sólo de las coordenadas y no de las velocidades de las partículas. Puesto que \mathbf{F}_{ab} debe ser una combinación lineal de los vectores admisibles en el sistema: \mathbf{r}_a y \mathbf{r}_b . Sin embargo, la única combinación lineal invariante es $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$. El coeficiente de esta combinación lineal sólo puede depender de r_{ab} , por covarianza bajo rotaciones y por lo tanto llegamos a la forma:

$$\mathbf{F}_{ab} = f(r_{ab})\mathbf{r}_{ab} \quad (1.20)$$

que implica el principio de acción y reacción. Mencionemos, finalmente, que las fuerzas de la forma (1.20) se llaman *fuerzas centrales*.

Las fuerzas centrales son importantes pues se presentan con mucha frecuencia

en la naturaleza. Las más conocidas son las fuerzas gravitacional y electrostática:

$$\mathbf{F}_N = -G_N \frac{mm'}{r^3} \mathbf{r} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{F}_C = \frac{qq'}{r^3} \mathbf{r} \quad (1.22)$$

pero muchas otras interacciones pueden aproximarse por fuerzas centrales. Por ejemplo, las fuerzas intermoleculares pueden aproximarse por la *fuerza de Lennard-Jones*:

$$\mathbf{F}_{LJ} = \frac{V_0}{\sigma r} \left[12 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{13} - 6 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^7 \right] \mathbf{r} \quad (1.23)$$

mientras que las fuerzas que mantienen unidos a los átomos en una molécula pueden aproximarse por la *fuerza de Morse*:

$$\mathbf{F}_M = \frac{2V_0}{ar} \left(e^{\frac{2(r-r_0)}{a}} - e^{\frac{(r-r_0)}{a}} \right) \mathbf{r} \quad (1.24)$$

Un ejemplo muy importante de fuerzas que no cumplen el principio de acción y reacción son las fuerzas electromagnéticas. Una partícula de carga eléctrica q en un campo electromagnético sufrirá la *fuerza de Lorentz*:

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (1.25)$$

Dadas dos partículas cargadas, la fuerza que cada una ejerce sobre la otra no tienen en general direcciones opuestas.

1.2.2. Las ecuaciones de movimiento

Nuestro último paso para determinar las leyes dinámicas será establecer las *ecuaciones del movimiento* del sistema. Estas ecuaciones relacionarán las magnitudes cinemáticas (velocidad, aceleración...) de una partícula con las fuerzas que actúan sobre ella. Nos guiará el principio de relatividad galileana.

Consideremos un sistema de N partículas que interactúan a través de fuerzas centrales. Al establecer la ecuación (1.20) probamos que las fuerzas centrales son covariantes de Galileo. Esto sugiere escribir las ecuaciones de movimiento del sistema en la forma:

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \mathbf{F}_a \quad (1.26)$$

en donde \mathbf{F}_a es la fuerza sobre la a -ésima partícula y \mathbf{p}_a se llama el *impulso* o *cantidad de movimiento* de la misma.

Para elegir a \mathbf{p}_a observemos que la ley (1.26) debe ser covariante bajo transformaciones de Galileo (1.16). Como \mathbf{p}_a es una propiedad de la partícula, examinemos el caso particular de una partícula aislada. en ese caso $\mathbf{F}_a = 0$, \mathbf{p}_a debe

ser constante. El único vector cinemático disponible para una partícula aislada es su velocidad, y por lo tanto:

$$\mathbf{p}_a = m_a \dot{\mathbf{r}}_a \quad (1.27)$$

donde m_a es una constante positiva, característica de la partícula, llamada su *masa*.

Las ecuaciones (1.26) y (1.27) representan la ley dinámica y son la clave de la mecánica. Juntas, constituyen el enunciado del *principio de masa*:

Principio 1.7 (Masa).

El movimiento de un sistema de partículas satisface las ecuaciones (1.26) y (1.27).

Sustituyendo (1.27) en (1.26) obtenemos la forma usual de la ley de movimiento, también llamada la *2.ª ley de Newton*:

$$m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = \mathbf{F}_a \quad (1.28)$$

Las ecuaciones (1.28) constituyen un sistema de $3N$ ecuaciones diferenciales acopladas cuya solución describe las trayectorias de las N partículas. Como se trata de ecuaciones de 2.º orden, sus soluciones estarán determinadas si se especifican $2N$ constantes vectoriales que pueden elegirse como las posiciones y velocidades de las partículas en un instante dado t_0 . Una vez conocidas estas condiciones iniciales, las ecuaciones (1.28) determinan en forma única las trayectorias.

1.2.3. Fuerzas externas

Aunque la estructura del sistema (1.28) es terriblemente compleja, en algunas circunstancias pueden introducirse notables simplificaciones. Un ejemplo ocurre cuando hay en el sistema un cuerpo cuya masa M_0 sea mucho mayor que las otras masas: $M_0 \gg m_a$. Las ecuaciones (1.28) muestran que la aceleración $\ddot{\mathbf{r}}_0$ será mucho menor que la aceleración típica del resto de las partículas. Si despreciamos esta aceleración, desaparece una de las ecuaciones diferenciales del sistema y podemos elegir como sistema de referencia aquel sistema inercial en que el cuerpo masivo está en reposo. Diremos que la fuerza \mathbf{F}_{a0} es una *fuerza externa* que actúa sobre la partícula a . Cuando esto ocurre, es posible despreciar las fuerzas entre las partículas livianas y obtener así un sistema de N ecuaciones diferenciales desacopladas, mucho más sencillo de resolver que el primitivo. Tal es el caso, por ejemplo, de la Tierra. Su masa es muy grande y la fuerza de gravedad suele predominar sobre otras fuerzas en juego. Lo mismo ocurre en el caso del movimiento planetario donde, en primera aproximación, es posible despreciar la aceleración del Sol y las interacciones entre los planetas.

Otro ejemplo de fuerza externa aparece cuando las partículas livianas son muy numerosas, tal como las moléculas de un gas o de un sólido. Es imposible

describir en detalle la fuerza que ejercen sobre un cuerpo macroscópico, pero se puede reemplazar a ésta por una *fuerza externa efectiva* que puede determinarse ya sea experimentalmente o por otras consideraciones teóricas. La ecuación de movimiento de la partícula pesada tomará, pues, la forma:

$$m_0 \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (1.29)$$

Un ejemplo importante de este tipo de fuerzas son las *fuerzas de rozamiento*, que dependen de la velocidad. Estas fuerzas aparecen por transferencia de impulso de la partícula pesada a las moléculas del medio que la rodea. Para un cuerpo que se mueve en el aire (proyectil) la fuerza depende linealmente de la velocidad (*roce viscoso*) si esta es muy pequeña y cuadráticamente (*roce hidrodinámico*) si es mayor.

1.2.4. Determinación de las constantes

Las $6N$ constantes de integración $\langle \mathbf{r}_a(t_0), \mathbf{v}_a(t_0) \rangle$ determinan las trayectorias de las partículas si se conocen las fuerzas que actúan sobre ellas. Tal es el caso, por ejemplo, de la artillería, donde se tiene una buena estimación de ambas cosas. Pero en muchos casos se desconocen tanto las condiciones iniciales como las fuerzas que actúan sobre el sistema y es necesario determinarlas a partir de las observaciones.

Consideremos un conjunto de observaciones de una trayectoria. Las coordenadas y velocidades de un punto material no son cantidades directamente observables, pues dependen de la elección del sistema de referencia. En su lugar, se observan otras cantidades auxiliares $\xi(t)$, que pueden calcularse a partir de la trayectoria. En el caso del movimiento planetario, estas observaciones son comúnmente las coordenadas angulares del planeta α, δ en un sistema de coordenadas esféricas dado. Estas coordenadas son funciones complicadas de la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ del planeta y de la trayectoria de la Tierra. Algunas veces se dispone de ecos de radar que proporcionan, además, la distancia y la velocidad radial del planeta, respecto del observatorio.

Llamemos ξ_i al conjunto de N_o observaciones de estas magnitudes. Supongamos, además, que disponemos de una trayectoria aproximada $\mathbf{r}_0(t)$, calculada con condiciones iniciales aproximadas $\langle \mathbf{r}_0(t_0), \mathbf{v}_0(t_0) \rangle$ y con fuerzas aproximadas $\mathbf{F}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Sea ξ_{0_i} el conjunto de magnitudes calculadas con esta trayectoria aproximada. Se llaman *residuos O-C* a las cantidades:

$$\eta_i = \xi_i - \xi_{0_i} \quad (1.30)$$

Los residuos O-C pueden atribuirse a varias causas:

1. discrepancias entre las condiciones iniciales de la trayectoria real y la trayectoria aproximada;
2. las diferencias entre la fuerza real y la fuerza supuesta;

3. errores de observación.

Las dos primeras causas pueden corregirse si se cambian un poco las condiciones iniciales o los parámetros que describen la fuerza. En total, tendremos M parámetros c_i para corregir usando las N_o observaciones, y llamemos

$$\delta c_j = c_j - c_{j_0}$$

a las correcciones a aplicar. Es fácil ver que los residuos O-C pueden escribirse como combinaciones lineales de las correcciones a los parámetros:

$$\eta_i + \epsilon_i = \sum_{j=1}^M \frac{\partial \xi_i}{\partial c_j} \delta c_j \quad (1.31)$$

en donde ϵ_i representa los errores de la i -ésima observación. Las derivadas parciales son soluciones de las *ecuaciones variacionales*:

$$\delta \ddot{\mathbf{r}} = \delta \left(\frac{\mathbf{F}}{m} \right) \quad (1.32)$$

con distintas condiciones iniciales. En casos interesantes, pueden calcularse analíticamente.

Las ecuaciones (1.31) se llaman las *ecuaciones de condición* del problema. Por lo general $N_o \gg M$ y el sistema de ecuaciones lineales está sobredeterminado. En el *método de cuadrados mínimos*, las correcciones δc_i se eligen de manera que la suma de los cuadrados de los errores

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_o} \epsilon_i^2 \quad (1.33)$$

sea mínima.

1.3. Ejemplos

Examinemos algunos ejemplos sencillos de aplicación de la ley dinámica (1.28). Nos limitaremos al caso de partículas que se mueven bajo la acción de fuerzas externas.

1.3.1. Caída de los cuerpos

Se suelta un cuerpo desde una altura h sobre el piso. Se desea hallar su trayectoria $z(t)$. Elijamos el eje z perpendicular al piso, con el origen de coordenadas en el mismo (Figura 1.6). La ley de Newton (1.28) se escribe:

$$m\ddot{z} = -mg \quad (1.34)$$

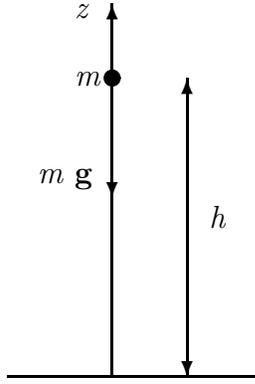


Figura 1.6: Caída de los cuerpos

o, simplificando:

$$\ddot{z} = -g \quad (1.35)$$

Esta ecuación diferencial se integra inmediatamente con el resultado:

$$z = a + bt + \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.36)$$

donde a y b son constantes de integración. Podemos expresarlas en función de las condiciones iniciales de nuestro problema. Sea $t = 0$ el instante en que se suelta el cuerpo. Nuestras condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} z(0) &= a = h \\ \dot{z}(0) &= b = 0 \end{aligned}$$

y finalmente obtenemos:

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.37)$$

que es la ley de Galileo de caída de los cuerpos.

Aclaremos, ante todo, que esta no es la forma en que se determinan las constantes de integración cuando se analizan resultados experimentales. Por ejemplo, cuando se determina la aceleración local de la gravedad g , se deja caer un cuerpo en el vacío y se mide su velocidad en función del tiempo con el corrimiento Döppler de un haz de laser². Se obtiene, como resultado, una sucesión de valores de la velocidad v_i (afectados de cierto error ϵ_i) y los correspondientes tiempos de medición t_i (cuyos errores se suponen muy pequeños). Sea N el número de valores medidos; disponemos, pues, de N *ecuaciones de condición* en la forma:

$$v_0 + gt_i = v_i + \epsilon_i \quad (1.38)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse con el método de cuadrados mínimos (Sección 1.2.4) para determinar los parámetros del modelo v_0 y g .

²También puede medirse su posición midiendo, por ejemplo, el retardo de un eco acústico.

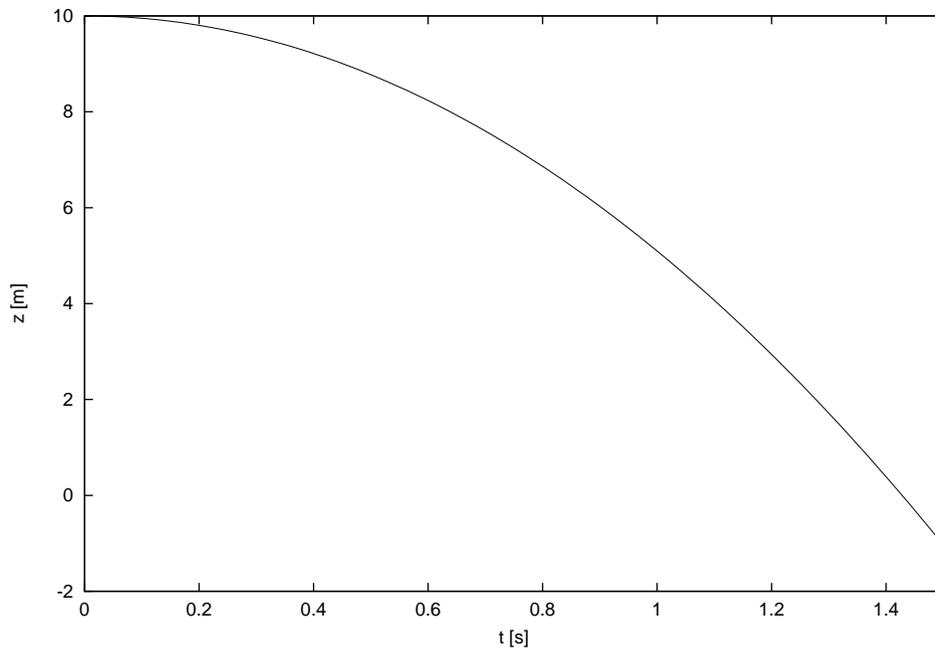


Figura 1.7: Caída de los cuerpos: x en función de t .

1.3.2. El oscilador armónico

Se llama así a un sistema constituido de una partícula sobre la que actúa una fuerza externa proporcional al apartamiento de un punto que tomaremos como origen:

$$F = -kx \tag{1.39}$$

en donde k es la constante de proporcionalidad. Un cuerpo sujeto a un resorte o colgado de un hilo elástico es una buena aproximación a un oscilador armónico. Supondremos que el movimiento se efectúa sólo a lo largo del eje x .

La ecuación diferencial del movimiento se obtiene de la tercera ley de Newton

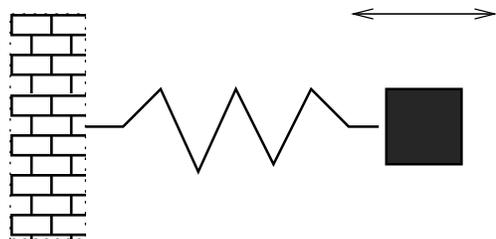


Figura 1.8: Un modelo de oscilador armónico

(1.28):

$$m\ddot{x} = -kx \quad (1.40)$$

o también:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.41)$$

en donde $\omega = \sqrt{k/m}$ se llama la *pulsación* o *frecuencia angular* del oscilador. Sin embargo, y siguiendo la costumbre en física teórica, la llamaremos sencillamente frecuencia.

Existe un método muy elegante para resolver la ecuación (1.41), debido a d'Alembert. Ecuaciones diferenciales como ésta, donde la función incógnita y sus derivadas aparecen elevadas sólo a la primera potencia, se llaman *ecuaciones diferenciales lineales*. Para ellas vale el *principio de superposición*: una combinación lineal de soluciones también es solución de la ecuación. Buscaremos, pues, soluciones particulares de (1.41) y luego formaremos combinaciones lineales para hallar la solución general. La propuesta de d'Alembert es buscar soluciones particulares de forma exponencial:

$$x = Ae^{\lambda t} \quad (1.42)$$

en donde λ es un parámetro a determinar.

Sustituyendo en (1.41) hallamos la *ecuación característica*:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad (1.43)$$

cuyas soluciones son:

$$\lambda = \pm i\omega \quad (1.44)$$

Hemos obtenido dos soluciones independientes de (1.41), que corresponden a los dos signos en (1.44), y la solución general la obtenemos en la forma:

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (1.45)$$

y como x debe ser real las constantes complejas deben cumplir $A = B^*$. La constante A puede obtenerse a partir de las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned}$$

y un cálculo sencillo conduce a:

$$A = \frac{1}{2} \left(x_0 - i \frac{v_0}{\omega} \right) \quad (1.46)$$

Una forma compacta de la solución la obtenemos escribiendo:

$$A = \frac{1}{2} C e^{-i\phi} \quad (1.47)$$

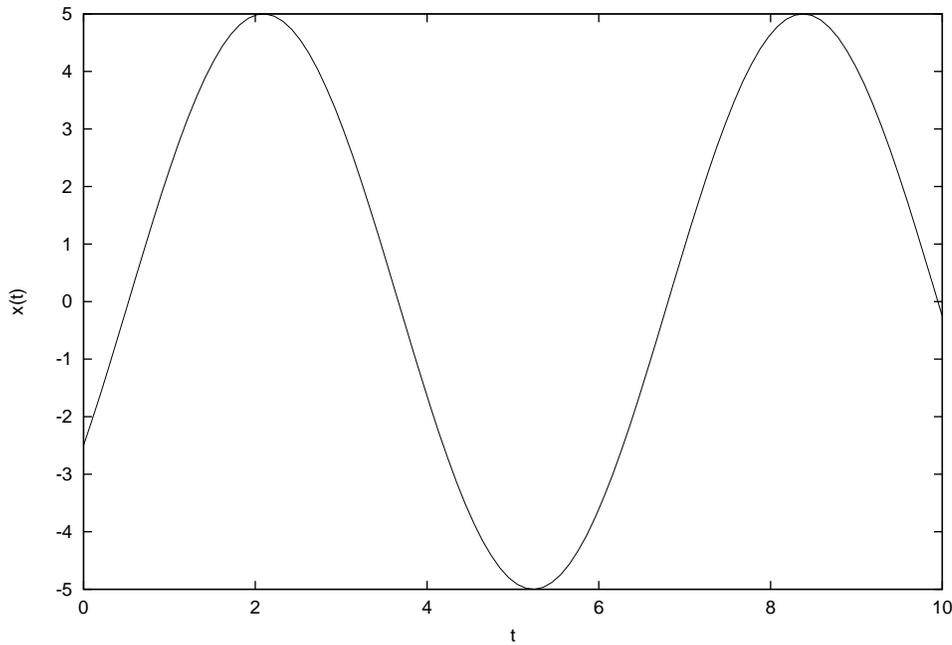


Figura 1.9: Oscilador armónico: x en función de t .

donde la *amplitud* C y la *fase* ϕ se expresan en función de las condiciones iniciales:

$$C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (1.48a)$$

$$\tan \phi = \frac{v_0}{x_0 \omega} \quad (1.48b)$$

De esta manera obtememos la expresión habitual de la elongación del oscilador:

$$x = C \cos(\omega t - \phi) \quad (1.49)$$

Esta última ecuación muestra con claridad el carácter oscilatorio del movimiento.

1.3.3. El cohete

Un problema interesante, porque analiza el movimiento de un sistema con masa variable, es el del cohete. Supongamos que está en el espacio, libre de fuerzas, y que su masa inicial (carga útil más combustible) es M_0 . El cohete avanza arrojando gas hacia atrás, a una velocidad v_e , y la pérdida de masa $\dot{M} = -\mu$ es una función que puede controlarse.

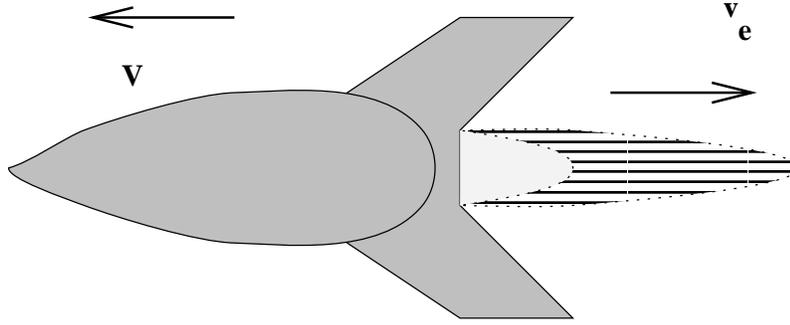


Figura 1.10: Cohete interplanetario

Para aplicar la 2.^a ley de Newton, es necesario calcular la variación total del impulso del cuerpo: debido a la pérdida de masa y a la fuerza externa:

$$p(t + dt) = (M + dM)(v + dv) + \mu dt(v - v_e) \quad (1.50)$$

y por lo tanto, obtenemos:

$$\dot{p} = \frac{d(mv)}{dt} + \mu(v - v_e) = F$$

que puede simplificarse en la forma:

$$M\dot{v} = -\dot{M}v_e \quad (1.51)$$

Esta última es la *ecuación del cohete*. Es, obviamente, invariante bajo transformaciones de Galileo. Observemos que la masa total del sistema, cohete y gases expelidos se conserva. La solución de la ecuación del cohete es sencilla:

$$v = v_0 + v_e \ln \frac{M_0}{M} \quad (1.52)$$

Para lograr una velocidad final importante, es necesario expeler una gran cantidad de materia a gran velocidad.

1.3.4. Movimiento en un campo magnético

Examinemos el movimiento de una partícula de masa m y carga q en un campo magnético constante \mathbf{B} . Aplicando la segunda ley de Newton (1.28) y la fuerza de Lorentz (1.25) hallamos la ecuación de movimiento:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{c}\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (1.53)$$

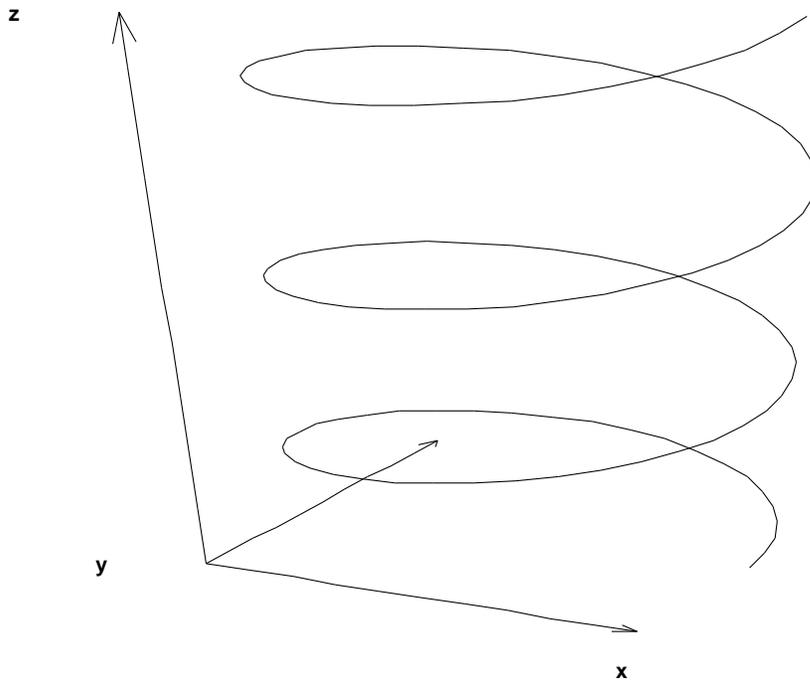


Figura 1.11: Trayectoria en un campo magnético

Puesto que se trata de una ecuación lineal con coeficientes constantes, se puede usar el método de d'Alembert para buscar una solución. Elijamos nuestro sistema de coordenadas de modo que el eje z sea paralelo al campo magnético:

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k}$$

Con esta elección las ecuaciones de movimiento se simplifican:

$$\dot{v}_x = -\frac{q}{mc} B_0 v_y \tag{1.54}$$

$$\dot{v}_y = \frac{q}{mc} B_0 v_x \tag{1.55}$$

$$\dot{v}_z = 0 \tag{1.56}$$

Se simplifica aún más el sistema si introducimos la variable

$$\hat{v} = v_x + i v_y$$

en donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria. Las ecuaciones (1.54) y (1.55) se combinan en:

$$\dot{\hat{v}} = i \frac{q}{mc} B_0 \hat{v} \quad (1.57)$$

Esta última ecuación se puede resolver con la sustitución de d'Alembert:

$$\hat{v} = \hat{v}_0 e^{\lambda t}$$

que proporciona:

$$\lambda = i\Omega_L = i \frac{q}{mc} B_0 \quad (1.58)$$

en donde Ω_L se llama *frecuencia de Larmor*. En forma inmediata hallamos, para la velocidad y la posición:

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \hat{v}_0 e^{i\Omega_L t} \\ v_z &= v_{z0} \\ \hat{r} &= \hat{r}_0 + \frac{\hat{v}_0}{\Omega_L} e^{i\Omega_L t} \\ z &= z_0 + v_{z0} t \end{aligned}$$

La partícula describe una hélice circular de eje paralelo al campo magnético.

Problemas 1.3

Problema 1.3.1.

Una partícula de masa m cae en un medio viscoso y sufre la acción de una fuerza proporcional a la velocidad. Discutir el movimiento del proyectil y hallar la velocidad límite.

Problema 1.3.2.

Se dispara un proyectil en el vacío, con una velocidad v_0 , formando un ángulo θ_0 con la horizontal. Hallar la trayectoria del proyectil.

Problema 1.3.3.

Resolver el problema anterior cuando el proyectil se mueve en un medio viscoso, con una fuerza de roce proporcional a la velocidad.

Problema 1.3.4.

Estudiar el movimiento de un oscilador armónico sometido a una fuerza constante.

Problema 1.3.5.

Estudiar el movimiento de un cohete que se mueve verticalmente, bajo la acción de la gravedad.

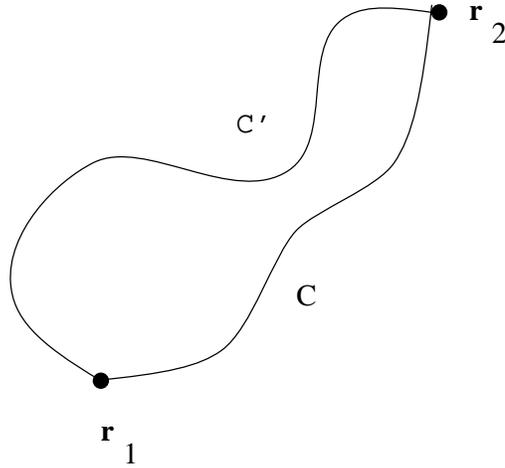


Figura 1.12: Caminos de integración

1.4. Energía

La resolución de las ecuaciones de movimiento se simplifica enormemente cuando existen funciones de las coordenadas y las velocidades llamadas *integrales primeras*. Su presencia está conectada, como lo veremos posteriormente, con la existencia de simetrías en el sistema y de leyes de conservación. Cada integral primera enuncia una *ley de conservación* para una determinada magnitud. En esta sección introduciremos la más importante de estas cantidades conservadas: la energía.

1.4.1. Fuerzas conservativas

Consideremos una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza externa \mathbf{F} . La ecuación de movimiento es:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \quad (1.59)$$

Llamaremos trabajo realizado por la fuerza a lo largo de una curva \mathbf{C} a la cantidad:

$$W_{12}[\mathbf{C}] = \int_{\mathbf{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.60)$$

en donde el camino de integración conecta los puntos \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 (Figura 1.12). Si multiplicamos escalarmente la ecuación de movimiento (1.59) por $d\mathbf{r}$ e integramos

a lo largo de la trayectoria de una partícula, obtenemos:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{\mathbf{c}} \dot{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{\mathbf{c}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \end{aligned}$$

Introduzcamos ahora la *energía cinética* de la partícula como:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.61)$$

y con esta definición obtenemos el *teorema trabajo-energía cinética*:

$$W_{12} = T_2 - T_1 \quad (1.62)$$

El teorema afirma, sencillamente, que el cambio de energía cinética de la partícula es igual al trabajo realizado por la fuerza. Este teorema, una consecuencia sencilla de la ecuación de movimiento (1.59), es en realidad muy profundo. Aunque es muy general, sus consecuencias más importantes se obtienen en el caso particular de *fuerzas conservativas*. Se llaman así aquellas para las que el trabajo realizado sobre toda curva cerrada es cero:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.63)$$

No todas las fuerzas cumplen esta condición. Por ejemplo, las fuerzas de roce producen siempre trabajo positivo y su integral sobre un camino cerrado no puede anularse. Sin embargo, las fuerzas conservativas abundan en la naturaleza y las estudiaremos en lo que sigue. Un ejemplo importante de ellas son las fuerzas centrales (Problema 1.4.3).

El trabajo realizado por una fuerza conservativa no depende del camino de integración que se use para calcularlo. En efecto, si descomponemos una trayectoria cerrada en dos caminos (Figura 1.12) \mathbf{C} y \mathbf{C}' tendremos:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{c}'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

e invirtiendo el sentido de la segunda integral:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{c}'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = W_{12}$$

Puesto que el trabajo depende de los puntos inicial y final de la trayectoria, debe ser igual a la diferencia de los valores de una función en los puntos \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 :

$$W_{12} = V_1 - V_2 \quad (1.64)$$

Esta función se llama *energía potencial* de la partícula o también *potencial* de la fuerza. Si sustituimos (1.64) en el teorema trabajo-energía cinética (1.62) obtenemos la *ley de conservación de la energía*:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = E \quad (1.65)$$

La cantidad E se llama la *energía total* del sistema y el teorema afirma que es invariante durante el movimiento.

La ley de conservación de la energía es una de las más importantes de la física. Ampliando adecuadamente la noción de energía, es válida para todos los fenómenos físicos. En el caso de la mecánica, su importancia estriba en que reemplaza la ecuación diferencial de 2.º orden (1.59) por la ecuación de 1.º orden (1.65), que es una integral primera de las ecuaciones de movimiento. La energía total es una constante determinada por las condiciones iniciales del problema. Observemos, sin embargo, que tanto la energía potencial como la energía total están definidas a menos de una constante arbitraria. Esta constante queda determinada eligiendo el valor de la energía potencial en un punto cualquiera O :

$$V(\mathbf{r}) = - \int_O^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.66)$$

El punto O puede elegirse arbitrariamente. Si la fuerza \mathbf{F} tiende a cero suficientemente rápido cuando $\mathbf{r} \rightarrow \infty$, es usual elegirlo como un punto en el infinito.

Si se conoce la energía potencial V la fuerza queda determinada por la ecuación:

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (1.67)$$

Finalmente, escribamos la condición para que una fuerza sea conservativa en forma diferencial. Usando el teorema de Stokes

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Sigma} \nabla \wedge \mathbf{F} d\sigma \quad (1.68)$$

en donde Σ es una superficie limitada por la curva cerrada, hallamos la condición diferencial:

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = 0 \quad (1.69)$$

en todos los puntos del espacio.

1.4.2. Movimiento unidimensional

Apliquemos la conservación de la energía al problema del movimiento de una partícula a lo largo del eje x bajo la acción de una fuerza externa que dependa únicamente de la posición:

$$F_x = f(x) \quad (1.70)$$

En ese caso la fuerza es siempre conservativa, con un potencial:

$$V(x) = - \int f(x) dx \quad (1.71)$$

Utilizando la ley de conservación de la energía (1.65), hallamos de inmediato:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) = E \quad (1.72)$$

Esta ecuación se integra de inmediato, despejando la velocidad. Obtenemos:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \quad (1.73)$$

y esta ecuación resuelve completamente el problema planteado. El instante inicial t_0 y la energía total E son dos constantes de integración que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales.

Por ejemplo, el problema del oscilador armónico (Sección 1.3.2) puede resolverse en forma muy sencilla usando la ecuación de la energía. La energía potencial del problema es:

$$V = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (1.74)$$

y por lo tanto la ecuación (1.73) toma la forma:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2}} \quad (1.75)$$

La integral se calcula fácilmente:

$$t - t_0 = \frac{1}{\omega} \arccos \left(\frac{\omega x}{\sqrt{2E/m}} \right) \quad (1.76)$$

y el resultado final es:

$$x = \frac{\sqrt{2E/m}}{\omega} \cos[\omega(t - t_0)] \quad (1.77)$$

que coincide con la ecuación (1.49) si definimos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \omega^2 C^2 \\ \phi &= \omega t_0 \end{aligned}$$

Aún sin llevar a cabo la integración es posible describir en forma cualitativa el movimiento con la ayuda de la ecuación de la energía. Por ejemplo, describamos el movimiento de una partícula en el potencial de la figura Figura 1.13.

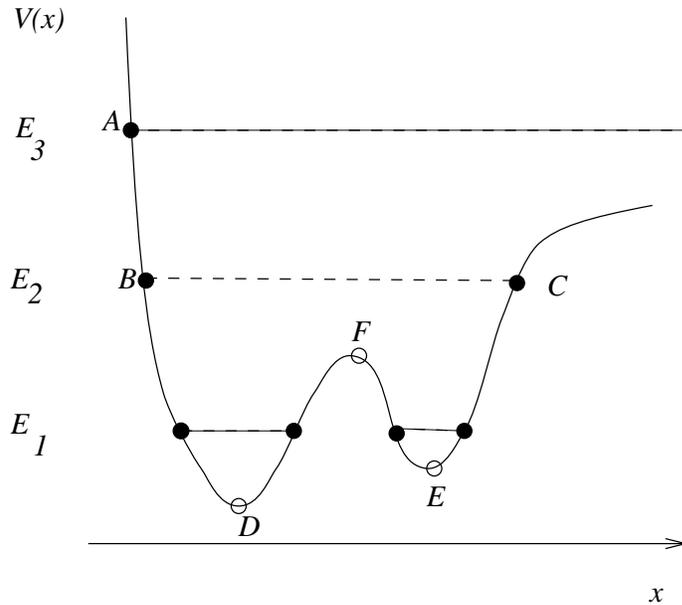


Figura 1.13: Un potencial arbitrario

Como la energía cinética es una cantidad positiva, el movimiento puede efectuarse solamente en las regiones en que $E > V$. Estas regiones dependen del valor de la energía. Cuando la energía sea igual a E_1 habrá dos regiones finitas en donde es posible el movimiento; cuando sea E_2 habrá una sola y para el caso $E = E_3$ la partícula puede alejarse indefinidamente del origen. Los puntos que limitan las regiones finitas, tales como A o B se llaman *puntos de retroceso*; en ellos se cumple:

$$E = V(x_A)$$

y la energía cinética se anula. por otra parte, en los puntos donde el potencial tiene un extremo, tal como D , E o F , se anula la fuerza y se llaman *puntos de equilibrio*. En estos puntos la energía cinética es un extremo.

El movimiento se efectúa intercambiando energía cinética y potencial. Por ejemplo, una partícula que se encuentre en el punto A , con energía total E_2 , comenzará a moverse hacia B aumentando su energía cinética a expensas de la potencial. A partir del punto de equilibrio D , comenzará a disminuir su energía cinética hasta llegar al punto F y luego esta comenzará a aumentar. . .

Cuando el movimiento se efectúa en una región finita del espacio, tal como el intervalo $[x_A, x_B]$, el movimiento es periódico. El período es el tiempo de ida i vuelta entre los puntos de retroceso y es igual a:

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_A}^{x_B} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \quad (1.78)$$

y es, en general, una función de la energía. Esta es la propiedad más importante en un movimiento unidimensional acotado y puede calcularse sencillamente a partir de la ecuación (1.78).

Problemas 1.4

Problema 1.4.1.

¿Es conservativa la fuerza $K(x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k})$? Si lo es, hallar el potencial correspondiente.

Problema 1.4.2.

Lo mismo para la fuerza $K(xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k})$

Problema 1.4.3.

Probar que las fuerzas centrales son conservativas. Mostrar que pueden escribirse en la forma:

$$\mathbf{F} = -\frac{dV}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Problema 1.4.4.

Hallar los potenciales para las fuerzas de Lennard-Jones (1.23) y de Morse (1.24).

Problema 1.4.5.

Estudiar la caída de los cuerpos (Sección 1.3.1) con la ecuación de la energía.

Problema 1.4.6.

Analizar el movimiento de una partícula en el potencial:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{l^2}{x^2}$$

resolver analíticamente el problema y discutir cualitativamente la solución.

Problema 1.4.7.

Una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza cuyo potencial es $-\frac{1}{2} \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$.

1. Determinar las regiones de movimiento finito e infinito.
2. Resolver analíticamente el problema.

Problema 1.4.8.

Hallar el periodo de oscilación para el mismo sistema.

1.5. Teoremas de conservación

En la sección anterior hemos discutido la ley de conservación de la energía mecánica para una partícula. De ella se obtiene una integral primera de las ecuaciones de movimiento que, en el caso unidimensional, es suficiente para resolver completamente las ecuaciones de movimiento. En esta sección discutiremos varios teoremas generales que de conservación, que prueban la existencia de otras integrales primeras.

1.5.1. Impulso

Probaremos ahora el *teorema de conservación del impulso*. Consideremos un sistema de N partículas que interactúan entre sí con fuerzas binarias \mathbf{F}_{ab} y que, además, pueden sufrir la acción de fuerzas externas \mathbf{F}_a . La ley de Newton, escrita en la forma (1.26) proporciona N ecuaciones diferenciales:

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \mathbf{F}_a + \sum_{b \neq a} \mathbf{F}_{ab} \quad (1.79)$$

que describen el movimiento.

Llamaremos impulso total del sistema a la suma de los impulsos de las partículas:

$$\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a \quad (1.80)$$

Sumando las ecuaciones (1.79) obtenemos una ecuación para el impulso total:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_a \mathbf{F}_a + \sum_a \sum_{b \neq a} \mathbf{F}_{ab} \quad (1.81)$$

El último término es igual a:

$$\sum_a \sum_{b > a} (\mathbf{F}_{ab} + \mathbf{F}_{ba}) = 0$$

que se anula por el principio de acción y reacción (1.19). La ecuación resultante:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_a \mathbf{F}_a \quad (1.82)$$

contiene como caso particular el teorema de conservación del impulso: si el segundo miembro de (1.82), la suma de las fuerzas externas, se anula, el impulso total \mathbf{P} se conserva. El principio de acción y reacción es crítico para la validez del teorema.

La ecuación 1.82 tiene la misma forma que la 2.^a ley de Newton (1.26). Probemos que es la ecuación de movimiento para una partícula ficticia: el *centro de masa* del sistema. Definimos a este último y a la masa total con las ecuaciones:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{M} \quad (1.83)$$

$$M = \sum_a m_a \quad (1.84)$$

El impulso total del sistema puede expresarse como el impulso del centro de masa:

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}} \quad (1.85)$$

y la ecuación (1.82) toma la forma:

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (1.86)$$

Hemos probado que el centro de masa de un sistema se mueve como si fuera una partícula de masa M sobre la que actuara la suma de las fuerzas externas.

Si el sistema está aislado, existe un sistema inercial en el que el centro de masa está en reposo. Este sistema inercial se llama el *sistema de centro de masas* o sistema CM. Si se fija el origen de coordenadas en el centro de masa, se cumple la condición:

$$\sum_a m_a \mathbf{r}_a = 0 \quad (1.87)$$

ecuación que se suele llamar, por abuso de lenguaje, “ley de conservación del centro de masas”.

1.5.2. Impulso angular

El momento de una fuerza respecto del origen se define como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} \quad (1.88)$$

Intuitivamente (1.88) representa la capacidad de la fuerza para inducir rotaciones alrededor del origen. Existe un teorema de conservación asociado con los momentos de las fuerzas: el de conservación del impulso angular. Para demostrarlo, multipliquemos la ecuación de movimiento (1.79) vectorialmente por \mathbf{r}_a :

$$\mathbf{r}_a \wedge \dot{\mathbf{p}}_a = \mathbf{r}_a \wedge \mathbf{F}_a + \sum_{b \neq a} \mathbf{r}_a \wedge \mathbf{F}_{ab} \quad (1.89)$$

El primer miembro de esta ecuación puede escribirse:

$$\mathbf{r}_a \wedge \dot{\mathbf{p}}_a = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_a \wedge \mathbf{p}_a) = \frac{d\mathbf{L}_a}{dt}$$

en donde hemos introducido el *impulso angular* de la a -ésima partícula:

$$\mathbf{L}_a = \mathbf{r}_a \wedge \mathbf{p}_a \quad (1.90)$$

El impulso angular total del sistema es la suma de los impulsos angulares de las partículas:

$$\mathbf{L} = \sum_a \mathbf{L}_a \quad (1.91)$$

Si ahora sumamos todas las ecuaciones (1.89) hallamos:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_a \mathbf{r}_a \wedge \mathbf{F}_a + \sum_a \sum_{b \neq a} \mathbf{r}_a \wedge \mathbf{F}_{ab}$$

En el segundo miembro de esta ecuación, el primer término es el momento total de las fuerzas externas respecto del origen. El segundo término se anula pues:

$$\mathbf{r}_a \wedge \mathbf{F}_{ab} + \mathbf{r}_b \wedge \mathbf{F}_{ba} = (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \mathbf{F}_{ab} = 0$$

por el principio de acción y reacción.

El resultado final de nuestro teorema es:

$$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\tau} \tag{1.92}$$

y esta ecuación contiene el teorema de conservación del impulso angular: si la suma de los momentos de las fuerzas externas respecto del origen es cero el impulso angular se conserva.

Es importante observar que tanto el impulso angular como el momento de la fuerza dependen de la elección del origen. Por ejemplo, introduzcamos coordenadas relativas al centro de masa como:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a &= \mathbf{r}'_a + \mathbf{R} \\ \mathbf{v}_a &= \mathbf{v}'_a + \mathbf{V} \end{aligned}$$

Un cálculo sencillo muestra que el impulso angular total se descompone en dos partes:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \wedge \mathbf{P} + \sum_a \mathbf{r}'_a \wedge \mathbf{p}'_a \tag{1.93}$$

el impulso angular respecto del centro de masas respecto del origen y el de las partículas respecto del centro de masas. En un sistema aislado, el impulso angular respecto del centro de masas se conserva y se anula en el sistema de centro de masas.

Existe una profunda diferencia entre los teoremas de conservación que acabamos de mostrar. La ecuación (1.86) muestra que sólo la acción de fuerzas externas puede cambiar la posición del centro de masas. No existe, en cambio, ninguna conexión sencilla entre la orientación de un cuerpo y el impulso angular; por lo tanto, la ecuación (1.92) nada nos dice sobre la posición angular del sistema y esta última puede cambiar por la acción de fuerzas internas. Un buen ejemplo de estos son los ejercicios atléticos. Un gimnasta en la barra o el potro es capaz de cambiar su orientación angular estirando o encogiendo su cuerpo para realizar el ejercicio y lo mismo es cierto para un clavadista en el aire. Al fin y al cabo, ¡los gatos siempre caen “de pie”!

1.5.3. Conservación de la energía

En un sistema de partículas vale también la ley de conservación de la energía si tanto las fuerzas internas como las externas son conservativas. Introduciendo los

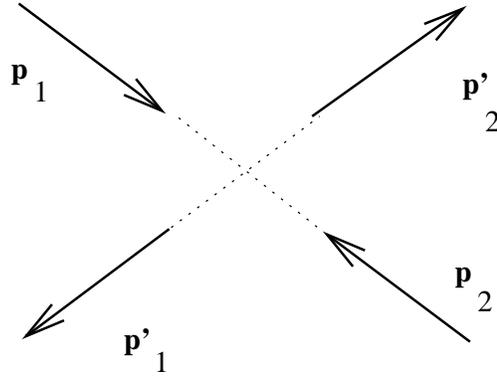


Figura 1.14: Impulsos en un choque

potenciales correspondientes a las fuerzas, hallamos la energía total del sistema:

$$E = \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 + \sum_a V_a + \frac{1}{2} \sum_{a,b \neq a} V_{ab} \quad (1.94)$$

Aquí V_a es la energía potencial de las fuerzas externas y V_{ab} la de las fuerzas internas. Esta expresión puede simplificarse aún si introducimos coordenadas relativas al centro de masas. La energía cinética del sistema se descompone:

$$\frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_a m_a v'_a{}^2 \quad (1.95)$$

y de este modo la energía total se descompone también en energía del centro de masa y la energía cinética relativa al centro de masas:

$$E = E_{\text{CM}} + E_{\text{rel}} \quad (1.96)$$

$$E_{\text{CM}} = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_a V_a \quad (1.97)$$

$$E_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \sum_a m_a v'_a{}^2 + \frac{1}{2} \sum_{a,b \neq a} V_{ab} \quad (1.98)$$

En el caso de un sistema aislado, la energía del centro de masas se anula en el sistema de centro de masas.

1.5.4. Choques de partículas

Los teoremas de conservación permiten simplificar problemas de mecánica y a veces resolverlos completamente. Un ejemplo es el choque de partículas que interactúan a través de fuerzas de corto alcance. Por estas últimas, entenderemos

fuerzas que actúan solamente cuando las partículas se encuentran a una distancia menor que un cierto parámetro a una de la otra.

Trabajaremos en el sistema **CM**. Sean \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 los impulsos iniciales y sean \mathbf{p}'_1 y \mathbf{p}'_2 los impulsos finales de las partículas. El impulso total del sistema (nulo en el sistema **CM**) debe conservarse y por lo tanto:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0 \quad (1.99)$$

De aquí deducimos:

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p} \quad (1.100)$$

$$\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}' \quad (1.101)$$

$$(1.102)$$

La energía total también debe conservarse. Puesto que las fuerzas son de corto alcance, cuando las partículas están alejadas podemos escribir:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2} \quad (1.103)$$

o, teniendo en cuenta las ecuaciones (1.100) y (1.101):

$$p^2 = p'^2 \quad (1.104)$$

De estas ecuaciones deducimos que en el sistema **CM** en el estado final los impulsos de las partículas son iguales y opuestos, y del mismo módulo que las partículas incidentes. El ángulo χ que forman los impulsos de entrada y salida no puede determinarse sólo aplicando los teoremas de conservación y es necesario resolverlas ecuaciones de movimiento para determinarlo. En el caso de movimiento unidimensional, sin embargo, las ecuaciones (1.104), (1.100) y (1.101) resuelven completamente el problema.

Problemas 1.5

Problema 1.5.1.

Probar el teorema de conservación de la energía para un sistema de partículas.

Problema 1.5.2.

Dos partículas de masas m y M chocan en una dimensión. Hallar sus velocidades finales en función de las velocidades iniciales v_0 y V_0 .

Problema 1.5.3.

Supongamos ahora que la partícula de masa M del Problema 1.5.2 absorbe una cierta energía E_0 y pasa a otro estado interno. Determinar la velocidad *mínima* de la partícula de masa m para que la reacción se produzca.

Problema 1.5.4.

Discutir el problema de choque inelástico en el espacio.

Problema 1.5.5.

Una partícula que posee una energía interna E_S y masa M se desintegra en dos partículas, con energías internas E_1 y E_2 , y masas m_1 y m_2 . Estudiar la desintegración en el sistema CM.

Capítulo 2

Oscilaciones en una dimensión

Por lo general, es muy difícil analizar en profundidad el comportamiento de un sistema mecánico, pues es muy grande la riqueza y complejidad de sus ecuaciones de movimiento. Los sistemas unidimensionales cuyo movimiento se efectúa en una región finita del eje x forman un caso interesante, pues su comportamiento puede analizarse con mucho detalle usando herramientas matemáticas simples. Estos *sistemas oscilatorios* constituyen un caso particular de los *sistemas dinámicos en dos variables*, cuyo estudio se inició el siglo pasado y que aun no ha concluido. En este capítulo, examinaremos brevemente la riqueza y complejidad de las soluciones de estos sistemas dinámicos.

2.1. Oscilaciones armónicas

El problema más sencillo de movimiento unidimensional es el movimiento oscilatorio armónico, que ya hemos discutido (Sección 1.3.2). Discutamos brevemente su origen e importancia. Una partícula que se mueve en un potencial, con una energía próxima al mínimo, realiza un movimiento que puede aproximarse por un oscilador armónico. En efecto, cerca del mínimo el potencial puede desarrollarse en serie de Taylor en la forma:

$$V(x) = V_0 + \frac{1}{2}V_0''(x - x_0)^2$$

y este potencial da origen a un movimiento armónico alrededor del punto x_0 .

Las ecuaciones diferenciales que describen sistemas dinámicos son formalmente idénticas a las que describen otros sistemas físicos. Diremos que ambos sistemas son *análogos* y la solución de uno puede usarse para analizar el otro. Por ejemplo, el oscilador armónico forzado es análogo a un circuito RLC (Figura 2.1):

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = V(t) \quad (2.1)$$

Esta ecuación se transforma en la del oscilador armónico forzado con un sencillo ejercicio de traducción: la masa m es análoga a la inductancia L , la constante

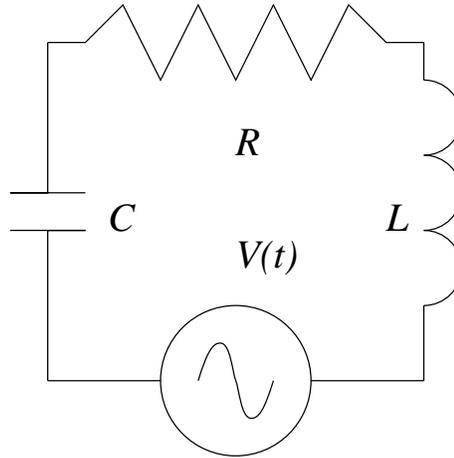


Figura 2.1: Analogías dinámicas: Circuito RLC

de fricción k a la resistencia R , etc. De este modo, los resultados hallados en un sistema mecánico pueden aplicarse al estudio de un sistema eléctrico, químico o biológico.

Examinemos ahora algunas generalizaciones importantes del movimiento armónico.

2.1.1. Oscilaciones amortiguadas

Volvamos a examinar el movimiento armónico bajo la acción de una fuerza de roce viscoso:

$$F_r = -\mu\dot{x} \quad (2.2)$$

que es también lineal. Las fuerzas de roce viscoso son comunes en la naturaleza. La suspensión de un automóvil, que consiste en un soporte elástico y un amortiguador viscoso, es sólo un ejemplo cotidiano de oscilador amortiguado. Si introducimos la cantidad $\lambda = \frac{1}{2} \frac{\mu}{m}$ la ecuación de movimiento del oscilador amortiguado toma la forma:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.3)$$

que generaliza la ecuación (1.41). Hemos cambiado ligeramente la notación y aquí $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Para resolver esta ecuación, usaremos la sustitución de d' Alembert en la forma $x = Ae^{i\omega t}$ y procediendo como en la Sección 1.3.2 hallamos la ecuación característica:

$$-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2 = 0$$

que tiene las soluciones:

$$\omega_{\pm} = i\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad (2.4)$$

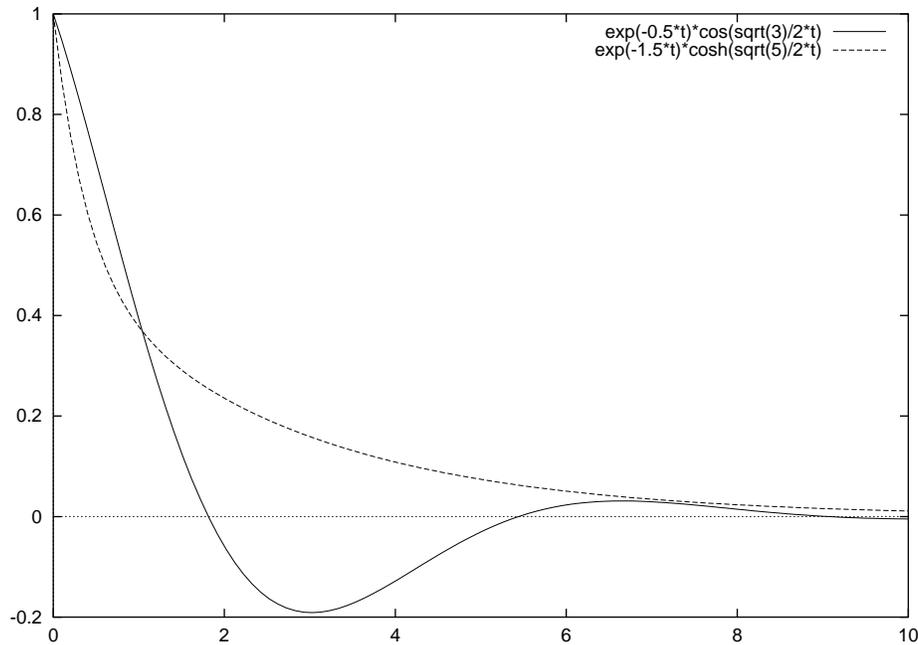


Figura 2.2: Trayectorias del oscilador amortiguado

Como antes, la solución más general del problema es una combinación lineal de las dos soluciones halladas:

$$x = A_+ e^{i\omega_+ t} + A_- e^{i\omega_- t} \quad (2.5)$$

en donde las constantes se determinan por las condiciones iniciales y la condición de realidad de la solución:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = A_+ + A_- \\ \dot{x}_0 &= v_0 = i(\omega_+ A_+ + \omega_- A_-) \\ A_+ &= A_-^* \end{aligned}$$

Hay dos casos principales que pueden presentarse. Si el amortiguamiento es grande, $\lambda > \omega_0$, las dos frecuencias (2.4) son imaginarias puras y la solución general (2.5) es una combinación lineal de dos exponenciales reales y no es oscilatoria. La partícula desplazada de su posición de equilibrio retorna lentamente a la misma. Se suele llamar a este caso *movimiento sobreamortiguado*.

Por el contrario, si $\lambda < \omega_0$ las frecuencias son complejas y el movimiento es oscilatorio. Observemos que en presencia de rozamiento la frecuencia de oscilación no coincide con su valor “natural” ω_0 . En la moderna jerga de la física teórica, se dice que las frecuencias se han *renormalizado*. Si el amortiguamiento es pequeño, $\lambda \ll \omega_0$, la diferencia entre la frecuencia “natural” y la renormalizada ω_r es de

segundo orden en λ . La amplitud de la oscilación decrece exponencialmente con el tiempo.

Las fuerzas de roce disipan la energía. Esta última es una función oscilante del tiempo y es mucho más interesante calcular el valor medio de la misma en un periodo:

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m (\langle \dot{x}^2 \rangle + \omega_0^2 \langle x^2 \rangle)\end{aligned}\quad (2.6)$$

Para calcular (2.6) debemos sustituir la forma real de la trayectoria del oscilador, pues sobre la forma compleja sólo es lícito efectuar operaciones lineales: suma, multiplicación por constantes, derivación, integración. Sea $t_0 = n \frac{2\pi}{\omega_r}$ el tiempo en que comenzamos a promediar. Puesto que t_0 es un múltiplo del periodo, sustituiremos la parte real de (2.5) escrita en la forma:

$$x = C e^{-\lambda\tau} \cos(\omega_r\tau - \phi) e^{-\lambda t_0}$$

para obtener:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{8} \frac{m \omega_r C^2 [\omega_r^2 + \lambda^2 (1 + \cos 2\phi)]}{\pi \lambda} \left[1 - e^{-\frac{4\pi\lambda}{\omega_r}} \right] e^{-\lambda t_0} \quad (2.7)$$

El cálculo del valor medio es sumamente simple en el caso en que el amortiguamiento es pequeño. Desarrollando en serie (2.7) se encuentra:

$$\langle E \rangle \simeq \frac{1}{2} m \omega_r^2 C^2 \left(1 - \frac{2\pi\lambda}{\omega} \right) e^{-\lambda t_0} \quad (2.8)$$

Cuando $\lambda \ll \omega_0$ el primer término domina. Podemos calcular ese término dominante de una manera muy sencilla: es igual al módulo de la forma compleja:

$$\begin{aligned}x &= C e^{-\lambda t + i\omega_r t} \\ \langle E \rangle &= \frac{1}{2} m \omega_r^2 |x|^2\end{aligned}\quad (2.9)$$

y este importante resultado es exacto si el amortiguamiento es cero.

2.1.2. Oscilaciones forzadas

Examinemos ahora el movimiento de un oscilador sobre el que actúa otra fuerza externa: un *oscilador forzado*. El caso más sencillo (y también el más importante) es el de una fuerza periódica:

$$F(t) = F_0 \cos \omega_e t = \Re F_0 e^{-i\omega_e t} \quad (2.10)$$

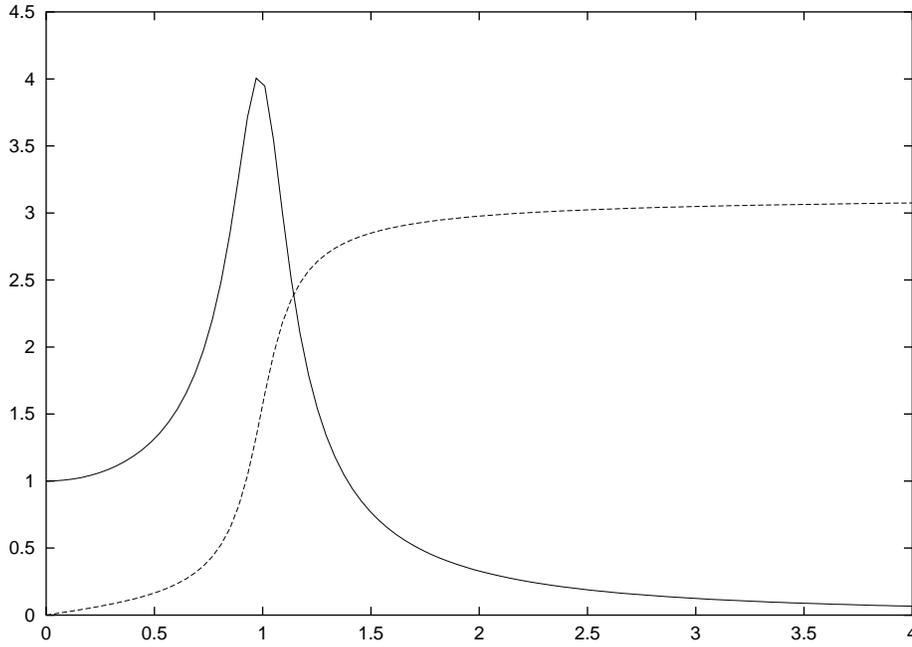


Figura 2.3: Amplitud y fase de la oscilación estacionaria

La ley dinámica se reduce a la ecuación:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 e^{-i\omega_e t} \quad (2.11)$$

en donde hemos usado la notación de la Sección 2.1.1 y además hemos introducido $a_0 = \frac{F_0}{m}$. Para resolver este problema usaremos el principio de superposición: buscaremos una solución particular de (2.11):

$$x_e = A_e e^{-i\omega_e t} \quad (2.12)$$

y la solución general será la suma de (2.12) y de la solución general de la ecuación homogénea (2.5). La solución particular describe el estado estacionario del sistema: la partícula “sigue” a la excitación externa, oscilando con la misma frecuencia. Sustituyendo (2.12) en (2.11) hallamos para la amplitud de oscilación:

$$A_e = \frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega_e^2 - 2i\lambda\omega_e} \quad (2.13)$$

El significado de esta ecuación se ve con mayor claridad si se expresa la amplitud compleja en forma polar:

$$A_e = C_e e^{-i\delta} \quad (2.14)$$

en donde $C_e = |A_e|$ es la amplitud del movimiento estacionario y δ se llama el desfase o corrimiento de fase:

$$C_e = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\lambda^2\omega_e^2}} \quad (2.15)$$

$$\tan \delta = \frac{2\lambda\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2} \quad (2.16)$$

La Figura 2.3 muestra la amplitud y fase típicas de un oscilador armónico forzado en el estado estacionario. La amplitud tiene un máximo cerca del punto $\omega_e \simeq \omega_0$, tiene un valor finito cuando $\omega_e = 0$ y tiende a cero cuando $\omega \rightarrow \infty$. El desfase δ es siempre negativo y varía entre 0 y $-\pi$ en el intervalo $(0, \infty)$. La respuesta de oscilador está retardada respecto de la excitación.

El sistema está en *resonancia* si $\omega = \omega_0$. La amplitud toma un valor grande si el amortiguamiento es pequeño:

$$C(\omega_0) = \frac{a_0}{2\lambda\omega_0}$$

Si no hay amortiguamiento la amplitud estacionaria es infinita. La noción de estado estacionario carece de sentido en este caso: el sistema absorbe continuamente energía de la fuente externa y su amplitud transitoria crece más allá de todo límite.

La energía promedio almacenada en el sistema es máxima en resonancia. Podemos calcularla con sencillez usando la ecuación (2.9):

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}m\omega_e^2 C^2 = \frac{1}{2} \frac{a_0\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\lambda^2\omega_e^2} \quad (2.17)$$

Esta función tiene un máximo cuando $\omega_e = \omega_0$ y la energía almacenada en resonancia es:

$$\langle E \rangle = \frac{a_0}{8\lambda^2}$$

En el estado estacionario la potencia absorbida por el sistema debe ser igual a la potencia disipada. Esta última es igual al trabajo realizado por la fuerza de roce por unidad de tiempo:

$$\frac{dE}{dt} = \mu\dot{x}^2$$

y la media en un periodo es:

$$\langle \dot{E} \rangle = \lambda \langle E \rangle$$

y por lo tanto λ representa el ritmo de absorción de energía por el sistema.

Los ejemplos de resonancia en la naturaleza son innumerables. Cualquier sistema físico capaz de oscilar entrará en resonancia si se le aplica una fuerza periódica con el mismo periodo que la frecuencia natural de oscilación.

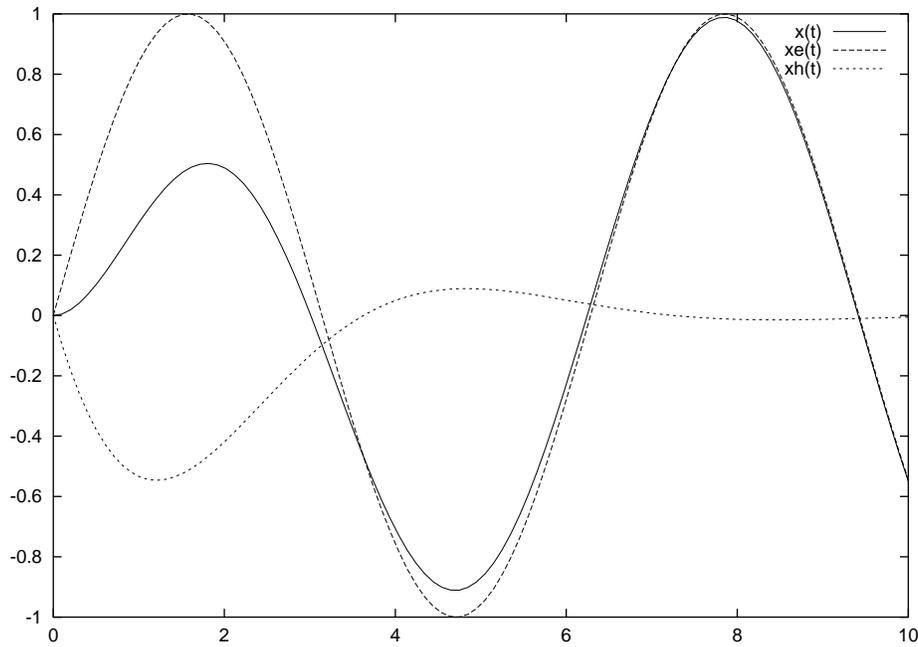


Figura 2.4: Trayectorias del oscilador forzado

La solución general de (2.11) la obtenemos aplicando el principio de superposición:

$$x(t) = x_h(t) + x_e(t) \quad (2.18)$$

en donde $x_h(t)$ es una solución de la ecuación homogénea (2.3), de la forma (2.5). Esta solución se denomina un *transitorio*. La solución (2.18) puede interpretarse como la superposición de un movimiento estacionario y uno transitorio (Figura 2.4).

Cuando la fuerza no es armónica, podemos usar el método anterior representándola como una superposición de fuerzas sinusoidales mediante la *integral de Fourier*:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) e^{-i\omega t} \quad (2.19a)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt F(t) e^{i\omega t} \quad (2.19b)$$

en donde $f(\omega)$ es la *transformada de Fourier* de $F(t)$. Gracias al principio de superposición, cada una de las componentes de la integral (2.19a) producirá una solución de la forma (2.12). Si introducimos la *función de transferencia*:

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega} \quad (2.20)$$

la solución particular de la ecuación de movimiento será:

$$x_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega H(\omega) f(\omega) e^{-i\omega t} \quad (2.21)$$

2.1.3. La función de Green

Examinemos el movimiento de un oscilador con un forzado arbitrario $F(t)$; buscaremos una solución general del problema sin usar la descomposición de Fourier (2.21). La ecuación de movimiento correspondiente:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = a(t) \quad (2.22)$$

en donde $a(t) = F(t)/m$ puede resolverse usando el principio de superposición para representar la aceleración externa de una forma adecuada. Examinaremos, en primer lugar, el movimiento del oscilador bajo la acción de un golpe seco (un “tincazo”); luego representaremos la fuerza $F(t)$ como una superposición de golpes.

Elegiremos nuestro “tincazo” como un *impulso unitario*; una fuerza tal que:

$$\Delta v = \int_0^{\tau} a(t) dt = 1 \quad (2.23)$$

en donde τ es un intervalo pequeño en el que actúa la fuerza.

Por ejemplo, una fuerza:

$$F(t) = m \begin{cases} \frac{v_0}{\tau} & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t < 0 \vee t > \tau \end{cases}$$

satisface (2.23) si $v_0 = 1$. En el límite en que $\tau \rightarrow 0$ el golpe se hace tan seco como sea posible, pero su intensidad, igual al área bajo la curva $F(t)$, se mantiene constante. En ese límite:

$$F(t) = m\delta(t) \quad (2.24)$$

en donde $\delta(t)$ es la “función delta” de Dirac:

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \quad (2.25a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.25b)$$

La “función δ ” no es una función, pues las propiedades (2.25) son contradictorias para funciones ordinarias, sino un objeto algo más general llamado *distribución*. Son lícitas todas las operaciones *lineales* sobre la δ : multiplicación por una función regular, integración, derivación. La propiedad fundamental de la “función” δ es la siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \quad (2.26)$$

en donde $f(t)$ es una función regular.

Se puede “demostrar” esta propiedad observando que la δ se anula fuera del origen y es posible reemplazar la integración sobre todo el eje real por una integral sobre el intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$. Puesto que la función $f(t)$ es regular podemos escribir:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(t)\delta(t)dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\eta) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)dt = f(0) \end{aligned}$$

De la misma manera se pueden probar otras propiedades de la “función” δ .

Consideremos ahora el movimiento del oscilador bajo la acción de una fuerza $\delta(t)$, suponiendo que está en reposo cuando recibe el golpe. La solución del problema planteado se llama la *función de Green* del sistema $G(t)$. La función de Green satisface la ecuación diferencial:

$$\ddot{G} + 2\lambda\dot{G} + \omega_0^2 G = \delta \quad (2.27)$$

con las condiciones iniciales:

$$G(0) = 0 \quad (2.28a)$$

$$\dot{G}(-\epsilon) = 0 \quad (2.28b)$$

Integrando (2.27) alrededor del origen hallamos:

$$G(+\epsilon) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} G(t)dt = 1 \quad (2.29)$$

es decir, que la velocidad tiene un “salto unidad” en $t = 0$.

Las condiciones anteriores definen la función de Green para $t > 0$. Para completar su definición al resto del tiempo, aplicaremos el *principio de causalidad*: el oscilador no debe moverse antes de recibir el golpe:

$$G(t) = 0 \quad t < 0$$

Es fácil ver que la función de Green para el oscilador es igual a:

$$G(t) = \frac{1}{\omega} e^{-\lambda t} \text{sen } \omega t \Theta(t) \quad (2.30)$$

en donde

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

es la *función de Heaveside*.

Ya en posesión de la función de Green se puede resolver el problema de una fuerza general. Descompongamos esta última en una secuencia de golpes:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

que es una simple consecuencia de (2.26).

Por el principio de superposición, la solución particular del problema es:

$$x_e(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)G(t - \tau)d\tau \quad (2.31)$$

En realidad, debido a la condición de causalidad, el límite superior de integración es t . Si la fuerza empieza a actuar en $t = 0$:

$$x_e(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F(\tau)G(t - \tau)d\tau \quad (2.32)$$

La solución general del problema se obtiene sumando una solución de la homogénea:

$$x(t) = x_h(t) + x_e(t) \quad (2.33)$$

cuyas constantes de integración deben elegirse para satisfacer las condiciones iniciales del problema.

Problemas 2.1

Problema 2.1.1.

Discutir el caso límite, (amortiguamiento crítico) en que las frecuencias características ω_{\pm} son iguales. Hallar la solución general y las constantes de integración en función de las condiciones iniciales.

Problema 2.1.2.

Probar las siguientes propiedades de la “función *delta*”:

1. $\delta(-x) = \delta(x)$
2. $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$
3. $\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x)|}\delta(x)$

Todas estas igualdades deben entenderse “en el sentido de las distribuciones”: la integral de ambos miembros, multiplicada por una función regular, deben ser iguales.

Problema 2.1.3.

La derivada de la “función δ ” se define por la regla de integración por partes:

$$\int f(x)\delta'(x)dx = - \int f'(x)\delta(x)dx$$

“Demostrar” las siguientes propiedades de la “ δ ”:

1. $\int f(x)\delta'(x)dx = -f'(0)$
2. $x\delta'(x) = -\delta(x)$
3. $\Theta'(x) = \delta(x)$

Problema 2.1.4 (Sismograma).

Un sismógrafo, que modelamos como un oscilador con frecuencia propia ω_0 y amortiguamiento crítico λ_0 , recibe una señal sísmica de la forma:

$$F_e = f_0 e^{-\lambda_e t} \text{sen}(\omega_e t)$$

Hallar la respuesta del sismógrafo usando:

1. La función de respuesta $H(\omega)$ y la transformada de Fourier de la señal.
2. La función de Green.

Problema 2.1.5.

Un gran péndulo se pone en movimiento aplicándole una fuerza constante F_0 durante un intervalo T y luego dejándolo libre. Hallar el movimiento del péndulo usando la función de Green.

2.2. Oscilaciones anarmónicas

Si bien el movimiento oscilatorio muy frecuente en la naturaleza, también es cierto que rara vez es armónico. Volviendo al ejemplo de movimiento cercano de un mínimo de potencial (Sección 2.1) el movimiento no es exactamente armónico, pues por lo general el potencial tiene términos de orden superior:

$$V(x) = V_0 + \frac{1}{2}V_0''(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}V_0'''(x - x_0)^3 + \dots$$

Estos términos son muy pequeños si la amplitud de oscilación es pequeña pero su importancia es muy grande si se quiere examinar el movimiento durante tiempos muy largos.

2.2.1. Términos seculares

Examinemos, en primer lugar, un método sencillo para resolver el problema de un oscilador perturbado:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon f(x, \dot{x}) \quad (2.36)$$

en donde ϵ es un parámetro que supondremos pequeño y el segundo miembro se llama la *fuerza perturbadora*.

Por ejemplo, la ecuación del oscilador amortiguado (2.3) pertenece a este tipo, con:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \lambda \\ f(x, \dot{x}) &= -2\dot{x} \end{aligned}$$

Propongámonos hallar una solución aproximada de la ecuación (2.36) por un método de aproximaciones sucesivas, aprovechando que el parámetro ϵ es pequeño. Sea

$$x^{(0)} = a \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (2.37)$$

la *solución de orden 0* de la ecuación diferencial, (que corresponde a $\epsilon = 0$) cuyas constantes de integración se han elegido para satisfacer las condiciones iniciales. Busquemos nuestra solución en la forma:

$$x = x^{(0)} + \epsilon x^{(1)} + \epsilon^2 x^{(2)} + \dots \quad (2.38)$$

que se suele llamar la *serie perturbativa*. Para hallar la perturbación de primer orden $x^{(1)}(t)$ sustituyamos la serie (2.38) en la ecuación diferencial (2.36) e igualemos entre sí los términos de orden ϵ de ambos miembros:

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) \quad (2.39)$$

En el segundo miembro de la ecuación diferencial sólo aparece la solución de orden 0 y es, por lo tanto, conocido. La solución de primer orden la hallamos usando, por ejemplo, la función de Green (2.30):

$$x^{(1)} = \int_0^t G(t - \tau) f[x^{(0)}(\tau), \dot{x}^{(0)}(\tau)] d\tau \quad (2.40)$$

Pese a su sencillez, este método esconde varias dificultades sutiles. Para encontrarlas, examinemos un problema concreto. El *oscilador de Duffing* (que representa un resorte con correcciones no lineales) está definido por:

$$f(x, \dot{x}) = -x^3 = a^3 \cos^3(\omega_0 t + \phi) \quad (2.41)$$

donde podemos observar que la perturbación es pequeña sólo si la amplitud a lo es.

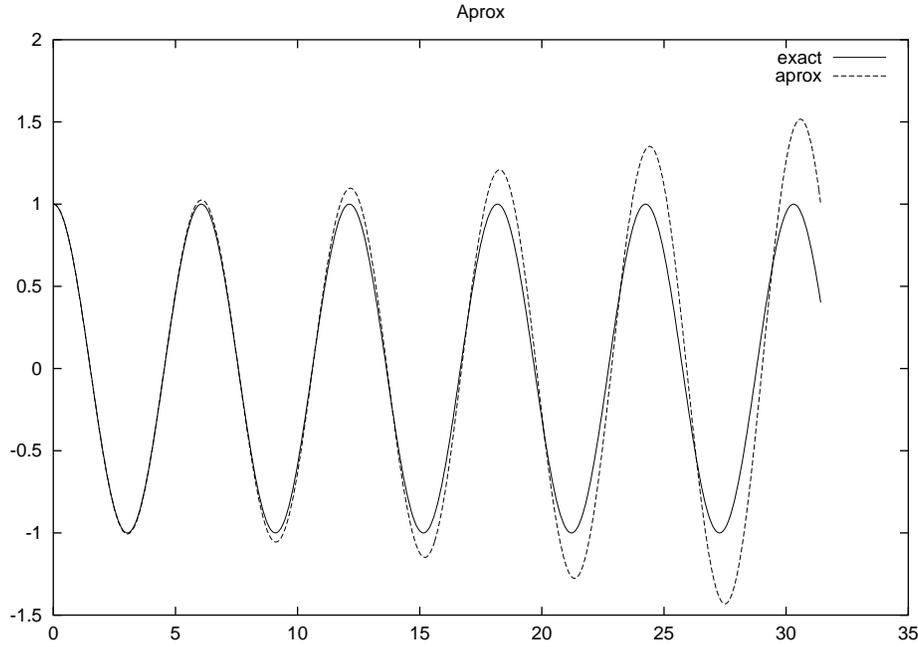


Figura 2.5: Oscilador anarmónico: solución perturbativa

Sustituyendo en (2.40) hallamos:

$$\begin{aligned}
 x^{(1)} = & -\frac{a^3}{32\omega_0^2} (6 \cos(\omega_0 t + \phi) - 6 \cos(\omega_0 t - \phi) + 2 \cos(\omega_0 t + 3\phi) \\
 & - \cos(\omega_0 t - 3\phi) - \cos(3\omega_0 t + 3\phi) + 12\omega_0 t \sin(\omega_0 t + \phi)) \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

La solución que hemos hallado es válida para amplitudes pequeñas y tiempos cortos. El último término se llama un *término secular*: crece indefinidamente con el tiempo (“crece con los siglos”) y hace fracasar el proceso perturbativo para tiempos largos (Figura 2.5). Si se rastrea su origen, se encuentra en la resonancia entre el oscilador no perturbado y la perturbación: el segundo miembro de (2.41) puede escribirse:

$$f(x, \dot{x}) = -\frac{a^3}{4} (3 \cos(\omega_0 t + \phi) + \cos 3(\omega_0 t + \phi)) \quad (2.43)$$

cuyo primer término tiene la misma frecuencia ω_0 que el oscilador.

El término secular puede interpretarse como originado en una pequeña corrección a la frecuencia:

$$\begin{aligned}
 \omega &= \omega_0 + \delta\omega \\
 \delta\omega &= \frac{3\epsilon a^2}{8\omega_0} \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

Veremos que esta interpretación es correcta.

2.2.2. El método de Bogoljubov-Krylov

Busquemos soluciones aproximadas de las ecuaciones de un oscilador perturbado, capaces de representar el movimiento durante intervalos de tiempo largos. El *método de Bogoljubov-Krilov* es una variante del *método de variación de las constantes*. La idea es muy sencilla. La solución de orden 0 de la ecuación diferencial (2.36) contiene dos constantes arbitrarias de integración: a y ϕ (cf. 2.37). Se puede describir el efecto de una pequeña perturbación reemplazando las constantes por funciones lentamente variables del tiempo:

$$x = a(t) \cos [\omega_0 t + \phi(t)] \quad (2.45)$$

que serán determinadas adecuadamente. Esta expresión de la solución contiene dos funciones incógnitas y para que el problema quede determinado se debe imponer alguna restricción sobre ellas. Exigiremos que la derivada de (2.45) con respecto del tiempo tenga la misma forma que para un oscilador armónico:

$$\dot{x} = -\omega_0 a(t) \operatorname{sen} [\omega_0 t + \phi(t)] \quad (2.46)$$

Derivando (2.45) e imponiendo la condición (2.46) hallamos la restricción:

$$\dot{a} \cos \psi - a \operatorname{sen} \psi \dot{\phi} = 0 \quad (2.47)$$

en donde hemos introducido la abreviatura $\psi(t) = \omega_0 t + \phi(t)$. Derivando (2.46) se encuentra:

$$\ddot{x} = -\omega_0 \dot{a} \operatorname{sen} \psi - \omega_0 a [\omega_0 + \dot{\phi}] \cos \psi \quad (2.48)$$

Finalmente, sustituyendo en (2.36):

$$\omega_0 \dot{a} \operatorname{sen} \psi + \omega_0 a \dot{\phi} \cos \psi = -\epsilon f(x, \dot{x}) \quad (2.49)$$

y de (2.47) y (2.49) se encuentra:

$$\dot{a} = -\frac{\epsilon}{\omega_0} f(x, \dot{x}) \operatorname{sen} \psi \quad (2.50a)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\epsilon}{a\omega_0} f(x, \dot{x}) \cos \psi \quad (2.50b)$$

en donde x y \dot{x} deben sustituirse por sus expresiones exactas (2.45) y (2.46).

Estas ecuaciones determinan la amplitud y fase del oscilador perturbado. Ambas funciones son lentamente variables en el tiempo, pues sus derivadas son de orden ϵ , pero las ecuaciones diferenciales son espantosamente complicadas y es necesario utilizar métodos aproximados de resolución. El método de aproximaciones sucesivas va a converger rápidamente en este caso pues los segundos miembros son pequeños. Se sustituye en los segundos miembros de las ecuaciones valores constantes a_0 y ϕ_0 y se integra para hallar correcciones $a_1(t)$ y $\phi_1(t)$. Luego se

sustituyen los valores corregidos de a y ϕ en el segundo miembro y se repite el proceso. Se obtienen así series:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 + \epsilon a_1(t) + \epsilon^2 a_2(t) + \dots \\ \phi(t) &= \phi_0 + \epsilon \phi_1(t) + \epsilon^2 \phi_2(t) + \dots \end{aligned}$$

que representan el comportamiento del sistema para tiempos cortos.

Pero si se desea estimar el comportamiento para tiempos largos es necesario ser mucho más cuidadoso. Comenzaremos por examinar en detalle la estructura de las ecuaciones (2.50). Tanto x como \dot{x} son funciones periódicas de la variable auxiliar ψ , que contiene explícitamente el tiempo. Por lo tanto, la perturbación $f(x, \dot{x})$ se puede representar como una serie de Fourier:

$$f(x, \dot{x}) = f_0 + f_{1c} \cos \psi + f_{1s} \sin \psi + f_{2c} \cos 2\psi + f_{2s} \sin 2\psi + \dots \quad (2.51)$$

Cuando esta representación se sustituye en las ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\epsilon}{2\omega_0} f_{1s} + \text{términos periódicos} \\ \dot{\phi} &= -\frac{\epsilon}{2a\omega_0} f_{1c} + \text{términos periódicos} \end{aligned}$$

Al sustituir valores constantes en el segundo miembro e integrar, los términos periódicos no originan dificultades: su amplitud será siempre de orden ϵ . En cambio, los términos constantes originan términos seculares, que dominan el comportamiento de la perturbación para tiempos largos. En la representación que estamos utilizando, el término secular en fase no causa dificultades:

$$\phi = \phi_0 + \epsilon \phi_1 t + \dots = \phi_0 + \delta \omega t + \dots \quad (2.52)$$

es una corrección a la frecuencia del oscilador no perturbado.

El término secular en la amplitud, en cambio, no tiene significado físico. Su eliminación requiere un procedimiento drástico: resolver exactamente las *ecuaciones promediadas sobre la variable ψ* :

$$\dot{a} = -\frac{\epsilon}{2\omega_0} f_{1s}(a) \quad (2.53a)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\epsilon}{2a\omega_0} f_{1c}(a) \quad (2.53b)$$

y esta es la *aproximación de Bogoljubov-Krylov*. A pesar de su aspecto complicado, este problema es mucho más sencillo que el original. La ecuación (2.53a) es de primer orden con variables separadas y tiene solución analítica:

$$\int \frac{da}{f_{1s}(a)} = -\frac{\epsilon}{2\omega_0} (t - t_0)$$

Una vez resuelta (2.53a), la solución $a_B(t)$ se sustituye en la ecuación (2.53b), que puede integrarse directamente para hallar $\phi_B(t)$.

La siguiente aproximación, la *aproximación de Bogoljubov-Krylov mejorada*, se obtiene sustituyendo las funciones $a_B(t)$ y ϕ_B en las ecuaciones (2.50). Estas ecuaciones se integran ahora fácilmente y proporcionan la solución mejorada.

2.2.3. Ejemplos

Apliquemos la aproximación de Bogoljubov-Krylov a un dos ejemplos de osciladores perturbados: el oscilador de Duffing, que ya hemos tratado en la Sección 2.2.1, y el oscilador de van der Pol.

El oscilador de Duffing

El oscilador de Duffing está caracterizado por la perturbación (2.41), que en nuestra notación podemos escribir:

$$f(x, \dot{x}) = -a^3 \cos^3 \psi = -\frac{a^3}{4} (\cos 3\psi + 3 \cos \psi) \quad (2.54)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (2.50) hallamos

$$\dot{a} = \epsilon \frac{a^3}{4\omega_0} \left(\sin 2\psi - \frac{1}{2} \sin 4\psi \right) \quad (2.55a)$$

$$\dot{\psi} = \epsilon \frac{a^2}{8\omega_0} (3 + 4 \cos 2\psi + \cos 4\psi) \quad (2.55b)$$

Las ecuaciones anteriores son exactas, pero tan complejas como la original. Las ecuaciones promediadas, en cambio, son muy sencillas:

$$\dot{a} = 0 \quad (2.56a)$$

$$\dot{\psi} = \frac{3\epsilon a^2}{8\omega_0} \quad (2.56b)$$

y muestran que no hay términos seculares en la amplitud y sólo hay una corrección a la frecuencia, igual a la sugerida en (2.44).

La aproximación de Bogoljubov-Krylov al oscilador de Duffing es, pues:

$$x_{BK} = a \cos(\omega t + \phi_0) \quad (2.57)$$

La Figura 2.6 compara la solución exacta del problema con la aproximación (2.57), para $\epsilon = 0,5$. Aún para este valor tan grande, las dos curvas tienen la misma amplitud y sólo difieren en la corrección de frecuencia. Es posible encontrar correcciones de orden superior para la misma.

La aproximación mejorada se obtiene sustituyendo la solución de (2.56b) en (2.55) e integrando. Los resultados difieren poco de la solución aproximada (2.57).

El oscilador de van der Pol

El oscilador de van der Pol (que aproxima el funcionamiento de osciladores de radio) satisface la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x} \quad (2.58)$$

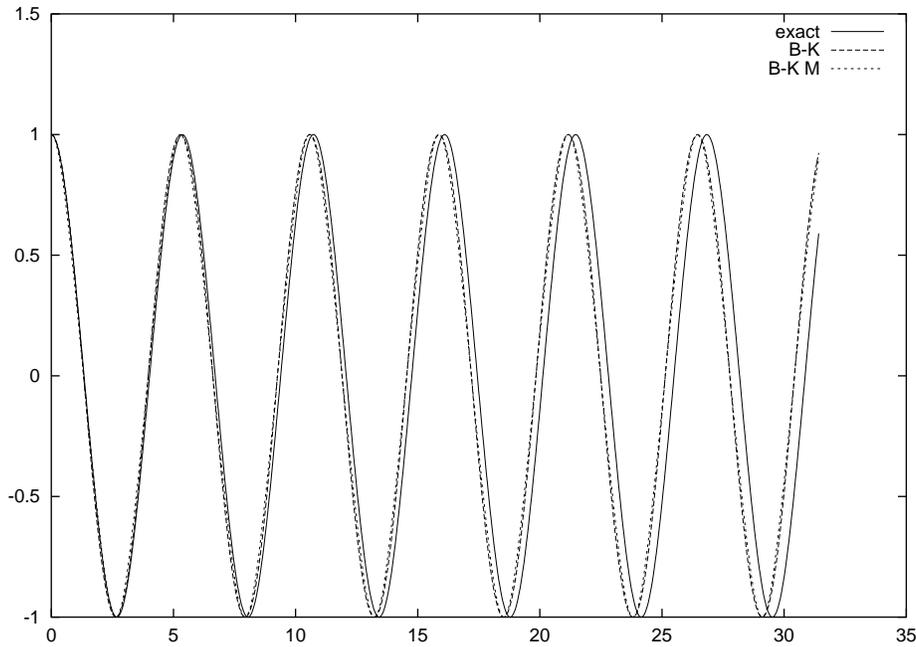


Figura 2.6: Oscilador anarmónico: Aproximación Bogoljubov-Krylov

El segundo miembro de esta ecuación representa una resistencia no lineal, y negativa para pequeñas amplitudes de oscilación. El sistema absorbe energía de una fuente externa cuando $x < 1$ y la disipa cuando $x > 1$. La perturbación correspondiente es:

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}) &= (1 - x^2)\dot{x} \\ &= -a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \sin \psi - \frac{a^3}{4} \sin 3\psi \end{aligned}$$

El primer término es resonante y hallamos la aproximación de Bogoljubov-Krylov:

$$\dot{a} = \frac{\epsilon}{2} a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \quad (2.59a)$$

$$\dot{\psi} = 0 \quad (2.59b)$$

En esta aproximación, la fase del oscilador no se altera y tampoco su frecuencia. La amplitud, por otra parte, es una función monótona del tiempo, cuyo valor asintótico es 2:

$$a(t) = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{a_0^2 - 4}{a_0^2} \exp(-\epsilon t)}} \quad (2.60)$$

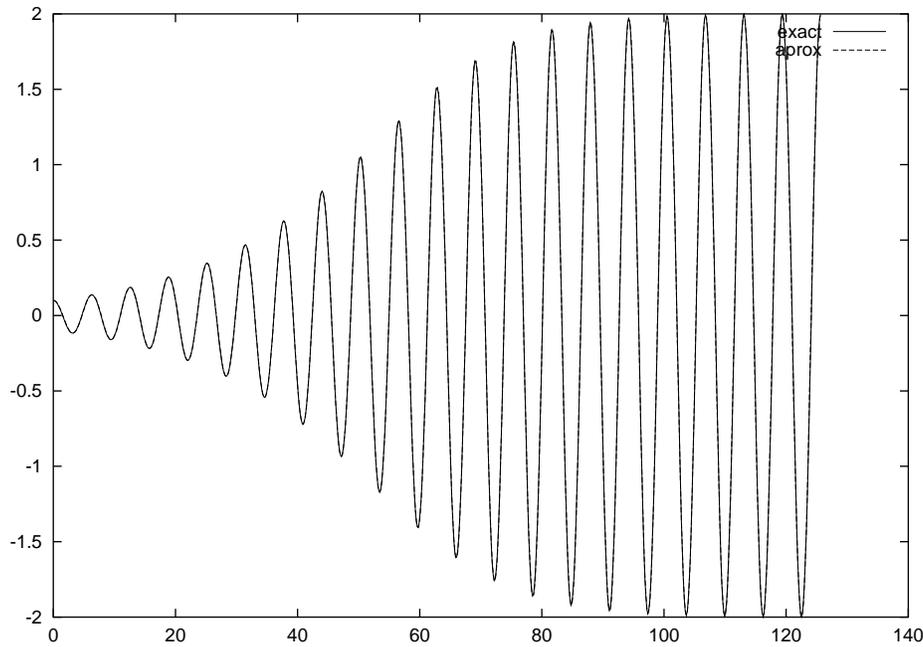


Figura 2.7: Oscilador de van der Pol: Aproximación Bogoljubov-Krylov

Cualquiera sea la amplitud inicial a_0 el oscilador tiende a un estado asintótico cuya frecuencia es ω_0 y su amplitud es constante (igual a 2 con las unidades elegidas).

La Figura 2.7 compara la solución exacta del problema con la solución aproximada:

$$x_{BK} = a(t) \cos t \quad (2.61)$$

La concordancia entre ambas es muy buena, incluso para tiempos muy largos.

Problemas 2.2

Problema 2.2.1.

Hallar una solución aproximada para el oscilador armónico amortiguado, válida para tiempos cortos, usando la teoría de perturbaciones simple.

Problema 2.2.2.

Lo mismo, para el oscilador de van der Pol.

Problema 2.2.3.

Aplicar el método de Bogoljubov-Krylov al oscilador armónico amortiguado.

Problema 2.2.4.

Lo mismo, para el oscilador de Duffing amortiguado.

Problema 2.2.5.

El *oscilador de Raleigh* describe aproximadamente las vibraciones de un diapasón excitado externamente:

$$\ddot{x} - \epsilon(\dot{x}) + x = 0$$

Hallar una solución aproximada en la aproximación de Bogoljubov-Krylov.

2.3. Sistemas dinámicos autónomos

Cuando las alinealidades de un oscilador son grandes, no existe un método general para hallar soluciones aproximadas a su comportamiento. La evolución local (durante intervalos breves) puede estudiarse de muchas maneras (por ejemplo, usando el desarrollo en serie de Taylor de la solución) pero el comportamiento del sistema para tiempos largos no puede analizarse, por lo general, con estos métodos.

La teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales se propone, por el contrario, estudiar cualitativamente el comportamiento asintótico de un sistema unidimensional cuando $t \rightarrow \infty$. Las ideas involucradas son muy sencillas.

Tanto las ecuaciones del movimiento unidimensional en la forma newtoniana:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m}F(x, v, t)\end{aligned}$$

como las ecuaciones Bogoljubov-Krylov:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -\frac{\epsilon}{\omega_0}f_{1s}(a, \phi) \\ \dot{\phi} &= -\frac{\epsilon}{a\omega_0}f_{1c}(a, \phi)\end{aligned}$$

son casos particulares del sistema general de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = f(x, y, t) \tag{2.62a}$$

$$\dot{y} = g(x, y, t) \tag{2.62b}$$

en donde (x, y) son las *variables de estado* del sistema, el plano (x, y) se llama el *espacio de estados* y f y g son funciones arbitrarias, que definen el *sistema dinámico*. Esta nomenclatura es general, inspirada en la existencia de numerosas analogías de sistemas electrónicos, químicos o biológicos con sistemas dinámicos. Un ejemplo sencillo de estos últimos es el *modelo de Lotka-Volterra* para el comportamiento de predadores y presas en un sistema ecológico:

$$\dot{N}_1 = r_1N_1 - \gamma_1N_1N_2 \tag{2.63a}$$

$$\dot{N}_2 = \gamma_2N_1N_2 - d_2N_2 \tag{2.63b}$$

en donde N_1 y N_2 son los números de presas y predadores, respectivamente, r_1 es la tasa de nacimientos de las presas, γ_1 es la tasa de muerte por depredación, γ_2 la de crecimiento por predación y d_2 la tasa de muerte de los predadores.

Otro ejemplo, un modelo muy idealizado de un oscilador de radio, es el *modelo de Poincaré*, definido por el siguiente par de ecuaciones diferenciales.

$$\dot{x} = -\omega y + \alpha x - \beta(x^2 + y^2)x \quad (2.64a)$$

$$\dot{y} = \omega x + \alpha y - \beta(x^2 + y^2)y \quad (2.64b)$$

2.3.1. Puntos de equilibrio

En esta sección nos limitaremos a los *sistemas dinámicos autónomos*, para los que f y g no dependen explícitamente del tiempo:

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (2.65a)$$

$$\dot{y} = g(x, y) \quad (2.65b)$$

Para estos sistemas, existe una teoría general que vamos a resumir. El comportamiento del sistema a tiempos grandes, tanto en el pasado como en el futuro, puede estimarse considerando las *propiedades topológicas* del movimiento en el espacio de estados. Estas propiedades pueden estudiarse analizando haces de trayectorias que correspondan a disinttas condiciones iniciales.

Sea $(x(t), y(t))$ la solución de las ecuaciones (2.3), con condiciones iniciales (x_0, y_0) . Esta solución describe una curva particular en el plano de estados (x, y) . Sin embargo, dicha solución es también una función de las condiciones iniciales (x_0, y_0) . Se puede utilizar este hecho para estudiar en forma global el movimiento descrito por el sistema dinámico. La familia de trayectorias generadas por el sistema dinámico puede imaginarse como las líneas de corriente de un fluido y suele recibir el nombre de *flujo* generado por el sistema.

Las propiedades del flujo están determinadas por la existencia de puntos especiales, los *puntos singulares* o *puntos de equilibrio* de las ecuaciones (2.65a), que dominan el comportamiento asintótico de las soluciones.

Un punto de equilibrio x_0, y_0 del sistema dinámico es un punto en que:

$$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0 \quad (2.66)$$

Obviamente, si en $t = 0$ el sistema se encuentra en un punto de equilibrio, permanece en el mismo. Pero además, los puntos de equilibrio tienen otra propiedad importante: son los únicos puntos en los que las curvas integrales (o también, *líneas de flujo*) pueden cruzarse. En efecto, la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es única, excepto en los puntos singulares del sistema. Por lo tanto, dos curvas integrales en el espacio de estados no pueden cruzarse, ya que por cada punto del espacio de estados (excepto los puntos de equilibrio) pasa una única solución.

Examinemos ahora el comportamiento del sistema en el entorno de un punto de equilibrio. Sea (ξ, η) un pequeño apartamiento del punto de equilibrio:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \xi \\y &= y_0 + \eta\end{aligned}$$

Si se desarrollan las funciones f y g en el entorno del punto de equilibrio se halla:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= a\xi + b\eta + O(\xi^2, \eta^2, \xi\eta) \\g(x, y) &= c\xi + d\eta + O(\xi^2, \eta^2, \xi\eta)\end{aligned}$$

y finalmente, sustituyendo en las ecuaciones de movimiento y reteniendo términos de primer orden:

$$\dot{\xi} = a\xi + b\eta \quad (2.67a)$$

$$\dot{\eta} = c\xi + d\eta \quad (2.67b)$$

Estas ecuaciones para pequeños apartamientos del punto de equilibrio se llaman las *ecuaciones variacionales* del sistema. Como los coeficientes a, \dots, d son constantes, examinaremos sus soluciones con el método de d'Álembert:

$$\xi = \xi_0 e^{rt} \quad (2.68a)$$

$$\eta = \eta_0 e^{rt} \quad (2.68b)$$

Sustituyendo en (2.67) se encuentra:

$$r\xi_0 = a\xi_0 + b\eta_0 \quad (2.69a)$$

$$r\eta_0 = c\xi_0 + d\eta_0 \quad (2.69b)$$

Éste es un sistema lineal homogéneo que tendrá solución distinta de la trivial si y sólo si el determinante de los coeficientes se anula:

$$(a - r)(d - r) = cb \quad (2.70)$$

y por lo tanto hay dos raíces r_1, r_2 que determinan soluciones linealmente independientes del sistema variacional.

Las soluciones de la ecuaciones variacionales se encuentran con el principio de superposición como combinaciones lineales de las soluciones básicas:

$$\xi = \xi_1 e^{r_1 t} + \xi_2 e^{r_2 t} \quad (2.71a)$$

$$\eta = \eta_1 e^{r_1 t} + \eta_2 e^{r_2 t} \quad (2.71b)$$

en donde los coeficientes están ligados por la relación:

$$\eta_i = \frac{c}{r_i - d} \xi_i \quad i = 1, 2$$

El comportamiento del sistema físico depende de la naturaleza de las raíces y se presentan aquí tres casos diferentes.

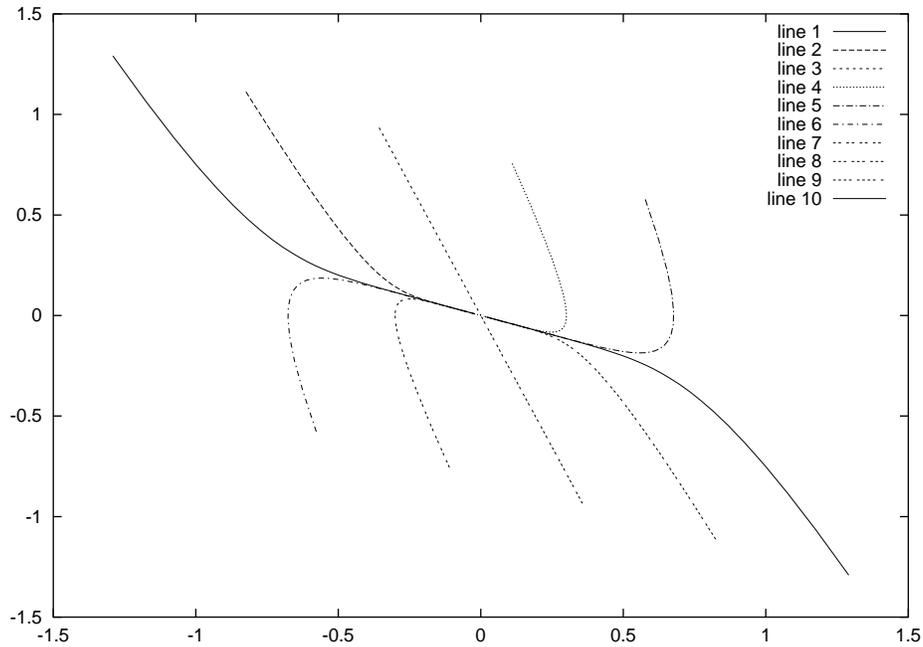


Figura 2.8: Sistema dinámico: nodo en el espacio de estados

Raíces reales y del mismo signo

El punto de equilibrio se llama *nodo*. Es *estable* o *atractivo* cuando las raíces son negativas e *inestable* o *repulsivo* cuando son positivas.

La Figura 2.8 muestra cualitativamente ejemplos de curvas integrales cercanas a un nodo en el espacio de estados. Estas curvas representan la sucesión de estados del sistema a lo largo del tiempo: el flujo generado por el sistema. Las curvas forman un haz que pasa por el punto singular. El punto que representa el estado se acerca al mismo si el nodo es estable y se aleja si es inestable. Para grandes tiempos, domina la raíz de menor módulo, r_1 y las curvas tienen como tangente común a la recta:

$$\eta = \frac{c}{r_1 - d} \xi \quad (2.72)$$

El oscilador armónico sobreamortiguado es un sistema que tiene un nodo en el origen de su espacio de estados x, v . Sus curvas variacionales (que coinciden con las trayectorias de estado exactas, pues es lineal) tiene la forma de la Figura 2.8.

Raíces reales de signos opuestos

El punto singular se llama *punto de ensilladura* o, informalmente, *montura*. En este caso una de las exponenciales crece y la otra decrece. Las curvas integrales, en

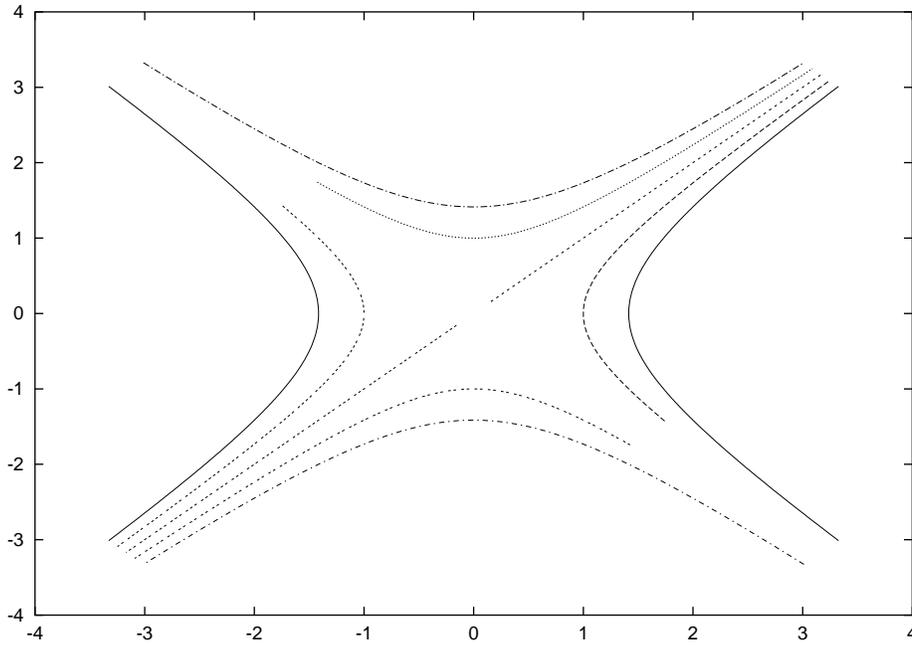


Figura 2.9: Sistema dinámico: montura en el espacio de estados

general, no pasan por el origen. Las excepciones son las curvas correspondientes a $(\xi_1, \eta_1) = 0$ y a $\xi_2, \eta_2 = 0$, que son rectas de la forma (2.72). Por lo general, la recta que corresponde a $r_1 > 0$ se llama la *dirección inestable* mientras que la otra es la *dirección estable*.

Las demás curvas son hipérbolas, con las rectas como asíntotas. La Figura 2.9 muestra algunas de las curvas de estado.

Un punto de esilladura describe el movimiento en las cercanías de un máximo del potencial, tal como el punto F en la Figura 1.13.

Raíces complejas conjugadas

Este caso es análogo al oscilador armónico amortiguado. Si $r_{\pm} = -\lambda + i\omega$, la solución puede escribirse:

$$\xi = Ce^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi) \quad (2.73a)$$

$$\eta = De^{-\lambda t} \sin(\omega t + \psi) \quad (2.73b)$$

El foco es estable si $\lambda > 0$ e inestable en caso contrario. Las curvas de estado tienen la forma de espirales logarítmicas alrededor del foco, tal como el ejemplo de la Figura 2.10.

El caso particular $\lambda = 0$ se llama un *centro*. Las curvas integrales son elipses con centro en el punto singular (Figura 2.11). Los sistemas conservativos tienen

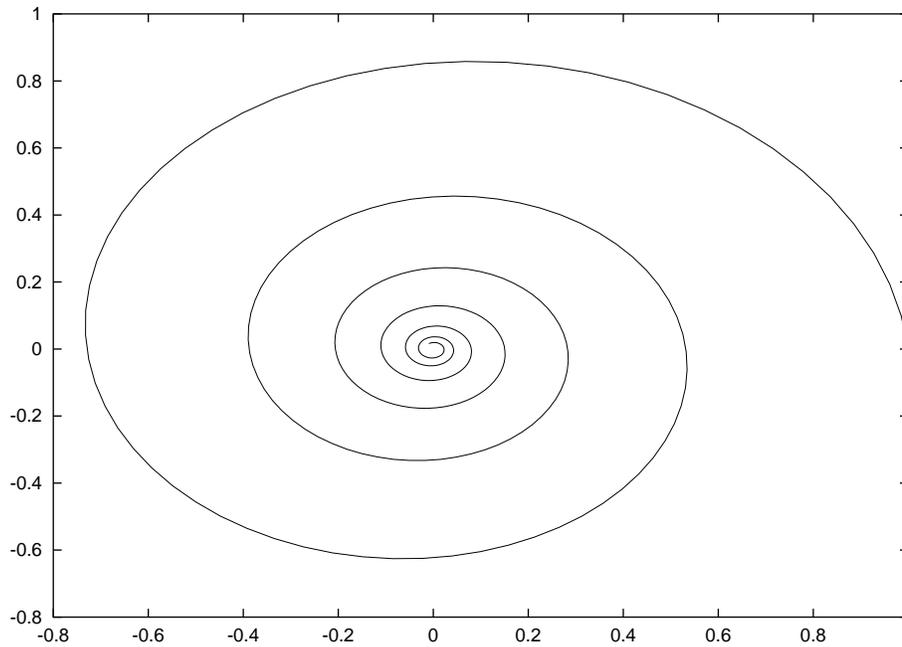


Figura 2.10: Sistema dinámico: foco en el espacio de estados

centros como puntos de equilibrio.

Estamos ahora en condiciones de describir cualitativamente el movimiento descrito por el sistema dinámico (2.65a) y (2.65b): se comporta como un fluido que manase de los puntos de equilibrio inestable para sumirse en los puntos de equilibrio estable.

2.3.2. Ciclos límite

Los puntos singulares no son los únicos objetos geométricos en el espacio de estados que controlan el comportamiento asintótico de un sistema unidimensional. Hay también curvas cerradas, llamadas *ciclos límite*, que pueden ser el límite asintótico de un sistema dinámico. El oscilador de van der Pol, (2.58), es un ejemplo sencillo.

Los únicos puntos singulares del sistema son el origen y el punto en el infinito. Ambos son focos repulsivos. Las curvas integrales son espirales que se acercan a la curva cerrada:

$$x^2 + v^2 = 2$$

que es un ciclo límite. Esta curva es una solución periódica del sistema y todas las curvas integrales tienden asintóticamente a enrollarse a su alrededor, desde afuera y desde adentro, cuando $t \rightarrow \infty$.

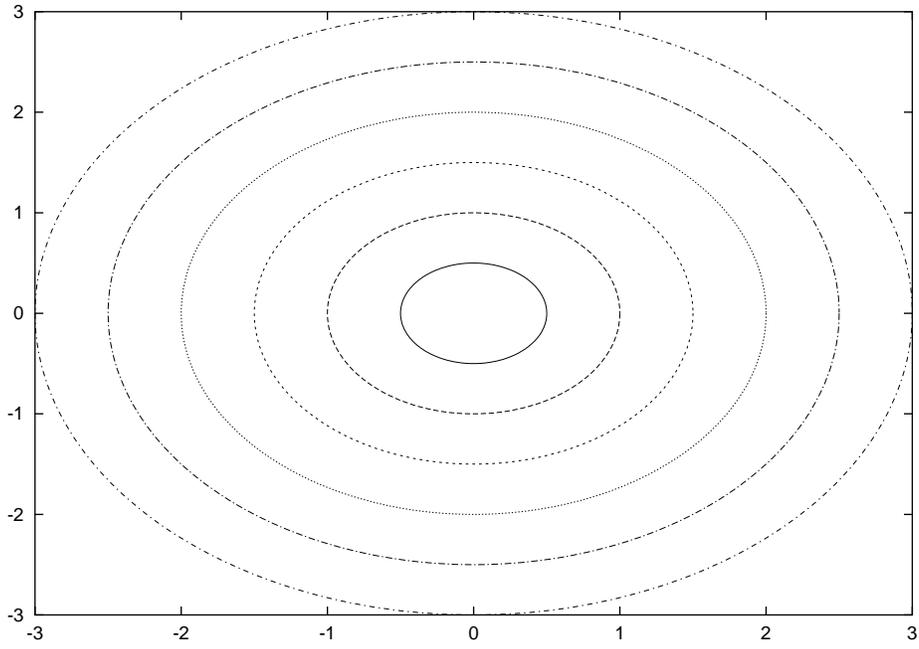


Figura 2.11: Sistema dinámico: centro en el espacio de estados

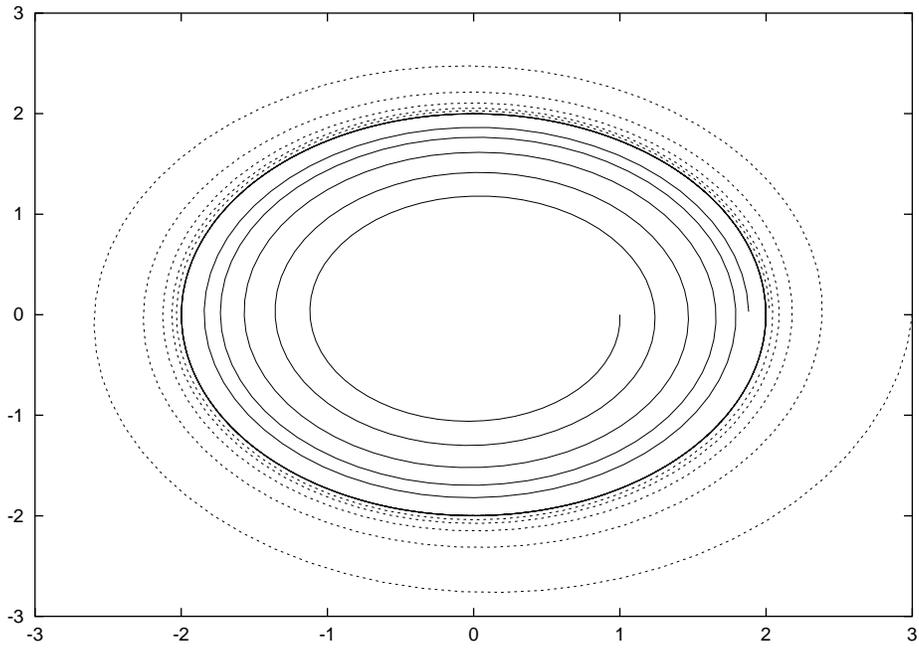


Figura 2.12: Sistema dinámico: ciclo en el espacio de estados

La existencia de ciclos límites es común en las ecuaciones diferenciales que describen circuitos generadores de onda. Un reloj, mecánico o digital, es otro sistema que posee ciclos límite.

Examinemos el comportamiento de un sistema en estados cercanos a un ciclo límite. Sean $x_0(t)$ e $y_0(t)$ las coordenadas del punto representativo del sistema sobre el ciclo límite. Estas funciones describen una curva cerrada y deben ser periódicas con periodo $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Para estados cercanos al ciclo límite, las coordenadas del punto representativo pueden escribirse:

$$x(t) = x_0(t) + \xi(t) \quad (2.74a)$$

$$y(t) = y_0(t) + \eta(t) \quad (2.74b)$$

Sustituyamos estas expresiones en (2.62), desarrollemos en serie de Taylor en ξ y η , reteniendo términos lineales, para obtener:

$$\dot{\xi} = a(t)\xi + b(t)\eta \quad (2.75a)$$

$$\dot{\eta} = c(t)\xi + d(t)\eta \quad (2.75b)$$

en donde las funciones $a(t), \dots, d(t)$ son funciones periódicas de t con periodo T_0 .

Si $(\xi(t), \eta(t))$ es una solución de las ecuaciones anteriores, también lo será $(\xi(t+T_0), \eta(t+T_0))$. Sean (ξ_1, η_1) y (ξ_2, η_2) dos soluciones independientes del sistema. Por el principio de superposición:

$$\xi_1(t+T_0) = A\xi_1(t) + B\xi_2(t) \quad (2.76a)$$

$$\xi_2(t+T_0) = C\xi_1(t) + D\xi_2(t) \quad (2.76b)$$

Los coeficientes A, \dots, D dependen de las soluciones. Las funciones η satisfacen ecuaciones análogas con los mismos coeficientes. Podemos simplificar las ecuaciones (2.76a) si elegimos soluciones $\tilde{\xi} = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2$ que se transformen con sencillez bajo translaciones temporales de un periodo:

$$\tilde{\xi}(t+T_0) = (A\alpha + C\beta)\xi_1 + (B\alpha + D\beta)\xi_2 = k\tilde{\xi}(t) \quad (2.77)$$

El segundo miembro se reduce a un múltiplo de $\tilde{\xi}$ si:

$$A\alpha + C\beta = k\alpha \quad (2.78a)$$

$$B\alpha + D\beta = k\beta \quad (2.78b)$$

Éste es un sistema lineal homogéneo que tendrá solución distinta de la trivial si y sólo si el determinante de los coeficientes se anula, lo que ocurre para dos valores de k . Sean $k_{1,2}$ estas raíces e introduzcamos los *exponentes característicos* como:

$$k_i = e^{\mu_i T_0} \quad (2.79)$$

Estos exponentes juegan un papel análogo a los exponentes r en el entorno de los puntos de equilibrio. La función:

$$\phi(t) = e^{-\mu t} \tilde{\xi}$$

es periódica con periodo T_0 pues:

$$\phi(t + T_0) = e^{-\mu(t+T_0)} e^{\mu T_0} \tilde{\xi}(T_0) = \phi(t)$$

y por lo tanto existen dos soluciones linealmente independientes del sistema variacional (2.75):

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_1 &= e^{\mu_1 t} \phi_1(t) & \tilde{\xi}_2 &= e^{\mu_2 t} \phi_2(t) \\ \tilde{\eta}_1 &= e^{\mu_1 t} \phi_1(t) & \tilde{\eta}_2 &= e^{\mu_2 t} \phi_2(t) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Éstas son generalizaciones de las soluciones exponenciales que describen el comportamiento en el entorno de un punto crítico. El comportamiento de las soluciones depende de los exponentes característicos μ_i .

1. Si las partes reales de μ_i son negativas, los apartamientos (ξ, η) decrecen con el tiempo y las soluciones se acercan al ciclo límite. Se dice que éste *atrae* a las soluciones o que es un *atractor*. Es análogo a los puntos de equilibrio estables.
2. Si alguna de las raíces tiene parte real positiva, el ciclo límite es inestable o *repulsor*.

Podemos completar nuestra imagen sobre el movimiento: el flujo generado por el sistema dinámico también puede manar de ciclos límite inestables y absorberse en ciclos límite estables. Éstos últimos se comportan como canales por donde circula el fluido atrapado.

Problemas 2.3

Problema 2.3.1.

Mostrar que los puntos de equilibrio de un sistema conservativo son centros o puntos de ensilladura.

Problema 2.3.2.

Hallar los puntos fijos del modelo de Lotka-Volterra y mostrar que son centros.

Problema 2.3.3.

Un modelo esquemático de reloj se obtiene de la siguiente manera: un oscilador armónico amortiguado recibe golpes cuando pasa por el origen con velocidad positiva.

1. Hallar la ecuación diferencial del sistema.

2. Mostrar que oscila en un ciclo límite.

Problema 2.3.4.

Hallar la solución analítica del modelo de Poincaré y mostrar que si $\alpha > 0$ oscila en un ciclo límite.

Sugestión: Escribir las ecuaciones en coordenadas polares en el plano $\langle x, y \rangle$.

2.4. Osciladores anarmónicos forzados

Cuando un oscilador alineal se excita con una fuerza externa periódica, aparece un conjunto de fenómenos nuevos que no pueden ser examinados con las técnicas que hemos estudiado hasta ahora.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon f(x, \dot{x}, t) \tag{2.81}$$

en donde:

$$f(x, \dot{x}, t) = f(x, \dot{x}, t + T_e) \tag{2.82}$$

La fuerza externa, aparte de su periodicidad, es completamente arbitraria. Sin embargo, dos modelos sencillos de fuerza externa tienen mucha importancia en las aplicaciones: la *fuerza sinusoidal*:

$$f(x, \dot{x}, t) = f_0(x, \dot{x}) + f_e(x, \dot{x}) \cos \omega_e t \tag{2.83}$$

y el *impulso periódico*, representados por una *delta periódica*:

$$f(x, \dot{x}, t) = f_0(x, \dot{x}) + f_e(x, \dot{x}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) \tag{2.84}$$

A pesar de su riqueza y complejidad, estos fenómenos nuevos tienen una estructura universal común a todos los sistemas no lineales en una dimensión. Comenzaremos examinando, entre los fenómenos nuevos, el de sincronización con la frecuencia de la fuerza externa y en la sección siguiente analizaremos el comportamiento irregular de los mismos.

2.4.1. Denominadores pequeños

Apliquemos el método de Bogoljubov-Krylov a la ecuación (2.81) y llegaremos a las ecuaciones:

$$\dot{a} = -\frac{\epsilon}{\omega_0} f(x, \dot{x}, t) \operatorname{sen}(\psi) \tag{2.85a}$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\epsilon}{a\omega_0} f(x, \dot{x}, t) \operatorname{cos}(\psi) \tag{2.85b}$$

en donde $\psi = \omega_0 t + \phi$. Estas ecuaciones son exactas y complicadas pero el paso siguiente, simplificarlas con una aproximación similar a la Bogoljubov-Krylov, no es fácil de dar. Para comprender el origen de la dificultad, procedamos como antes, desarrollando f en serie de Fourier:

$$f(x, \dot{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^c(t) \cos n\psi + f_n^s(t) \operatorname{sen} n\psi \quad (2.86)$$

Pero ahora los coeficientes f_n son funciones periódicas del tiempo, que también pueden desarrollarse en serie de Fourier:

$$f_n^c(t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{mn}^{cc} \cos m\psi_e + f_{mn}^{cs} \operatorname{sen} m\psi_e$$

$$f_n^s(t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{mn}^{sc} \cos m\psi_e + f_{mn}^{ss} \operatorname{sen} m\psi_e$$

Si sustituimos estas expresiones en (2.86) encontramos para la fuerza externa un desarrollo de la forma:

$$f(x, \dot{x}, t) = \sum_{m,n} f_{m,n} \cos [(n\omega_0 + m\omega_e)t + \phi_{n,m}] \quad (2.87)$$

Para hallar soluciones asintóticas de (2.85) es necesario resolver exactamente las ecuaciones promediadas, pues de otra manera los términos seculares arruinarían el comportamiento asintótico de la solución. Pero al efectuar el promedio, hay que tener en cuenta los términos de la serie (2.87) que cumplen la *condición de resonancia*:

$$n\omega_0 + m\omega_e \ll \omega_0 \quad (2.88)$$

términos que aparecen porque m corre, en (2.87) sobre valores positivos y negativos.

Dichos términos se llaman *términos resonantes* de la ecuación diferencial y originan dificultades parecidas a los términos seculares: el argumento correspondiente será una función lentamente variable del tiempo y para poder hallar una solución confiable de las ecuaciones promediadas es necesario tenerlos en cuenta. En efecto, supongamos que resolvemos únicamente las ecuaciones promediadas (2.53). La aproximación mejorada se obtiene sustituyendo estas soluciones en (2.85) e integrando. La solución tendrá la forma:

$$a(t) = -\frac{\epsilon}{\omega_0} \sum_{m,n} \frac{g_{m,n}}{n\omega_0 + m\omega_e} \operatorname{sen} [(n\omega_0 + m\omega_e)t + \phi'_{n,m}] \quad (2.89)$$

en donde los coeficientes g y las fases ϕ' son combinaciones de las f y ϕ .

A diferencia de los osciladores lineales, existen resonancias con frecuencias distintas de la fundamental. Como casos particulares mencionemos las resonancias *armónicas*, con

$$\omega_e = n\omega_0$$

y las resonancias *subarmónicas*:

$$\omega_e = \frac{1}{n}\omega_0$$

En los denominadores de (2.89) aparecen las cantidades $n\omega_0 + m\omega_e$ que pueden hacerse muy pequeñas (o anularse) en los términos resonantes. Los términos correspondientes de la serie serán muy grandes. Como cualquier número real puede aproximarse por números racionales con error arbitrariamente pequeño δ :

$$\left| \frac{\omega_0}{\omega_e} - \frac{m}{n} \right| < \delta$$

los denominadores serán arbitrariamente pequeños y la serie resultante no será necesariamente convergente. Este es el problema de los *denominadores pequeños*, que hace dudosa (y aún inválida) la teoría de perturbaciones. En efecto, aunque el correspondiente coeficiente $g_{m,n}$ sea pequeño, la contribución del término a la suma de la serie puede hacerse muy grande para tiempos del orden de

$$T_r = \frac{2\pi}{n\omega_0 + m\omega_e}$$

Sin embargo, si ϵ es suficientemente pequeño, los enteros m, n son suficientemente grandes y los coeficientes $g_{m,n}$ decrecen suficientemente rápido, la serie (2.89) representa aproximadamente el movimiento del oscilador forzado durante un tiempo largo. La solución representa una amplitud y una fase lentamente variables en el tiempo, sobre las que se superponen términos periódicos de pequeña amplitud. Como ω_e no es múltiplo racional de ω_0 , las funciones resultantes serán *cuasiperiódicas*: combinaciones lineales de términos periódicos con frecuencias linealmente independientes.

2.4.2. Sincronización

Un fenómeno nuevo que se presenta en los osciladores no lineales es la *sincronización* entre el sistema y la frecuencia externa que ocurre cuando se cumple la condición de resonancia: existe un intervalo de frecuencias $\omega_e \approx \frac{n}{m}\omega_0$ en el cual el sistema oscila con frecuencia igual a la externa.

Examinemos con más cuidado lo que ocurre, utilizando las ecuaciones (2.85a) y (2.85b). Para efectuar el promedio, es necesario tener en cuenta no sólo los términos seculares sino también los resonantes. Introduzcamos la *diferencia de fase resonante*:

$$\theta = \psi - \frac{m}{n}\omega_e t = \phi + \left(\omega_0 - \frac{m}{n}\omega_e\right)t \quad (2.90)$$

y conservemos al promediar los términos constantes y los que contengan sólo múltiplos de θ . La aproximación Bogoljubov-Krylov generalizada es:

$$\dot{a} = -\frac{\epsilon}{\omega_0} f_{1s}(a, \theta) \quad (2.91a)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\epsilon}{a\omega_0} f_{1c}(a, \theta) \quad (2.91b)$$

y esta última también puede escribirse:

$$\dot{\theta} = -(\omega_0 - \frac{m}{n}\omega_e) - \frac{\epsilon}{a\omega_0} f_{1c}(a, \theta) \quad (2.91c)$$

Estas ecuaciones son más complicadas que la aproximación Bogoljubov-Krylov, pues los segundos miembros son funciones de las dos variables incógnitas: se trata de ecuaciones diferenciales acopladas que, por lo general, no tienen solución analítica. Sin embargo, son mucho más simples que la ecuación original y de su estudio pueden extraerse conclusiones cualitativas sobre el comportamiento asintótico del sistema. Como el sistema es autónomo se puede utilizar los resultados de la Sección 2.3 para analizarlo.

En un sistema físico las soluciones de (2.91) no pueden ser divergentes y estas ecuaciones deben tener atractores, ya sean puntos críticos o ciclos límites. Los puntos críticos son las soluciones de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{1s}(a, \theta) &= 0 \\ \frac{\epsilon}{a\omega_0} f_{1c}(a, \theta) &= -(\omega_0 - \frac{m}{n}\omega_e) \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} a &= a_0 \\ \theta &= \theta_0 \end{aligned}$$

son constantes. La fase de la oscilación tiene la forma:

$$\psi = \frac{m}{n}\omega_e t + \theta_0 \quad (2.92)$$

y por lo tanto las soluciones tienen exactamente la frecuencia de la oscilación externa. Se dice que la oscilación está sincronizada (o enganchada) con la frecuencia excitatriz.

Por otra parte, si el sistema está en un régimen oscilante (o si la amplitud de la solución estacionaria se anula) la oscilación es cuasiperiódica.

Examinemos brevemente el oscilador de Duffing forzado:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0 x + \mu x^3 = a_0 \cos \omega_e t \quad (2.93)$$

que, comparando con (2.81) proporciona:

$$f(x, \dot{x}, t) = \mathbf{a}_0 \cos \omega_e t - 2\lambda \dot{x} - \mu x^3 \quad (2.94)$$

y, sustituyendo la forma de Bogoljubov-Krylov para la solución:

$$f(x, \dot{x}, t) = 2\lambda\omega_0 a \sin \psi - \frac{\mu}{4} a^3 (3 \cos \psi + \cos 3\psi) + \mathbf{a}_0 \cos \omega_e t \quad (2.95)$$

En la primera aproximación aparecerá una resonancia sólo cuando $m = n = 1$. Sustituyendo $\theta = \phi + (\omega_0 - \omega_e)t$ hallamos la aproximación Bogoljubov-Krylov generalizada:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\lambda a - \frac{\mathbf{a}_0}{2\omega_0} \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \Delta\omega - \frac{3\mu a^2}{8\omega_0} + \frac{\mathbf{a}_0}{a\omega_0} \cos \theta \end{aligned}$$

Los puntos críticos de este sistema satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\lambda a &= \frac{\mathbf{a}_0}{2\omega_0} \sin \theta \\ \Delta\omega &= \frac{\mathbf{a}_0}{a\omega_0} \cos \theta \end{aligned}$$

Eliminando θ entre estas dos ecuaciones hallamos una ecuación cúbica para determinar el cuadrado de la amplitud:

$$a^2 \left[\left(\Delta\omega - \frac{3\mu a^2}{8\omega_0} \right)^2 + \lambda^2 \right] = \left(\frac{\mathbf{a}_0}{2\omega_0} \right)^2 \quad (2.96)$$

mientras que la fase de la oscilación satisface:

$$\tan \theta = -\frac{2\lambda}{\Delta\omega - \frac{3\mu a^2}{8\omega_0}} \quad (2.97)$$

La Figura 2.13 muestra la amplitud de la oscilación sincronizada como función de la frecuencia externa. La curva tiene dos ramas, a izquierda y derecha de la frecuencia de oscilación libre:

$$\omega = \omega_0 + \frac{3\mu a^2}{8\omega_0}$$

indicada con línea de puntos en la figura. Cuando la amplitud \mathbf{a}_0 del forzado externo es pequeña, existe una única raíz real de (2.96) y la curva una función uniforme de $\Delta\omega$; pero para amplitudes mayores la cúbica (2.96) tiene tres raíces reales y existen tres valores posibles de la amplitud.

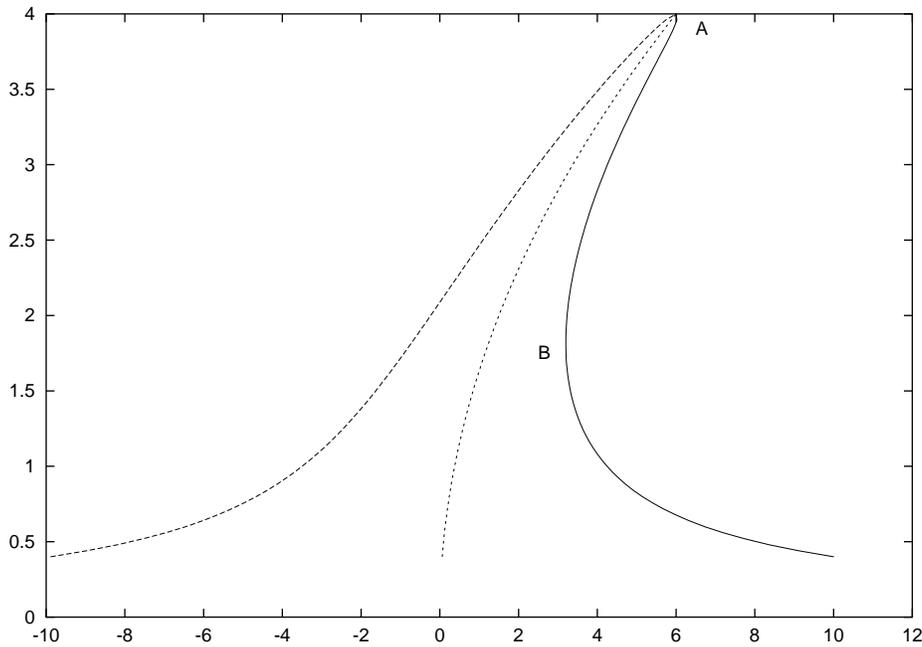


Figura 2.13: Osilador de Duffing forzado

En este último caso, el sistema presenta el fenómeno de *histéresis* cuando se varía lentamente la frecuencia externa. Es fácil probar que las raíces mayor y menor representan oscilaciones estables, mientras que la intermedia es inestable. Por lo tanto, el arco (A, B) de la figura representa estados inestables, mientras que los tramos (∞, A) y (B, ∞) representan estados estables. Si la frecuencia externa se incrementa *adiabáticamente* (es decir, tan lentamente que el sistema pueda “adaptarse” al cambio de frecuencia y su oscilación representarse con el estado estacionario), la amplitud crecerá hasta llegar al punto A y luego cambiará bruscamente (a través de una solución transitoria) para estabilizarse sobre la rama inferior de la curva. Si se decreta adiabáticamente ω_e desde un valor muy grande, el sistema se moverá a lo largo de la rama inferior de la curva hasta llegar al punto B , adonde saltará bruscamente a la rama superior.

Problemas 2.4

Problema 2.4.1.

Usando la aproximación Bogoljubov-Krylov, hallar las soluciones cuasiperiódicas de la ecuación de Duffing.

Problema 2.4.2.

Lo mismo, para la ecuación de van der Pol.

Problema 2.4.3.

Discutir la sincronización en la ecuación de van der Pol.

Problema 2.4.4.

Se aplica al oscilador de Poincaré una excitación externa en la forma:

$$\begin{aligned} f_x &= x \cos(\omega_e t) \\ f_y &= y \cos(\omega_e t) \end{aligned}$$

Hallar la solución de la ecuación y discutirla.

2.5. Mapas

Cuando la perturbación no es pequeña, la aproximación Bogoljubov-Krylov no es suficiente para estudiar el comportamiento asintótico del oscilador y el análisis debe hacerse con una generalización de los métodos topológicos estudiados en la Sección 2.3, que los hace aún más poderosos pero, en cambio, más cualitativos.

2.5.1. Mapas y dinámica

Introduzcamos primero la noción de un *mapa estroboscópico*. Si T es un intervalo cualquiera, para cada estado $\langle x(t), v(t) \rangle$ existe un único estado $\langle x(t + T), v(t + T) \rangle$. Esta función define una transformación del plano de las fases sobre sí mismo, que se llama el mapa estroboscópico. Por lo general, las coordenadas en el plano de estados pueden escribirse como ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} x(t + T) &= f[x(t), v(t), t] \\ v(t + T) &= g[x(t), v(t), t] \end{aligned}$$

Es conveniente tomar como T el periodo de la fuerza externa, pues en ese caso las órbitas periódicas de periodo T se representan como *puntos fijos* del mapa:

$$x(t) = x(t + T) \tag{2.98a}$$

$$v(t) = v(t + T) \tag{2.98b}$$

El mapa estroboscópico puede construirse en forma muy sencilla cuando la fuerza externa periódica es impulsiva (2.84). Consideremos, por ejemplo, un oscilador armónico bajo la acción de la fuerza delta periódica:

$$f(x, v, t) = f_e(x, v) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)$$

Entre dos impulsos, el oscilador está libre y por lo tanto:

$$\begin{aligned}x(t) &= x(t_0) \cos(\omega_0 t) + v(t_0) \frac{\text{sen}(\omega_0 t)}{\omega_0} \\v(t) &= -\omega_0 x(t_0) \text{sen}(\omega_0 t) + v(t_0) \cos(\omega_0 t)\end{aligned}$$

mientras que durante cada impulso la velocidad cambia en la cantidad:

$$\Delta v(t) = \int_{nT_e - \epsilon}^{nT_e + \epsilon} f(x, v, t) dt = f_e[x(nT_e), v(nT_e)]$$

Por lo tanto, el mapa estroboscópico, en este caso particular, está constituido por las dos ecuaciones algebraicas:

$$x_{n+1} = Cx_n + \frac{S}{\omega_0} v_n \quad (2.99a)$$

$$v_{n+1} = -\omega_0 S x_n + C v_n + f_e(x_n, v_n) \quad (2.99b)$$

en donde hemos introducido la notación obvia:

$$\begin{aligned}x_n &= x(nT_e) & v_n &= v(nT_e) \\C &= \cos(\omega_0 T_e) & S &= \text{sen}(\omega_0 T_e)\end{aligned}$$

Puede construirse una representación gráfica del mapa resolviendo numéricamente las ecuaciones de recurrencia (2.99) a partir de distintas condiciones iniciales. Para cada condición inicial, las ecuaciones generan una secuencia de puntos que representan el comportamiento del mapa. Por ejemplo, en el caso de un oscilador armónico, el mapa estroboscópico genera secuencias de puntos sobre las curvas integrales en el espacio de estados (Figura 2.14).

La Figura 2.15 muestra ejemplos de un mapa estroboscópico, construido para un oscilador anarmónico. Comparando con la Figura 2.14 puede verse el efecto catastrófico de las no linealidades sobre el sistema. En la primera figura, la fuerza externa no está en resonancia con la frecuencia natural del oscilador. Sin embargo, a medida que la amplitud de oscilación crece, las elipses que describen el movimiento se deforman y aparecen complicadas estructuras geométricas: “islas” alrededor de órbitas periódicas, separadas por otras secuencias de puntos. En la segunda, la frecuencia externa es resonante con la frecuencia natural y aun la estructura periódica alrededor del origen se destruye. Discutiremos más adelante, cuando tengamos la teoría hamiltoniana, esta compleja estructura.

Otro ejemplo importante de un mapa estroboscópico es el *mapa del círculo*, que se obtiene del modelo de Poincaré (2.64) cuando la fuerza periódica es impulsiva y el parámetro α es muy grande. Por ejemplo, añadiendo la fuerza:

$$f_x(x, y, t) = F(x, y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)$$

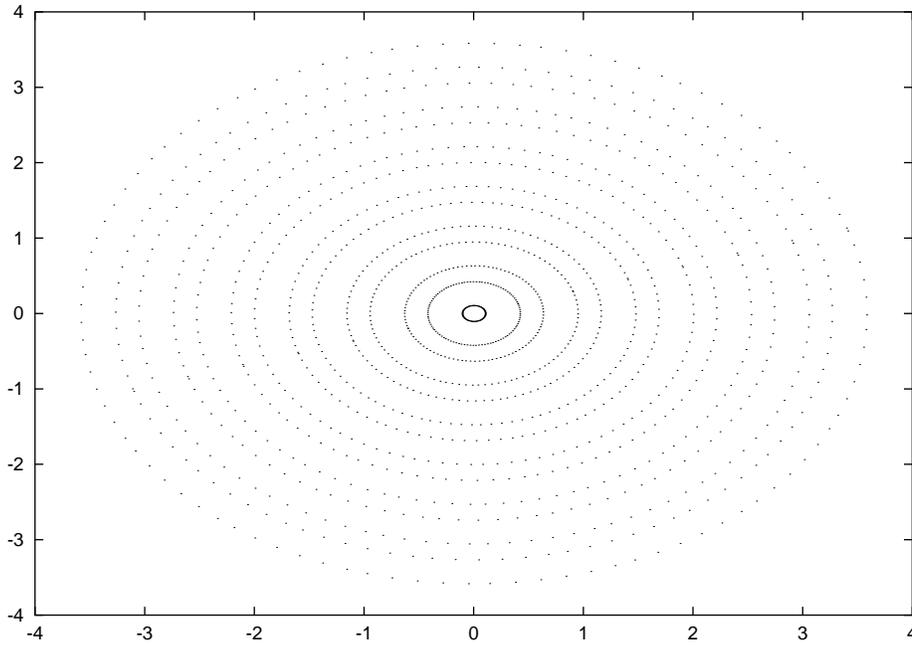


Figura 2.14: Mapa estroboscópico para un oscilador armónico

en (2.64a), hallamos un mapa (en coordenadas polares):

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \omega T + g(\theta_k) \quad (2.100)$$

en donde la función $g(\theta_k)$ depende de los detalles de la función $F(x, y)$.

El mapa del círculo, como veremos, describe en forma cualitativa un sistema dinámico con un ciclo límite, en el caso de alta disipación.

2.5.2. Puntos fijos de mapas

Los *puntos fijos* del mapa estroboscópico juegan el papel de los puntos de equilibrio en los sistemas dinámicos autónomos (cf. Sección 2.3). Éstos se definen por las ecuaciones (2.98) y representan, obviamente, soluciones periódicas con periodo T . Si $\langle x_0, v_0 \rangle$ es un punto fijo, el comportamiento en su entorno puede examinarse linearizando las ecuaciones de recurrencia (2.99) alrededor del punto fijo:

$$\begin{aligned} x_k &= x_0 + \delta x_k \\ v_k &= v_0 + \delta v_k \end{aligned}$$

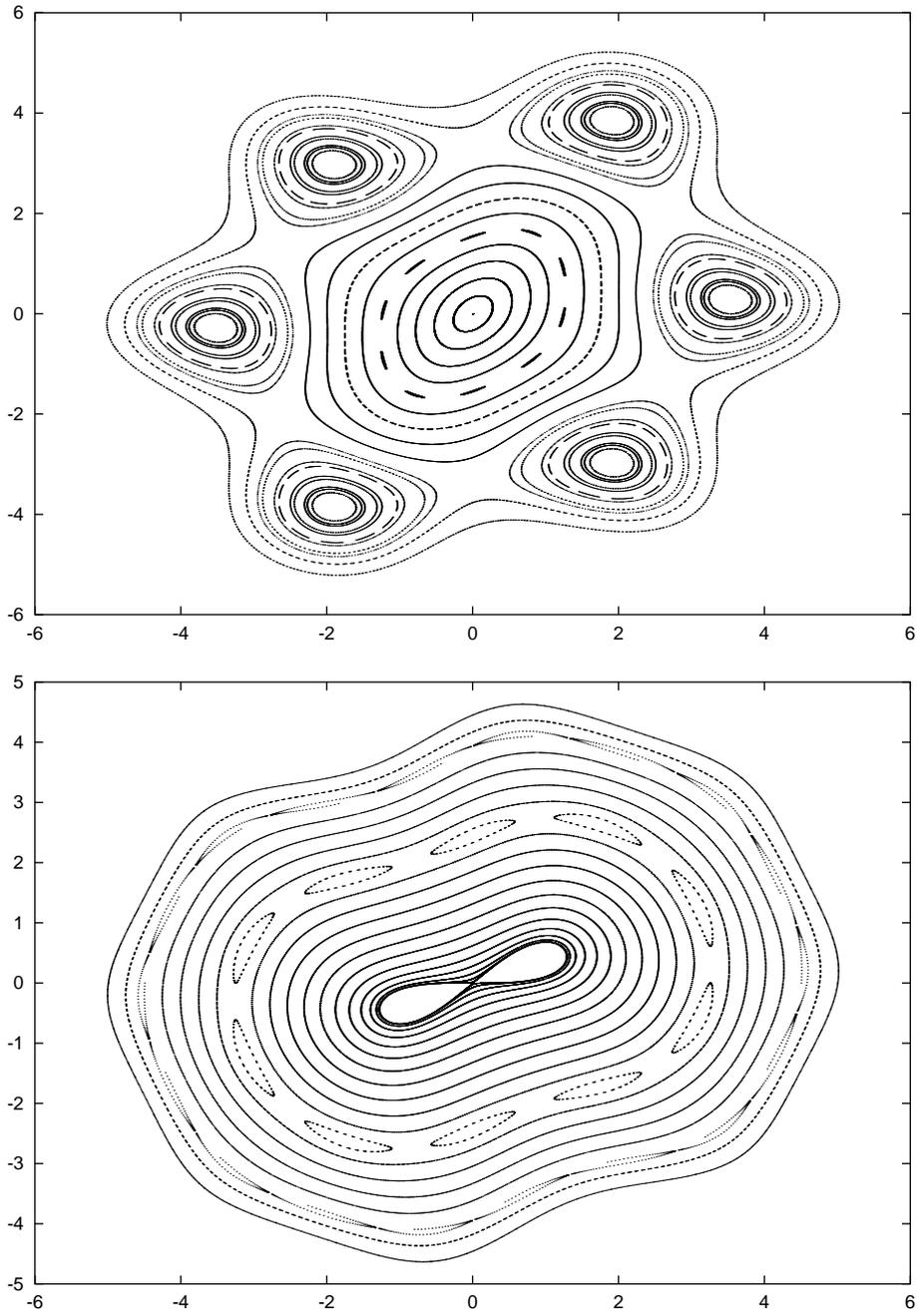


Figura 2.15: Mapas estroboscópicos para un oscilador armónico forzado impulsivo, con coeficiente $f_e = 2 \frac{1 - \exp(-x^2/2)}{x}$, y $\omega_0 T_e = 0$ y $\frac{\pi}{4}$ respectivamente

Sustituyendo, se encuentra:

$$\delta x_{n+1} = C\delta x_n + \frac{S}{\omega_0}\delta v_n \quad (2.101a)$$

$$\delta v_{n+1} = -\omega_0 S\delta x_n + C\delta v_n + \frac{\partial f_e}{\partial x_{n+1}}\delta x_{n+1} \quad (2.101b)$$

Podemos resolver esta ecuación linealizada con una sustitución análoga a la de d' Alembert:

$$\delta x_n = \xi a^n \quad \delta v_n = \eta a^n$$

que sustituida en (2.101) proporciona las *ecuaciones características*:

$$a\xi = C\xi + \frac{S}{\omega_0}\eta \quad (2.102a)$$

$$a\eta = -\omega_0 S\xi + C\eta + \frac{\partial f_e}{\partial x_{n+1}}a\xi \quad (2.102b)$$

Éste es un sistema lineal homogéneo que tendrá solución si y sólo si el determinante de los coeficientes se anula. La ecuación de segundo grado resultante tiene dos raíces que pueden ser reales o complejas conjugadas. El comportamiento de las soluciones es similar al caso de sistemas autónomos y se deja como ejercicio.

2.5.3. El mapa del círculo

Apliquemos el método de los mapas para examinar el comportamiento de un sistema forzado para grandes intensidades de la fuerza externa. En efecto: en el caso de alta disipación, las ecuaciones (2.91) pueden simplificarse: bajo la acción de la fuerza externa la amplitud a se mantendrá casi constante, y la ecuación (2.91c) puede integrarse aproximadamente y llevarse a la forma de un mapa del círculo (2.100), en donde:

$$\omega = \omega_0 - \frac{m}{n}\omega_e$$

$$g(\theta_k) = \frac{\epsilon T}{a\omega_0} f_{1c}(a, \theta)$$

y T es el intervalo de integración aproximada. El mapa del círculo describe, pues, cualitativamente el comportamiento de un oscilador forzado intensamente.

Supondremos que $g(\theta)$ tiene la forma:

$$g(\theta) = KG(\theta) = K \sum G_n e^{in\theta} \quad (2.103)$$

con G periódica con periodo 2π . Examinemos el comportamiento cualitativo del mapa del círculo (2.100), para distintos valores del parámetro $w = \omega T$. Cuando $K = 0$ el mapa representa una rotación de ángulo w . Es costumbre introducir

$$r = \frac{w}{2\pi} \quad (2.104)$$

que se llama el *número de rotación*. Un número de rotación *irracional* representa un comportamiento cuasiperiódico del mapa (cf Sección 2.4.2). En este caso, se puede intentar un cambio de variables

$$\zeta = \theta + K\phi(\theta) \quad (2.105)$$

para transformar el mapa (2.100) en una rotación de ángulo W

$$\zeta_{k+1} = \zeta_k + W \quad (2.106)$$

Intentemos hacerlo para K pequeño. Sustituyendo (2.105) en (2.106) y usando el mapa del círculo hallamos la ecuación funcional para ϕ :

$$K [\phi(\theta_{k+1}) - \phi(\theta_k)] = \Delta w - KG(\theta) \quad (2.107)$$

en donde $\Delta w = W - w$.

En esta última ecuación, podemos reemplazar $\theta_{k+1} = \theta_k + w$, y elegir W para cancelar el término constante de la serie de Fourier (2.103). La ecuación resultante:

$$\phi(\theta + w) - \phi(\theta) = \sum_{n \neq 0} G_n e^{in\theta}$$

puede resolverse ensayando una serie de Fourier como solución. Se encuentra:

$$\phi(\theta) = \sum_{n \neq 0} \frac{G_n}{e^{iw} - 1} e^{in\theta} = \sum_{n \neq 0} \frac{G_n}{e^{2\pi ir} - 1} e^{in\theta} \quad (2.108)$$

Así pues, la serie existe si r es irracional y no existe en caso contrario. Sin embargo, el problema de denominadores pequeños sigue existiendo pues cualquier número real puede aproximarse por números racionales con error arbitrariamente pequeño. Si $r \simeq m/n$, entonces $e^{2\pi ir} \simeq 1$ y la serie (2.108) tiene, en general, problemas de convergencia.

Sin embargo, la ecuación (2.107) puede resolverse usando un método de convergencia más rápida, similar al método de Newton. Con este método puede probarse que la función (2.105) existe para la mayor parte de los irracionales cuando K es pequeño.

2.5.4. Mapas y sincronización

Examinemos ahora lo que ocurre cuando el número de rotación r es racional. Examinemos, como ejemplo, el caso particular:

$$\theta_{k+1} = f(\theta_k) = \theta_k + w - K \operatorname{sen} \theta_k \quad (2.109)$$

que puede llamarse el *mapa del círculo standard*. Cualitativamente, los resultados de este ejemplo serán similares a los del caso general.

Consideremos, como primer ejemplo, la resonancia con $r = 0$. En este caso, θ debe repetirse después de cada iteración y, por lo tanto, debe ser un punto fijo del mapa $\hat{\theta} = f(\hat{\theta})$; es decir:

$$r = \frac{K}{2\pi} \text{sen } \hat{\theta}$$

Ahora bien: esta ecuación define un rango de frecuencias $w = 2\pi r$ en el cual el mapa (2.109) tiene un punto fijo. Los límites de la región de sincronización se hallan exigiendo que las iteraciones del mapa sean estables. La condición para que esto se cumpla es $|f'(\hat{\theta})| < 1$, pues de otro modo las iteraciones se alejarán del punto fijo (Sección 2.6). Con $f'(\theta) = 1 - K \cos(\theta)$ la condición es $\hat{\theta} = \pi/2$:

$$w = \pm K \tag{2.110}$$

Un resultado análogo vale para $r = 1$.

Mucho más interesante es el ejemplo de la subarmónica $r = 1/2$. En ese caso, en cada iteración θ gira media circunferencia y sólo en la segunda iteración vuelve a su valor original. Tendremos, pues, las dos condiciones:

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_0 + w - K \text{sen } \hat{\theta}_0 \tag{2.111a}$$

$$\hat{\theta}_0 = \hat{\theta}_1 + w - K \text{sen } \hat{\theta}_1 \tag{2.111b}$$

y la condición adicional

$$\left| (1 - K \cos \hat{\theta}_0)(1 - K \cos \hat{\theta}_1) \right| < 1 \tag{2.111c}$$

2.6. Caos en una dimensión

2.6.1. La ecuación logística

Una forma más cómoda del mapa puede lograrse si se eliminan las velocidades entre las ecuaciones (2.99). De este modo, hallamos la ecuación para el mapa:

$$x_{n+1} = 2Cx_n - Bx_{n-1} + 2F_e(x_n) \tag{2.112}$$

en donde:

$$\begin{aligned} B &= e^{-\lambda T_e} \\ C &= \frac{1}{2} (e^{i\omega+T_e} + e^{i\omega-T_e}) \end{aligned}$$

El comportamiento de los puntos iterados x_n depende de la forma de la no linealidad $F_e(x)$. Un ejemplo muy importante es es *mapa cuadrático*:

$$F_e(x) = x^2 \tag{2.113}$$

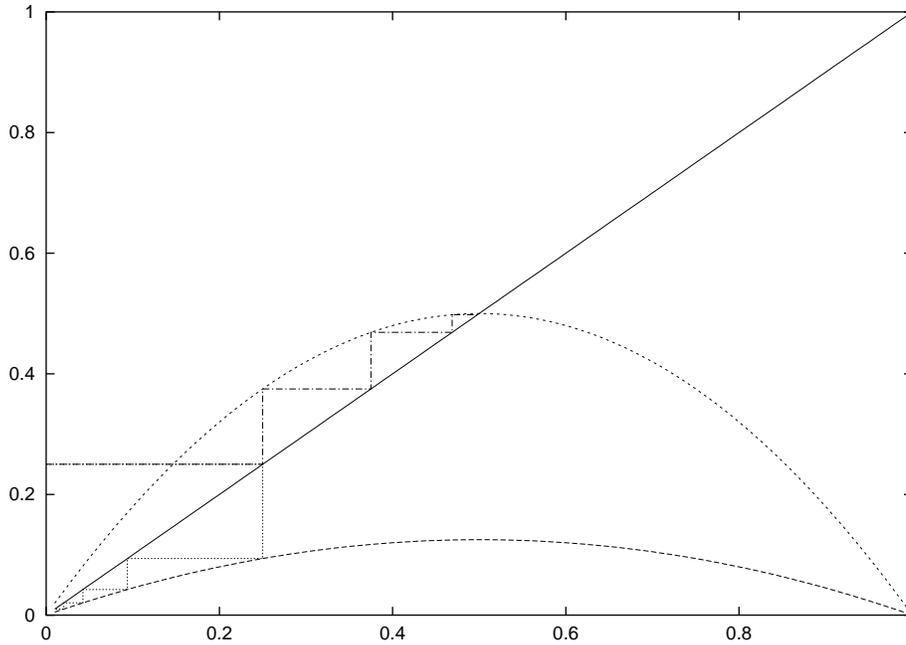


Figura 2.16: Iteraciones del mapa logístico. Las curvas representan la función $f(x) = \mu x(1 - x)$ para $\mu = 1/2$ y $\mu = 2$; así como las primeras iteraciones partiendo de $x = 1/4$.

forma a la que puede llegarse siempre eligiendo convenientemente es sistema de unidades. La ecuación correspondiente:

$$x_{n+1} = 2Cx_n - Bx_{n-1} + 2F_e(x_n) \quad (2.114)$$

contiene como casos particulares muchos mapas unidimensionales interesantes. Por ejemplo, haciendo $B = 0$ y cambiando la escala de x , hallamos la *ecuación logística*:

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \quad (2.115)$$

que describe, groseramente, el crecimiento de una población con recursos limitados. Haciendo cambios lineales de la variable podemos hallar otros mapas interesantes como el *mapa de Hénon*:

$$x_{n+1} - \beta x_n = 1 - \mu x_n^2 \quad (2.116)$$

El comportamiento de la ecuación (2.114) es extremadamente complejo, reflejando la complejidad de la ecuación diferencial subyacente.

Ahora, estudiemos cualitativamente el comportamiento de los iterados de la ecuación logística para $0 \leq \mu \leq 1$. En ese intervalo, los iterados del mapa están

confinados en el intervalo $[0, 1]$. La Figura 2.16 muestra las primeras iteraciones del mapa para dos valores de μ .

Sabemos que el comportamiento de los iterados de la ecuación:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (2.117)$$

está dirigido por los puntos críticos del mapa. Estos son los puntos fijos:

$$x_* = f(x_*) \quad (2.118)$$

que, en el caso de la ecuación logística (2.115) toma la forma:

$$x_* = \mu x_*(1 - x_*) \quad (2.119)$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$x_*^{(1)} = 0 \quad (2.120a)$$

$$x_*^{(2)} = 1 - \frac{1}{\mu} \quad (2.120b)$$

Como para la ecuación logística $0 \leq x \leq 1$ la segunda solución tiene significado sólo cuando $\mu > 1$. ¿Qué representan estos puntos fijos en el sistema dinámico (el oscilador) original? La primera solución representa el oscilador en reposo. La segunda, en cambio, representa una solución periódica de periodo T .

$$x(t + nT) = x[t + (n - 1)T]$$

Examinemos la estabilidad de estos puntos fijos. Para ello, hagamos una variación en la ecuación (2.117), sustituyendo $x = x_* + \xi$ y linearizando:

$$\xi_{n+1} = f'(x_*)\xi_n$$

La condición de estabilidad del punto fijo será:

$$|f'(x_*)| < 1$$

De otro modo, la solución variacional se apartará exponencialmente del punto fijo. En el caso de la ecuación logística:

$$f'(0) = \mu \quad (2.121a)$$

$$f'\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = 2 - \mu \quad (2.121b)$$

El punto fijo $x_*^{(1)}$ es, pues, estable cuando $\mu < 1$ mientras que $x_*^{(2)}$ es estable cuando $1 < \mu < 3$. En la Figura 2.16 puede verse este comportamiento: las iteraciones tienden al punto fijo estable en cada caso.

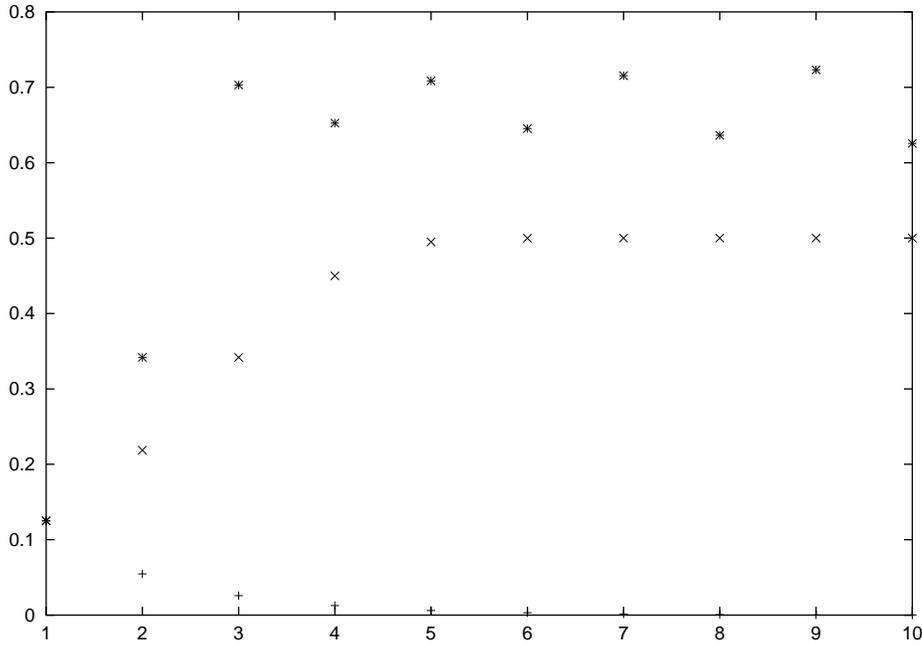


Figura 2.17: Primeras iteraciones del mapa logístico, para los valores de $\mu = 1/2, 2$ y $25/8$.

¿Qué ocurre cuando $\mu > 3$? En ese caso los puntos fijos de (2.115) no son más estables. En cambio, cuando $\mu = 3 + \epsilon$ aparece una “solución periódica de periodo 2”: $x_{n+2} = x_n$. Se ha producido una *bifurcación*. La Figura 2.18 muestra las primeras iteraciones cuando $\mu = 9/8$. Estos puntos fijos pueden estudiarse observando que esta órbita periódica es, en realidad, un punto fijo de la función iterada:

$$f^{(2)} = f(f(x)) = \mu^2 x(1-x)[1 - \mu^x(1-x)] \quad (2.122)$$

La ecuación resultante $x_* = f^{(2)}$ es de cuarto orden, pero dos de las soluciones son $x_*^{(1)}$ y $x_*^{(2)}$. Si se eliminan estas dos soluciones se encuentra la ecuación cuadrática:

$$\mu^2 x^2 + \mu(1-\mu)x + 1 = 0$$

cuyas soluciones:

$$x_{3,4} = \frac{(\mu - 1 \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3})}{2\mu}$$

son reales si $\mu > 3$. Estudiaremos su estabilidad como antes lo hicimos. Usando

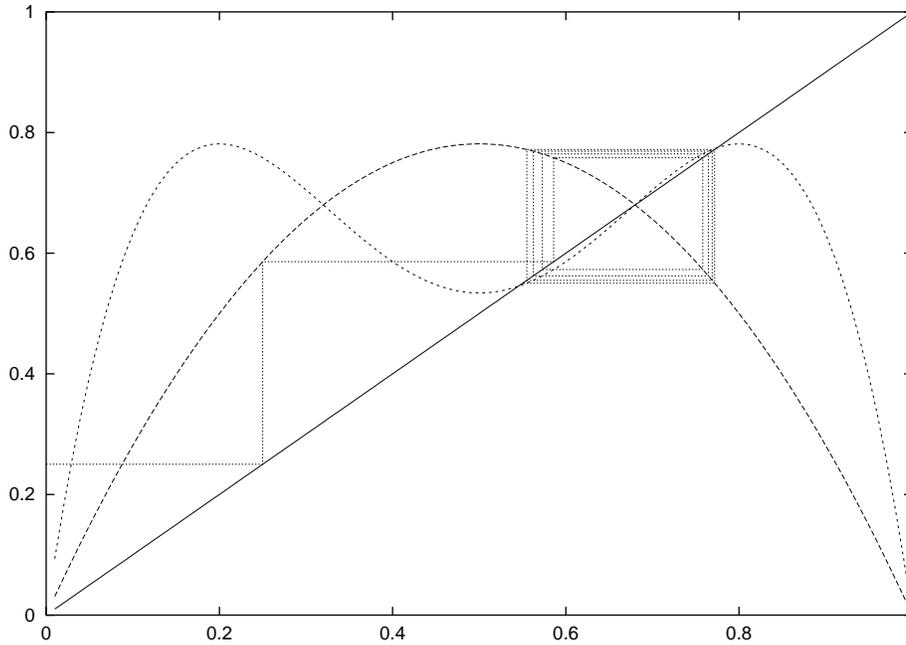


Figura 2.18: Órbita de periodo 2. Las curvas representan las funciones $f(x) = \mu x(1-x)$ y $f^{(2)}(x) = f(f(x))$ para $\mu = 25/8 = 3,125$; así como las primeras iteraciones partiendo de $x = 1/4$.

$f'(x) = \mu(1-2x)$, hallamos:

$$\begin{aligned} \xi_{n+2} &= \mu(1-2x_3)\xi_{n+1} \\ &= \mu^2(1-2x_3)(1-2x_4)\xi_n \\ &= (4+2\mu-\mu^2)\xi_n \end{aligned}$$

y la correspondiente condición de estabilidad es:

$$3 < \mu < 1 + \sqrt{6} \simeq 3,449 \dots \quad (2.123)$$

Es difícil estudiar analíticamente el comportamiento del mapa logístico para μ mayores. Por ejemplo, para la siguiente bifurcación en el mapa logístico es necesario analizar una ecuación algebraica de grado 12. En cambio, el estudio numérico de la ecuación logística es sencillo y muestra que cuando $\mu = 1 + \sqrt{6}$ se produce otra bifurcación; es decir, aparece otra una solución estable de periodo 4, y para μ aún mayor otra de periodo 8 y así sucesivamente (Figura 2.19).

El mecanismo que produce estas bifurcaciones es sencillo. Una órbita de periodo 2^n corresponde a un punto fijo de la función iterada f^{2^n} , que también es punto fijo de la iterada $f^{2^{n+1}}$. A medida que μ crece, la pendiente de esta última función aumenta y se hace igual a 1 en el valor crítico de μ . Para valores mayores de

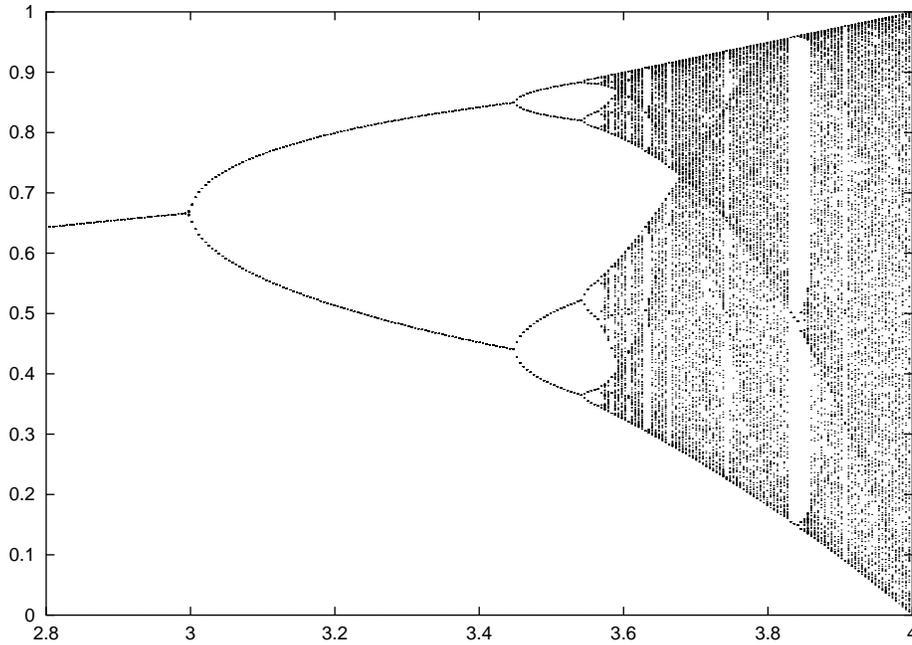


Figura 2.19: Diagrama de bifurcaciones del mapa logístico, para $2,8 < \mu < 4$.

μ , este punto fijo se hace inestable y aparecen otros dos puntos fijos estables de $f^{2^{n+1}}$.

El análisis numérico de las bifurcaciones muestra que cuando $n \gg 1$:

$$\mu_n \simeq \mu_\infty - \frac{\mu C}{\delta^n} \quad (2.124)$$

$$\delta \simeq 4,66926 \dots \quad (2.125)$$

en donde δ se suele llamar la *constante de Feigenbaum*. El análisis numérico muestra que una clase muy amplia de mapas unidimensionales tienen una cascada similar de bifurcaciones con la misma constante. Diremos, pues, que δ es *universal*.

La secuencia de bifurcaciones no es la única propiedad universal. Todas las horquillas de la Figura 2.19 tienen una forma aproximadamente similar. Definamos, en primer lugar, el *ancho* de una de ellas. Una órbita de periodo 2^n se llama *superestable* si:

$$f'^{(2^n)}(x_j) = \prod_{i=0}^{n-1} f'^{(2^i)}(x_j) = 0 \quad (2.126)$$

Esta ecuación, a su vez, implica que uno de los x_j es $\frac{1}{2}$. El *ancho* d_n se define como:

$$d_n = f_{\hat{\mu}}^{(2^n)}\left(\frac{1}{2}\right) - f_{\hat{\mu}}^{(2^{n-1})}\left(\frac{1}{2}\right) = f_{\hat{\mu}}^{(2^n)}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \quad (2.127)$$

El cálculo numérico muestra que los anchos decrecen en la forma:

$$d_{n+1} \simeq \frac{d_n}{-\alpha} \quad (2.128)$$

$$\alpha \simeq 2,502908\dots \quad (2.129)$$

en donde α es también universal.

2.6.2. Análisis de la universalidad

Probaremos ahora que las propiedades (2.124) y (2.128) son verdaderamente universales. La idea de la demostración estriba en que el entorno de un máximo de una de las funciones iteradas $f^{(2^n)}$ es muy parecido a la función original. Más precisamente, en el intervalo $[\frac{1}{2}, d_n]$, la función iterada n veces se comporta como la función original.

Para examinar el comportamiento de la iterada cerca de un máximo, observemos que (2.128) implica que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n d_{n+1} &= d_1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{\hat{\mu}_{n+1}}^{(2^n)} \end{aligned}$$

Para estudiar esta función en el entorno del máximo en $x = \frac{1}{2}$ hagamos el cambio de variable $\tilde{x} = (x - \frac{1}{2})$. Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{\hat{\mu}_{n+1}}^{(2^n)}(0) = d_1$$

Puesto que esta expresión converge, definiremos:

$$g_1(\tilde{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{\hat{\mu}_{n+1}}^{(2^n)}\left(\frac{\tilde{x}}{(-\alpha)^n}\right) \quad (2.130)$$

que, como depende del comportamiento de f en el entorno del máximo, debería ser universal. De la misma manera, definimos:

$$g_i(\tilde{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{\hat{\mu}_{n+i}}^{(2^n)}\left(\frac{\tilde{x}}{(-\alpha)^n}\right) \quad (2.131)$$

que también existen y deberían ser independientes de la función original f . Las funciones g_i satisfacen la relación de recurrencia:

$$g_{i-1}(x) = (-\alpha)g_i\left[g_i\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right] \quad (2.132)$$

que no depende de la función original y sugiere fuertemente la propiedad de universalidad. En realidad, la función límite $g(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x)$ no depende de f y satisface:

$$g(x) = (-\alpha)g\left[g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] \quad (2.133)$$

He aquí una ecuación que permite, en principio, determinar g y α . En efecto; observemos, en primer lugar, que si $g(x)$ es una solución de (2.133), $kg(x/k)$ también lo es. Si se impone la condición

$$g(0) = 1 \quad (2.134)$$

que implica

$$\alpha = -\frac{1}{g(1)} \quad (2.135)$$

la solución queda unívocamente determinada. Para hallarla, sustituyamos una serie de potencias:

$$g(x) = 1 + c_1x^2 + c_2x^4 + \dots$$

en donde hemos usado la condición (2.134). Igualando las potencias correspondientes en ambos miembros hallamos:

$$\begin{aligned} 1 &= -\alpha(1 + c_1 + c_2 + \dots) \\ c_1 &= -\frac{2}{\alpha}(c_1 + 2c_2 + \dots) \\ c_2 &= -\frac{1}{\alpha^3}(4c_2^2 + 6c_1c_2 + 2c_1c_2 + c_1^3 + \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por ejemplo, si conservamos únicamente el término en x^2 hallamos:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \sqrt{3} \approx 2,73 \\ c_1 &= -\frac{1}{2}\alpha \approx -1,37 \end{aligned}$$

Conservando términos de orden superior se halla el resultado (2.129).

Para hallar el valor de δ es necesario examinar lo que sucede cerca del máximo en una duplicación. Lo podemos hacer comparando la función bifurcada “infinitas veces” f_{μ_∞} con la función bifurcada n veces:

$$f_{\mu_n} = f_{\mu_\infty} + (\mu_n - \mu_\infty)\hat{f}(x) \quad (2.136)$$

en donde

$$\hat{f} = \left. \frac{\partial f_\mu}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_\infty}$$

El secreto del análisis reside en que la ecuación (2.136) puede considerarse como un apartamiento pequeño del punto fijo de la *transformación de duplicación*:

$$\mathbb{T}f(x) = -\alpha f \left[f \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right] \quad (2.137)$$

El análisis, muy complicado, muestra que para n suficientemente grande se satisface:

$$\mathbb{T}^n f(x) = g(x) + (\mu - \mu_\infty)\delta^n h(x)$$

en donde h satisface la “ecuación de estabilidad”:

$$-\alpha \left\{ g' \left[g \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right] h \left(-\frac{x}{\alpha} \right) + h \left[g \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right] \right\} = \delta h(x) \quad (2.138)$$

que muestra que tanto δ como h son universales. La solución de (2.138) puede hallarse con la misma técnica de desarrollo en serie.

2.6.3. La región caótica

Cuando $\mu > \mu_\infty$, el periodo del sistema es “infinito”: el comportamiento es aperiódico y, en realidad, es tan imprevisible como una tirada de dados.

Para verlo, consideremos dos iteraciones distintas de la ecuación logística, partiendo de puntos iniciales ligeramente distintos x_0 y $x'_0 = x_0 + \delta x_0$. Entonces tendremos:

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= f'(x_0) \delta x_0 \\ \delta x_2 &= f^{(2)'}(x_0) \delta x_0 \\ &= f'(x_1) f'(x_0) \delta x_0 \end{aligned}$$

y en general:

$$\delta x_n = \left[\prod_{n=0}^{n-1} f'(x_n) \right] \delta x_0 \quad (2.139)$$

El producto entre corchetes controla el crecimiento de la perturbación δx_0 . Para escribir esta ecuación en forma similar a (2.68a), introduzcamos en *exponente de Liapunov*:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{n-1} \ln |f'(x_n)| \quad (2.140)$$

Entonces se cumple:

$$|\delta x_n| \sim e^{n\lambda} |\delta x_0|$$

El exponente de Liapunov estima, pues, el ritmo en que se apartan dos soluciones entre sí. Si $\lambda > 0$, al cabo de un número de iteraciones del orden $1/\lambda$ ambas soluciones difieren totalmente entre sí y por lo tanto x'_n no puede usarse para estimar x_n . Es, pues, imposible predecir la coordenada x para tiempos $t > n\tau$ (τ es el intervalo entre iteraciones) pues los errores de redondeo en la posición inicial se habrán amplificado hasta obliterarla. En estas condiciones, x es tan impredecible como una tirada de ruleta. El movimiento se llama *caótico*.

El exponente de Liapunov puede calcularse numéricamente en función del parámetro μ . En general, $\lambda(\mu)$ no es una función analítica: por el contrario, es terriblemente complicada y llena de discontinuidades. Lo que se encuentra, a grandes rasgos, es lo siguiente:

1. El exponente $\lambda(\mu) \leq 0$ si $\mu < \mu_\infty$. Las soluciones correspondientes, que tienden asintóticamente a ser periódicas, son *estables*.
2. Cuando $\mu_\infty < \mu < 4$ el comportamiento de la función es muy complejo. Por lo general, $\mu > 0$ y el comportamiento es caótico, pero existen infinitas regiones angostas que contienen soluciones periódicas, en donde $\mu < 0$. El orden en que aparecen estas soluciones periódicas es también universal.

Aunque por lo general los exponentes de Liapunov sólo pueden calcularse numéricamente, pueden existir soluciones analíticas caóticas para algunos valores particulares de μ . Por ejemplo, cuando $\mu = 4$:

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \quad (2.141)$$

Con el cambio de variables:

$$x_n = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi\theta_n)$$

la ecuación (2.141) se lleva a la forma:

$$\theta_{n+1} = 2\theta_n \text{ mód } 1 \quad (2.142)$$

cuyo exponente de Liapunov es, obviamente:

$$\lambda_\theta = \ln 2 \approx 0,691 \dots \quad (2.143)$$

Pero es muy sencillo demostrar que los exponentes de Liapunov son independientes de las coordenadas utilizadas para calcularlos y por lo tanto (2.143) es el exponente de Liapunov para la ecuación logística con $\mu = 4$.

Capítulo 3

El problema de dos cuerpos

El problema de dos cuerpos que se mueven bajo la acción de fuerzas centrales es uno de los primeros resueltos en mecánica y uno de los más fructíferos en la historia de la física. Es también un modelo sencillo de cómo el uso de las leyes de conservación (Sección 1.5) permite simplificar y resolver completamente un problema. Por resolución del problema entendemos la expresión explícita de su solución (coordenadas y tiempo) en términos de un parámetro que para este problema puede elegirse como el ángulo polar ϕ . En este capítulo discutiremos su solución y algunas de sus aplicaciones.

3.1. Movimiento en un campo central

El movimiento de una partícula en un campo de fuerza externa central (dirigido a un punto particular) tiene considerable interés en sí mismo, aparte de su aplicación para resolver el problema de dos cuerpos. Se trata del ejemplo más sencillo, pero no trivial, de integración de las ecuaciones de movimiento.

3.1.1. El problema de un cuerpo equivalente

Comenzaremos por mostrar cómo el problema de dos cuerpos que se mueven bajo la acción de fuerzas centrales puede reducirse al de un único cuerpo en un campo central. El teorema de conservación del impulso es el que nos permite esta reducción.

Las ecuaciones de movimiento del problema son:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{dV}{dr}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (3.1a)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{dV}{dr}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (3.1b)$$

Puesto que no hay fuerzas externas, trabajaremos en el sistema de centro de

masas (CM), pero en este sistema es evidente que las ecuaciones no son independientes pues debe satisfacerse:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0 \quad (3.2)$$

Obtenemos una ecuación diferencial independiente si introducimos las coordenadas relativas de las partículas con:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (3.3b)$$

De las ecuaciones (3.1a) se obtiene de inmediato la ecuación diferencial:

$$\ddot{\mathbf{r}} = - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{dV}{dr} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (3.4)$$

Definimos la *masa reducida* del sistema con la ecuación:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (3.5)$$

y con ella obtenemos la ecuación de movimiento del sistema:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = - \frac{dV}{dr} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (3.6)$$

Esta ecuación es formalmente idéntica a la ecuación de movimiento de una única partícula de masa igual a la masa reducida del sistema, que se mueve bajo la acción de una fuerza central externa. Esta gran simplificación del problema de dos cuerpos se debe, esencialmente, a la conservación del impulso.

Una vez resuelta la ecuación (3.6), las coordenadas de las partículas individuales se encuentran resolviendo el sistema lineal (3.3a) y (3.2). Por otra parte, podemos expresar las ecuaciones de la energía y del impulso angular utilizando coordenadas relativas. Si introducimos el impulso relativo:

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} \quad (3.7)$$

resulta:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \quad (3.8)$$

que corresponde la impulso angular respecto del origen de una partícula de masa m . Del mismo modo, la ley de conservación de la energía toma la forma:

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + V(r) = E \quad (3.9)$$

que tiene una interpretación física similar. Las cantidades (3.8) y (3.9) son constantes de movimiento, y su importancia reside en que gracias a ellas el problema es completamente integrable.

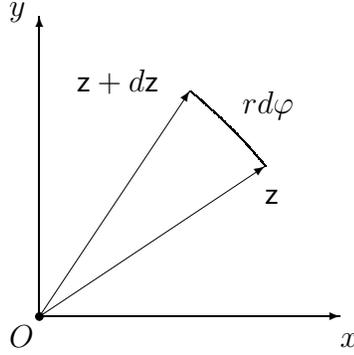


Figura 3.1: Segunda ley de Képler

3.1.2. La segunda ley de Képler

Comencemos por deducir una importante consecuencia de la conservación del impulso angular (3.8).

El vector \mathbf{L} es perpendicular tanto a \mathbf{r} como a \mathbf{p} . Ambos vectores definen un plano en el espacio y, por ser \mathbf{L} constante, la orientación de este plano es invariante. Deducimos, pues, que en el sistema CM el movimiento se realiza en un plano fijo, que se conoce como el *plano invariante* o también *plano de la órbita*.

Elijamos los ejes de nuestro sistema de referencia de modo que el plano invariante sea el plano (x, y) . El vector \mathbf{L} será paralelo al eje z y la ecuación (3.8) se escribe:

$$m(xy - y\dot{x}) = L \quad (3.10)$$

Para seguir adelante, será conveniente introducir coordenadas polares en el plano (x, y) . Esto puede hacerse en forma simple si recordamos que un vector plano se puede representar con un número complejo:

$$z = x + iy = re^{i\varphi} \quad (3.11a)$$

y la velocidad de la partícula se representa como otro complejo:

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = \dot{r}e^{i\varphi} + ire^{i\varphi}\dot{\varphi} \quad (3.11b)$$

Con esta cantidad auxiliar es muy fácil pasar a coordenadas polares. Por ejemplo:

$$xy - y\dot{x} = \Im(z^*\dot{z}) = r^2\dot{\varphi}$$

Ahora bien, el elemento de área en coordenadas polares es $dS = \frac{1}{2}r^2d\theta$ (Figura 3.1) y por lo tanto, el teorema de conservación del impulso angular toma la forma:

$$\dot{S} = \frac{L}{2m} \quad (3.12)$$

en donde \dot{S} es la *velocidad areal*: el área barrida por el radio vector \mathbf{z} por unidad de tiempo. Este elegante enunciado geométrico de la conservación del impulso angular se conoce como *segunda ley de Képler*, quien la indujo de las observaciones del movimiento planetario. En nuestra demostración no hemos hecho ninguna hipótesis sobre $V(r)$ y por lo tanto (3.12) es válida para todas las fuerzas centrales. Una forma más cómoda de (3.12) es:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \quad (3.13)$$

que proporciona una ecuación diferencial para φ si se conoce r como función del tiempo.

3.1.3. El problema unidimensional equivalente

El teorema de conservación de la energía va a proporcionarnos una ecuación diferencial para r . Comencemos por escribir la energía cinética en coordenadas polares:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{z}}|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

Si de esta ecuación eliminamos $\dot{\varphi}$ usando (3.12) y sustituimos en la expresión para la conservación de la energía (3.9), hallamos después de algún cálculo la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = E \quad (3.14)$$

Un momento de reflexión nos muestra que la ecuación (3.14) es idéntica a la ecuación de la energía para una partícula que se mueve en un potencial:

$$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (3.15)$$

que se llama *potencial efectivo*. El último término se conoce como *barrera centrífuga* y es la energía cinética asociada con el movimiento de translación alrededor del centro. En la teoría elemental del movimiento central, corresponde a la repulsión debida a la fuerza centrífuga.

Podemos discutir la ecuación (3.14) con los mismos métodos usados en la Sección 1.4.2 para estudiar el movimiento unidimensional conservativo. Por ejemplo, supongamos que $V(r)$ sea un potencial atractivo que tienda a cero en el infinito y se mantenga acotado (o que diverja más lentamente que $\frac{1}{r^2}$) en el origen. Para tal potencial, V_{ef} tendrá la forma indicada en la Figura 3.2. En este tipo de potencial, las partículas con energía negativa quedarán “ligadas” con el potencial y su movimiento estará acotado por dos radios finitos r_1 y r_2 . Estos radios, que corresponden a los puntos de retorno del movimiento unidimensional, corresponden a las raíces de la ecuación:

$$V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = E \quad (3.16)$$

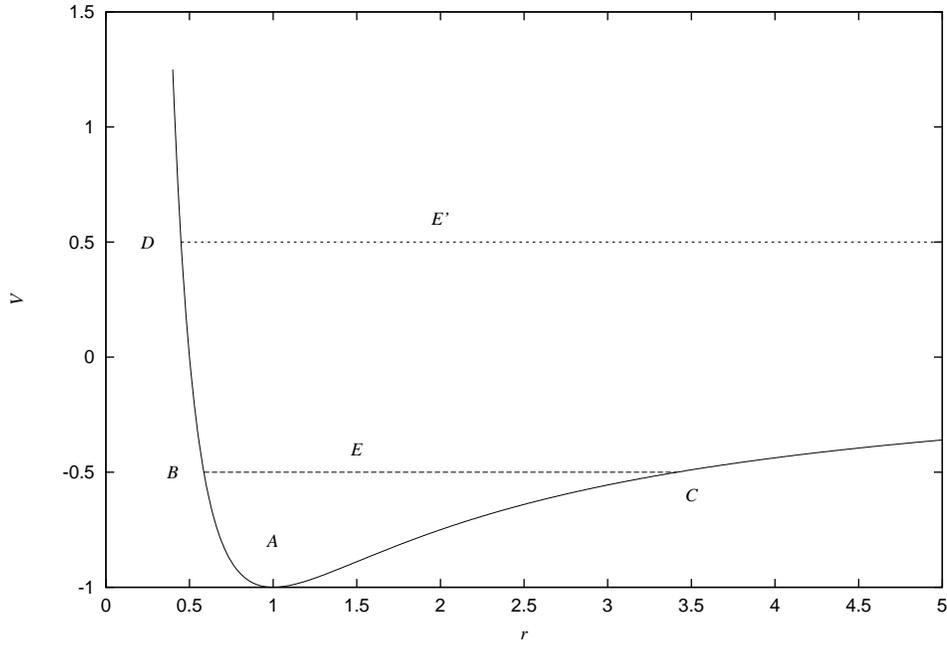


Figura 3.2: Potencial efectivo $V_{ef} = r^{-2} - 2r^{-1}$

Para energías positivas, la partícula puede alejarse indefinidamente del origen.

La analogía con el movimiento unidimensional no debe llevarse demasiado lejos. Por ejemplo, en un movimiento unidimensional la partícula se encuentra en reposo en un mínimo del potencial. En cambio, en el problema que nos interesa, el mínimo corresponde a una órbita circular alrededor del centro de atracción.

3.1.4. Órbitas

La trayectoria de la partícula en el plano (x, y) se puede estudiar directamente, sin pasar por la integración de las ecuaciones (3.13) y (3.14). Eliminemos el tiempo entre dichas ecuaciones para obtener la *ecuación de la órbita*:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left[2m(E - V) - \frac{L^2}{r^2}\right] \frac{r^4}{L^2} \quad (3.17)$$

cuyas soluciones proporcionan las trayectorias de las partículas en el plano.

Esta ecuación puede ponerse en una forma más conveniente, si utilizamos como incógnita la variable $u = 1/r$. Con esta nueva variable la ecuación (3.17) toma la forma:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 + \frac{2m}{L^2}V\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{2m}{L^2}E \quad (3.18)$$

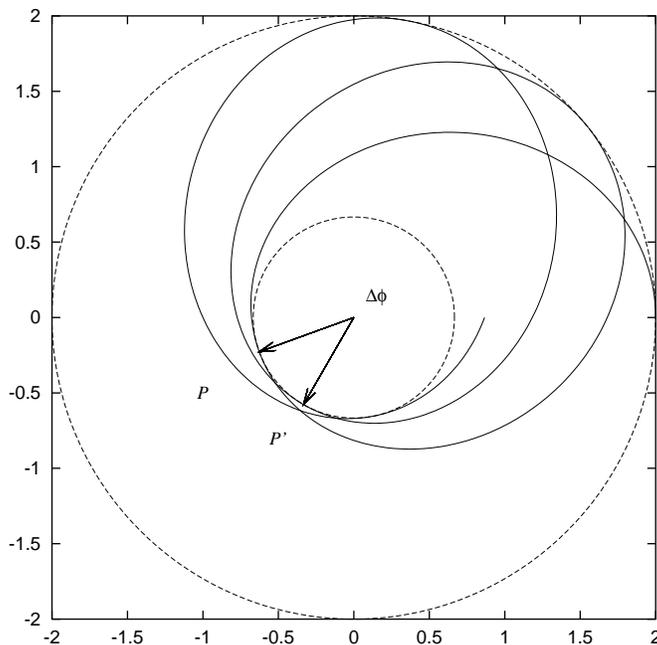


Figura 3.3: Órbita típica acotada en un potencial efectivo

que tiene la forma de la ley de conservación de la energía para un oscilador armónico unidimensional perturbado. La correspondiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{F(u)}{u^2} \quad (3.19)$$

(en donde F es la fuerza correspondiente al potencial V) puede tratarse con el método de Bogoljubov-Krylov si el segundo miembro es suficientemente pequeño.

Podemos deducir algunas propiedades cualitativas de la órbita utilizando la ecuación (3.17). Consideremos, en primer lugar, un punto de retorno que corresponda a distancia mínima al origen r_{\min} , tal como los puntos B y D en la Figura 3.2. En estos puntos, que se llaman *pericentros* de la órbita, nombre tomado de la astronomía, se anula la derivada de r respecto de ϕ y la trayectoria es tangente al círculo de radio r_{\min} . Como la ecuación (3.17) es invariante ante la transformación $\phi \rightarrow -\phi$, la trayectoria debe ser simétrica respecto del pericentro (Figura 3.3).

Supongamos ahora que la energía es negativa. En ese caso la órbita estará comprendida entre dos círculos de radios r_{\min} y r_{\max} . Evidentemente, la trayectoria también será tangente al círculo exterior y simétrica respecto de los puntos de tangencia Figura 3.3, que se llaman *apocentros*. Deducimos que la trayectoria está formada por una secuencia de arcos de la misma forma que van desde r_{\min} a r_{\max} y viceversa. Cada uno de estos arcos representa una caída hacia el centro o un escape del mismo. Al caer hacia el centro desde un apocentro hacia un peri-

centro, la partícula gana energía cinética a expensas de la energía potencial. Esta energía cinética se distribuye entre las componentes radial y angular de manera que se satisfaga la segunda ley de Képler: a medida que la partícula se acerca al origen aumenta la componente $r\dot{\varphi}$ hasta que, en la cercanía del pericentro, toda la energía cinética ha sido absorbida por la componente tangencial del movimiento. Luego, durante el ascenso, los fenómenos se reproducen en el orden inverso.

Aunque la trayectoria está confinada a una región finita del plano, por lo general no será cerrada. El ángulo que gira el vector \mathbf{r} después de un viaje de ida y vuelta entre r_{\min} y r_{\max} vale:

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{Ldr}{r^2 \sqrt{2m(E - V) - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (3.20)$$

y la condición para que la trayectoria sea cerrada es que:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{m}{n}$$

con m y n enteros.

Para un potencial cualquiera esto ocurrirá sólo para algunos valores excepcionales de las condiciones iniciales. Hay dos potenciales, sin embargo, cuyas trayectorias son siempre cerradas: el oscilador armónico tridimensional y el potencial coulombiano. En los otros casos, la diferencia entre $\Delta\varphi$ y un múltiplo de 2π se conoce como la *precesión del pericentro*. Si la órbita no es cerrada, sus lazos sucesivos llenarán la corona comprendida entre r_{\min} y r_{\max} .

Si la energía es positiva, la partícula puede alejarse hasta el infinito. Como a grandes distancias del origen el potencial tiende a cero, la trayectoria tiende asintóticamente a una recta. La órbita consistirá entonces de dos ramas simétricas respecto del pericentro P , con asíntotas rectilíneas que forman entre sí un ángulo Φ (Figura 3.4). De la ecuación de la órbita hallamos:

$$\Phi = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{Ldr}{r^2 \sqrt{2m(E - V) - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (3.21)$$

que proporciona el ángulo girado en función de la energía e impulso angular de la partícula.

Problemas 3.1

Problema 3.1.1.

Probar que las coordenadas de las partículas 1 y 2 están dadas por:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

¿Cuáles son las velocidades correspondientes?

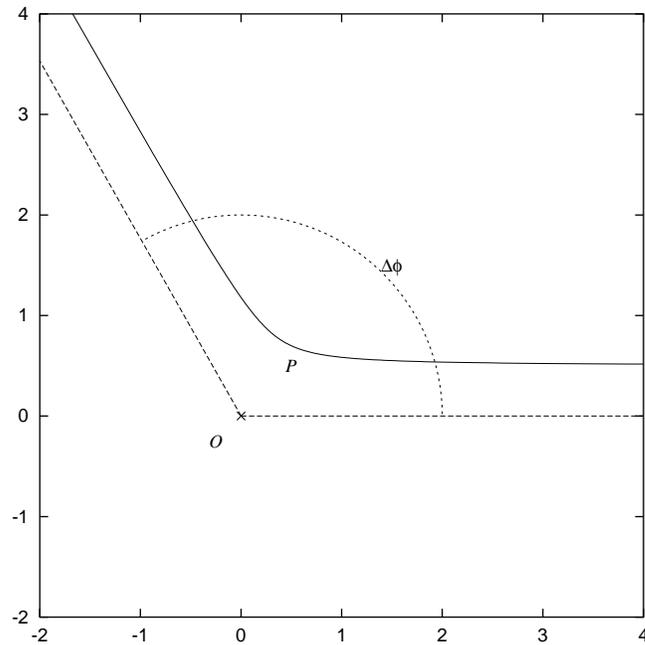


Figura 3.4: Órbita típica de choque en un potencial efectivo

Problema 3.1.2.

Probar que los impulsos de las partículas 1 y 2 son iguales en módulo al impulso relativo.

Problema 3.1.3.

Probar las ecuaciones (3.8) y (3.9).

Problema 3.1.4.

Usando el teorema de conservación del impulso, un sistema aislado de N partículas se reduce al problema equivalente de $N - 1$ partículas. Llevar a cabo esta reducción explícitamente para un sistema de N partículas de la misma masa.

Problema 3.1.5.

La ecuación de movimiento (3.6) requiere seis constantes de integración. En esta sección hemos determinado cuatro: E , L , r_0 y φ_0 . ¿Cuáles son las otras dos constantes de integración?

Problema 3.1.6.

Una partícula se mueve en órbita circular alrededor del centro. Hallar el periodo del movimiento.

Problema 3.1.7.

Una partícula sometida a un potencial atractivo cae hacia el origen desde una distancia r_0 . Expresar el tiempo de caída.

Problema 3.1.8.

Probar que la trayectoria de un oscilador armónico tridimensional:

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

es una elipse centrada en el origen.

Problema 3.1.9.

Hallar las coordenadas del oscilador armónico tridimensional en función del tiempo.

Problema 3.1.10.

El oscilador del problema 3.1.8 se perturba con un pequeño potencial de la forma $\frac{\lambda}{r^2}$. Hallar la precesión del perihelio en este problema y mostrar que la órbita se puede representar aproximadamente como una elipse que rota lentamente alrededor del origen.

3.2. El problema de Képler

El problema del movimiento en un campo central con potencial $V \propto 1/r$ es aún hoy uno de los más importantes de la física. Todo el problema planetario (y en general la mecánica celeste) gira a su alrededor y el problema de choques de partículas cargadas en la aproximación semiclásica de la mecánica cuántica lo usa en forma esencial. En esta sección discutiremos algunas de sus características más importantes y en la próxima examinaremos su aplicación al choque de partículas cargadas.

3.2.1. Órbitas keplerianas

Comenzaremos por estudiar las órbitas cerradas en un potencial kepleriano atractivo:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (3.22)$$

para el cual la ecuación de la órbita (3.17) se integra fácilmente:

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \int \frac{Ldr}{r^2 \sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{L^2}{r^2}}} \\ &= \arccos \frac{\frac{L}{r} - \frac{m\alpha}{L}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}}} \end{aligned}$$

en donde hemos supuesto $\alpha > 0$.

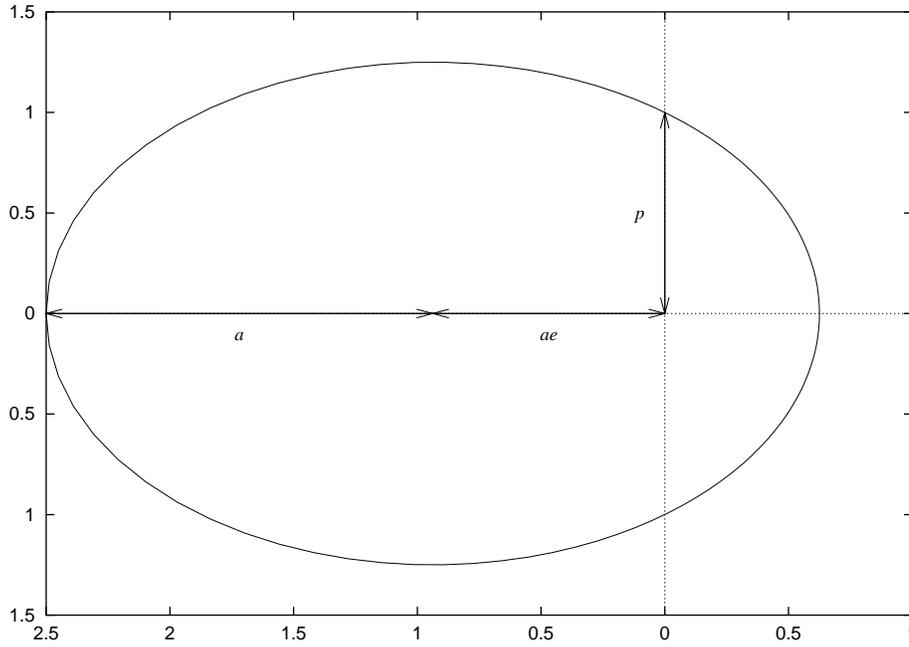


Figura 3.5: Elipse kepleriana

Si se elige el eje x del sistema de coordenadas de manera tal que $\varphi_0 = 0$, obtenemos la ecuación explícita de la órbita:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (3.23)$$

con

$$p = \frac{L^2}{m\alpha} \quad (3.24)$$

y

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \quad (3.25)$$

La ecuación (3.23) representa una cónica de excentricidad e y parámetro (o *latus rectum*) p , con uno de sus focos en el origen (Figura 3.5). Cuando el potencial es atractivo, $\alpha > 0$, hay tres posibilidades:

$$E \begin{cases} > 0, & \text{Hipérbola} \\ = 0, & \text{Parábola} \\ < 0, & \text{Elipse} \end{cases}$$

En el último caso, que corresponde a la Figura 3.5, la elipse tiene los semiejes:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|} \quad (3.26a)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}} \quad (3.26b)$$

Este carácter elíptico de las órbitas acotadas se conoce como *primera ley de Képler*.

La órbita es cerrada cualesquiera sean las condiciones iniciales. Esta notable propiedad del potencial kepleriano se debe a un teorema de conservación peculiar de este potencial (Sección 3.2.3). Las condiciones iniciales sólo determinan la forma y el tamaño de la elipse. El caso $e = 0$ corresponde al mínimo del potencial efectivo V_{eff} :

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2l^2}$$

y a una órbita circular.

Por otra parte, si $\alpha > 0$ las órbitas no pueden ser cerradas y tenemos sólo parábolas (si $E = 0$) o hipérbolas. Todos estos casos se discutirán en los problemas.

3.2.2. Evolución temporal

En los problemas astronómicos, es importante conocer las coordenadas de las partículas en función del tiempo. El periodo del movimiento puede hallarse en forma elemental aplicando la 2.^a ley de Képler (3.12). El tiempo en que el radio vector barrerá la superficie total de la elipse será:

$$T = \frac{2m}{L}S$$

Pero la superficie de la elipse es $S = \pi ab$, y utilizando las ecuaciones (3.26) hallamos:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\pi\alpha}{2} \frac{\sqrt{2m}}{|E|^{\frac{3}{2}}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Esta última ecuación, que conecta el periodo del movimiento con el eje mayor de la órbita es la *tercera ley de Képler*. En el caso planetario, m es la masa reducida del planeta y $\alpha = G_N m_1 m_2$, con lo que se halla:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G_N(m_1 + m_2)} a^3 \quad (3.28)$$

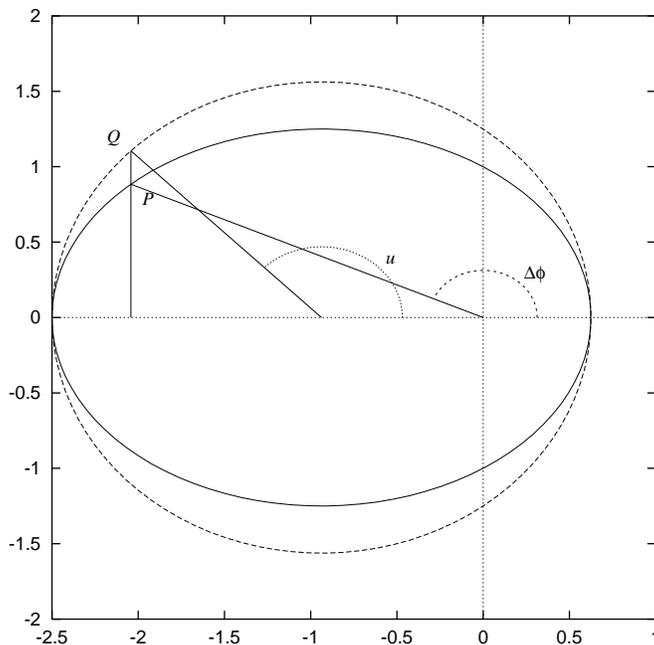


Figura 3.6: Elipse kepleriana

y de esta ecuación se deduce que la constante de proporcionalidad entre los cuadrados del período (sideral) de revolución y los cubos de los ejes mayores es casi la misma para todos los planetas pues la masa solar $m_1 = M_\odot$ es mucho mayor que la masa de los planetas. La precisión de las observaciones astrométricas, sin embargo, es tan grande que es esencial usar la ecuación exacta (3.28). Por otra parte, en un sistema de dos cuerpos (tal como los sistemas estelares) el conocimiento del período y del eje mayor de la elipse pueden usarse para determinar la masa total del sistema.

La determinación del radio en función del tiempo no es tan sencilla y debemos recurrir a la integración de la ecuación de la energía (3.14). Si sustituimos la expresión del impulso angular y de la energía como función del eje mayor y de la excentricidad, obtenemos:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{\frac{1}{2}} \int \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}} \quad (3.29)$$

La constante de integración t_0 , que se conoce como *tiempo de pasaje por el pericentro*, puede elegirse como cero. Para calcular la integral, introduzcamos una variable auxiliar u , llamada la *anomalía excéntrica* en mecánica celeste, a través de la ecuación:

$$r - a = -ae \cos u \quad (3.30a)$$

y en ese caso la integral (3.29) es inmediata:

$$t = \frac{T}{2\pi}(u - \text{sen } u) \quad (3.30b)$$

Las ecuaciones (3.30), conocidas por Képler, representan paraméricamente a la función $r(t)$. El ángulo u tiene una representación geométrica interesante. Tracemos un círculo de radio a concéntrico con la órbita (Figura 3.6) y marquemos el punto Q sobre el círculo con la misma abscisa que el planeta P . El ángulo u entre la dirección del perihelio y el punto Q es la anomalía excéntrica.

No es difícil hallar las coordenadas x e y del planeta en función de u . Examinando la Figura 3.6 proponemos:

$$x = a(\cos u - e) \quad (3.31a)$$

$$y = b \text{sen } u \quad (3.31b)$$

No es difícil probar, usando (3.23), que estas ecuaciones son, en verdad, las correctas expresiones para las coordenadas en función del tiempo.

3.2.3. El vector de Lenz

Hemos mencionado que la clausura de las órbitas keplerianas puede conectarse con una ley de conservación peculiar al potencial (3.22). La cantidad conservada es el *vector de Runge-Lenz*:

$$\mathbf{A} = -\alpha \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{L} \quad (3.32)$$

Es sencillo probar que $\dot{\mathbf{A}}$ se anula. En efecto:

$$\dot{\mathbf{A}} = -\alpha \left[\frac{\mathbf{v}}{r} - \mathbf{r} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right] + \dot{\mathbf{v}} \wedge \mathbf{L}$$

si ahora sustituimos la expresión para el impulso angular (3.8) y la ecuación de movimiento:

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

hallamos $\dot{\mathbf{A}} = 0$.

Para hallar la dirección y módulo del vector de Runge-Lenz multipliquemos su definición (3.32) escalarmente por \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = -\alpha r + \frac{L^2}{m}$$

en donde hemos usado la propiedad cíclica del producto mixto de tres vectores. Si llamamos θ al ángulo entre \mathbf{r} y \mathbf{A} :

$$r = \frac{\frac{L^2}{m}}{\alpha + A \cos \theta} \quad (3.33)$$

y finalmente, comparando esta ecuación con (3.23) hallamos:

$$\mathbf{A} = \alpha e \hat{\mathbf{x}} \quad (3.34)$$

El vector de Lenz, pues, apunta hacia el perihelio y tiene un módulo $|\mathbf{A}| = \alpha e$. Esta propiedad hace interesante el uso del vector de Lenz para estudiar las perturbaciones orbitales generadas por una pequeña fuerza adicional \mathbf{f} :

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f} \quad (3.35)$$

Si ahora repetimos los cálculos de $\dot{\mathbf{L}}$ y de $\dot{\mathbf{A}}$ usando la ecuación (3.35) como ecuación de movimiento hallamos las perturbaciones de las constantes de movimiento:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{f} \quad (3.36a)$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{f} \wedge \mathbf{L} + \mathbf{p} \wedge (\mathbf{r} \wedge \mathbf{f}) \quad (3.36b)$$

La primera ecuación representa el efecto de las cuplas introducidas por la perturbación; la segunda, por otra parte, contiene la *precesión del pericentro* de la órbita kepleriana debido a la perturbación externa \mathbf{f} . Para calcularla, observemos que $\dot{\mathbf{A}}$ contiene el cambio en la excentricidad:

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{A}} = \alpha^2 e \dot{e} \quad (3.37)$$

mientras que la precesión del pericentro es igual a la proyección sobre la dirección ortogonal:

$$e\dot{\varpi} = \frac{\mathbf{L} \wedge \mathbf{A}}{LA} \cdot \dot{\mathbf{A}} \quad (3.38)$$

en donde hemos introducido la notación ϖ para la posición angular del pericentro.

Problemas 3.2

Problema 3.2.1.

Calcular la masa del Sol M_{\odot} sabiendo que la constante de Newton vale $G_N = 6,67 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \text{s}^{-2} \text{g}^{-1}$ y que el eje mayor de la órbita vale $a_{\oplus} = 1,5 \times 10^{13} \text{cm}$.

Problema 3.2.2.

La luna y la tierra giran alrededor de su centro de masas con un periodo $T_S = 27,3$ días. La distancia media de la tierra a la luna es de 60 radios terrestres y el centro de gravedad del sistema se encuentra a .72 radios del centro de la tierra. El radio medio de la tierra vale $R_{\oplus} = 6730 \text{km}$. Calcular las masas de ambos cuerpos.

Problema 3.2.3.

Discutir la dependencia temporal para las órbitas hiperbólicas ($E > 0, \alpha > 0$)

N.º	Nombre	M_i (10^{24} kg)	a (10^{11}) m
1	Mercurio	0.3332	0.5791
2	Venus	4.870	1.082
3	Tierra	6.053	1.496
4	Marte	.6418	2.278
5	Júpiter	1899	7.783
6	Saturno	568.6	14.27
7	Urano	86.82	28.70
8	Neptuno	102.7	45.00

Cuadro 3.1: Datos orbitales de los planetas

Problema 3.2.4.

Discutir la dependencia temporal para las órbitas hiperbólicas ($E = 0, \alpha > 0$)

Problema 3.2.5.

Al potencial kepleriano se le añade una pequeña perturbación $\delta V(r)$. Hallar la precesión del pericentro bajo esta perturbación.

Problema 3.2.6.

La precesión del perihelio de Mercurio se debe a dos contribuciones:

1. La precesión debida a las perturbaciones de otros planetas, con:

$$\delta V_P(r) = - \sum_{i=2}^8 \frac{GM_i}{a_i} \ln \left(1 - \frac{r^2}{a_i^2} \right)$$

2. La corrección que produce la Relatividad General:

$$\delta V_R(r) = - \frac{GM_\odot}{c^2} \frac{a(1 - e^2)}{r^3}$$

Calcular numéricamente la precesión total del perihelio de Mercurio y comparar con el resultado observacional:

$$\dot{\omega} = 575''/\text{siglo}$$

Problema 3.2.7.

Sea $\delta V(r) = -\frac{\beta}{r^2}$. Resolver exactamente la ecuación de la órbita con este potencial perturbador y calcular la precesión del pericentro $\dot{\omega}$.

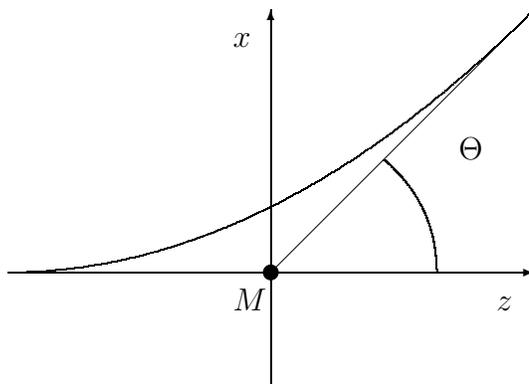


Figura 3.7: Problema típico de dispersión

3.3. Dispersión de Partículas

Los problemas de colisión, en que dos sistemas inicialmente muy alejados entre sí se acercan, interactúan fuertemente y luego vuelven a alejarse, aparecen con mucha frecuencia en la física:

1. las moléculas de un gas lo están haciendo continuamente: el intercambio de energía e impulso en cada choque contribuye a la hidrodinámica del gas;
2. muchos cometas en el sistema solar tienen órbitas hiperbólicas y su movimiento puede describirse como un choque entre el cometa y el Sol;
3. y (¡Dios nos libre!) los encuentros entre automóviles y peatones cuando cambia inesperadamente la luz del semáforo.

A diferencia del movimiento en órbitas acotadas, en los problemas de colisión rara vez interesa la predicción de una única órbita. En cambio, es mucho más interesante estudiar propiedades *estadísticas* de familias interesantes de órbitas, pues a veces de ellas es posible deducir información sobre la estructura del sistema. En este caso, se habla de *problemas de dispersión*. Nos limitaremos al choque de dos partículas que interactúan con fuerzas centrales.

3.3.1. Sección eficaz

Un problema típico de dispersión es el siguiente: sobre un cuerpo de masa M , que llamaremos *blanco*, llega un haz de partículas de masa m , que llamaremos *projectiles*, cuyas trayectorias exactas no se conocen, pero que inicialmente tienen su impulso paralelo al eje z . Estas últimas sufrirán deflexiones en un ángulo Θ respecto de la dirección original del haz (Figura 3.7). Esta situación puede realizarse experimentalmente con mucha precisión y de estos *experimentos de dispersión* es posible sacar conclusiones sobre la estructura del sistema.

Para analizar el fenómeno, examinemos primero el sistema de referencia en que el blanco está inicialmente inmóvil. Este sistema de referencia suele llamarse *sistema de laboratorio* o sistema L. Es tradicional elegir el eje z coincidente con la dirección inicial del haz. El problema de dispersión con fuerzas centrales tiene simetría alrededor del eje z y, por lo tanto, el número de partículas dispersadas en una dirección dada depende sólo del ángulo de dispersión. Sea $dn(\Theta)$ el número de partículas dispersadas dentro de un ángulo sólido $d\Omega = \sin \Theta d\Theta$. Esta cantidad depende, naturalmente, de la intensidad del haz n_0 : el número de partículas por unidad de área. El cociente:

$$\sigma(\Theta) d\Omega = \frac{dn(\Theta)}{n_0} \quad (3.39)$$

se llama *sección eficaz de dispersión* y al ser independiente de la intensidad del haz es característica del sistema de dos cuerpos (m, M). La integral de la ecuación (3.39) sobre toda la esfera se llama la *sección eficaz total* del sistema.

La definición (3.39) corresponde al sistema L. Una definición análoga vale para el sistema CM, que es muy útil para el cálculo teórico de la sección eficaz. En este último, (Sección 1.5.4) ambas partículas se acercan con impulsos iguales y opuestos a lo largo del eje z y luego se apartan formando un ángulo χ con la dirección original de incidencia. Es evidente que ambos sistemas están relacionados por una transformación de Galileo y que la velocidad del sistema CM respecto del sistema L es igual a la velocidad del centro de masas. Esta última, por conservación del impulso vale:

$$V = \frac{m}{m+M} V_i \quad (3.40)$$

donde V_i es la velocidad inicial de la partícula incidente en el sistema L. Evidentemente, V es el módulo de un vector \mathbf{V} dirigido a lo largo del eje z .

Para hallar la conexión entre ambos ángulos de deflexión, observemos que las velocidades finales deben estar conectadas por la transformación de Galileo de velocidad \mathbf{V} :

$$v^{\text{CM}} \sin \chi = v^{\text{L}} \sin \Theta \quad (3.41a)$$

$$v^{\text{CM}} \cos \chi = v^{\text{L}} \cos \Theta - V \quad (3.41b)$$

De las ecuaciones (3.41) y del problema 3.1.1 se halla el ángulo de deflexión en el sistema L en función del ángulo de deflexión en el sistema CM:

$$\tan \Theta = \frac{M \sin \chi}{m + M \cos \chi} \quad (3.42)$$

La conexión entre las secciones eficaces se halla observando que la cantidad $dn(\Theta)$, el número de partículas desviadas en un ángulo sólido dado, no puede depender del sistema de referencia. De esta manera, se encuentra la conexión entre ambas secciones eficaces:

$$\sigma_{\text{L}}(\Theta) \sin \Theta d\Theta = \sigma_{\text{CM}}(\chi) \sin \chi d\chi \quad (3.43)$$

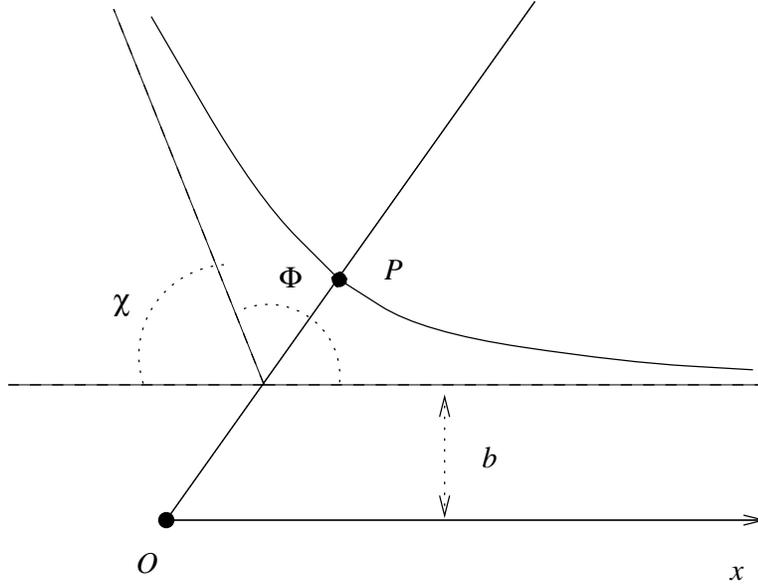


Figura 3.8: Geometría de un problema de dispersión

De la misma manera es posible transformar otras cantidades interesantes para el problema de dispersión de un sistema de referencia al otro.

3.3.2. Cálculo de la sección eficaz

Pasemos ahora a calcular la sección eficaz correspondiente a un potencial dado, trabajando en el sistema CM. De la Figura 3.8 vemos que el ángulo de dispersión es igual a:

$$\chi = |\pi - \Phi| \quad (3.44)$$

donde Φ , el ángulo entre las asíntotas, está dado por la ecuación (3.21), en función del impulso angular y la energía. Por otra parte, en los problemas de dispersión, se conoce usualmente la energía asintótica de la partícula incidente, E_∞ . El impulso angular de la partícula, en general no se conoce, pero es conveniente parametrizarlo con el *parámetro de impacto* b : la distancia mínima a la que pasaría la partícula del centro dispersor si la fuerza central no existiese (Figura 3.21). Si expresamos todo en función de la velocidad asintótica de la partícula v_∞ :

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \quad (3.45a)$$

$$L = mv_\infty b \quad (3.45b)$$

La introducción del parámetro de impacto simplifica el cálculo de la sección eficaz. La energía de las partículas del haz está fijada y por lo tanto sus trayectorias son funciones sólo del parámetro de impacto. Por lo tanto, las partículas con

parámetros de impacto en el intervalo $[b, b + db]$ serán deflectadas en un ángulo comprendido entre $[\chi(b), \chi(b + db)]$. Pero si la intensidad del haz es n_0 , el número de partículas que atraviesan la corona de radio b es:

$$dn = 2\pi b db n_0$$

y por lo tanto

$$\sigma(\chi) = \frac{b}{\text{sen } \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right| \quad (3.46)$$

donde hemos escrito el módulo de la derivada pues ésta puede ser negativa, mientras que $\sigma(\chi)$ es por definición positiva.

3.3.3. Fórmula de Ruthenford

Un caso particular muy importante lo constituye la dispersión por un potencial kepleriano. Los importantes experimentos de dispersión de partículas α por átomos, que llevaron al descubrimiento del núcleo atómico, se analizaron de esta manera.

En el caso de un potencial kepleriano, la integral (3.21) es elemental y vale:

$$\Phi = \text{arc cos } \frac{\frac{\alpha}{mbv_\infty^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mbv_\infty^2}\right)^2}} \quad (3.47)$$

Hemos supuesto que el potencial es repulsivo y hemos reemplazado la energía y el impulso por sus expresiones (3.45). Despejando el parámetro de impacto en función de χ :

$$b^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \cot^2 \frac{\chi}{2}$$

y sustituyendo en (3.46) obtenemos la sección eficaz:

$$\sigma(\chi) = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\chi}{2}} \quad (3.48)$$

Ésta es la famosa fórmula de Ruthenford para la sección eficaz de dispersión por un potencial kepleriano. Tiene una divergencia cuando $\chi = 0$, debida a que el potencial kepleriano tiene alcance infinito. Cualquiera que sea el parámetro de impacto de la partícula incidente, ésta sufre una deflexión aunque pequeña. La acumulación de estas deflexiones de pequeño ángulo producen la divergencia de la sección eficaz. La ecuación (3.48) predice también desviaciones en todos los ángulos, aun hacia atrás $\chi = \pi$. Estas últimas se deben a partículas con pequeños parámetros de impacto, que sufren fuertemente la acción repulsiva del potencial kepleriano.

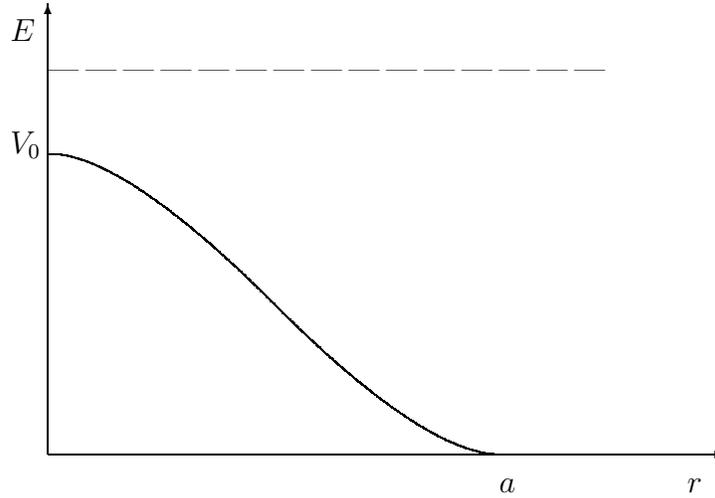


Figura 3.9: Potencial que produce dispersión arcoiris

3.3.4. Fenómenos particulares de dispersión

La expresión (3.46) para la sección eficaz de dispersión puede requerir un tratamiento más cuidadoso en ciertos casos particulares. El examen cualitativo de la integral (3.21) nos permitirá distinguir algunos de estos casos que corresponde a fenómenos particulares importantes de dispersión.

En primer lugar, observemos que la expresión (3.46) diverge cuando el ángulo de deflexión χ tiene un valor estacionario en función de b :

$$\frac{d\chi}{db} = 0$$

La sección eficaz se hace infinita para el valor particular del parámetro de impacto en que esto ocurre. El arcoiris se produce justamente así: una gran intensidad luminosa es dispersada hacia el ángulo sólido en la dirección χ_0 estacionaria, y por analogía se llama a este fenómeno *dispersión arcoiris*.

Un ejemplo sencillo de potencial capaz de producir un arcoiris es el que se muestra en la Figura 3.9, que tiene un máximo acotado V_0 en el origen. Para energías mayores que V_0 el ángulo de deflexión χ se anula cuando $b = 0$ y la partícula pasa por el origen. Lo mismo ocurre cuando $b > a$, el rango del potencial. Entre ambos ceros del ángulo de deflexión debe existir un máximo, por continuidad.

Otro fenómeno similar ocurre cuando el ángulo χ puede cambiar de signo. Puede probarse fácilmente que para que esto suceda, el potencial debe tener una región atractiva. En efecto, consideremos un potencial monótono repulsivo,

normalizado para tender a cero en el infinito. Puesto que el potencial es positivo:

$$\begin{aligned}\Phi &= 2 \int_0^{u_{\min}} \frac{Ldu}{\sqrt{2m(E-V) - L^2u^2}} \\ &< 2 \int_0^{u_{\min}} \frac{Ldu}{\sqrt{2mE - L^2u^2}} \\ &< \pi\end{aligned}$$

y por lo tanto hallamos el resultado “natural” para un potencial repulsivo:

$$0 \leq \Phi \leq \pi \quad (3.49)$$

Esto no es cierto si el potencial tiene no es monótono o si es atractivo: en estos casos el ángulo puede crecer más allá de todo límite o cambiar de signo.

Cuando $\chi = 0$ se presenta el fenómeno de *gloria*: una gran intensidad en partículas dispersadas se proyecta hacia adelante y forma una aureola alrededor de dicha dirección.

Si el potencial tiene un máximo en $r = r_0$ puede presentarse el fenómeno de *orbitaje*. Cuando la energía de la partícula incidente sea próxima a la del máximo la integral se hace muy grande y divergerá para energías iguales al máximo del potencial efectivo. Cuando esto ocurre, el ángulo Φ crece más allá de todo límite y la partícula da vueltas alrededor del origen en una trayectoria espiraloide. Hacia la dirección χ saldrán partículas que hayan girado una o más veces alrededor del origen y cada una de estas órbitas contribuye a la sección eficaz:

$$\sigma(\chi) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{\sin \zeta} \left| \frac{db_m}{d\zeta} \right|_{\zeta=\chi+m\pi} \quad (3.50)$$

La sección eficaz también se hace muy grande para las energías que corresponden al orbitaje.

Problemas 3.3

Problema 3.3.1.

Hallar la transformación de la energía entre los sistemas CM y L.

Problema 3.3.2.

Hallar la expresión explícita para la transformación de la sección eficaz.

Problema 3.3.3.

Calcular la sección eficaz para una *esfera rígida*:

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r < R \\ 0 & r \geq R \end{cases}$$

¿Cuánto vale la sección eficaz total?

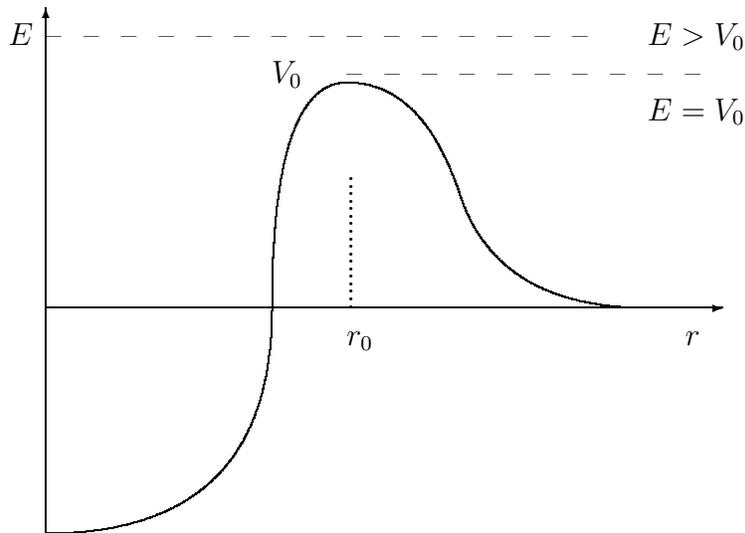


Figura 3.10: Potencial que produce orbitaje

Problema 3.3.4.

Calcular la sección eficaz para un *pozo de potencial*:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < R \\ 0 & r \geq R \end{cases}$$

¿Cuánto vale la sección eficaz total?

Problema 3.3.5.

Calcular la sección eficaz para una *loma cuadrática*:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) & r < R \\ 0 & r \geq R \end{cases}$$

Mostrar explícitamente que se presenta el fenómeno de arcoiris.

Problema 3.3.6.

Discutir la dispersión por el potencial

$$V(r) = V_0 \frac{\sigma}{r} \left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)$$

¿En qué casos se presenta el orbitaje?

Problema 3.3.7.

Un cuerpo esférico de masa M y radio R se mueve a través de una nube homogénea de polvo con velocidad V . Las partículas que chocan se adhieren a la superficie de la esfera y la masa de ésta aumenta con el tiempo. Calcular el ritmo de aumento de la masa $\frac{\dot{M}}{M}$ y del radio de la esfera.

Capítulo 4

Las ecuaciones de Lagrange

Las leyes de Newton que hemos enunciado en el Capítulo 1, aunque muy generales, no son muy cómodas para tratar ciertos problemas físicos, entre los que se incluyen principalmente los de *movimiento vinculado*. Un segundo tipo de problemas que sugieren una formulación diferente de la mecánica es el énfasis puesto por la física moderna en los principios de simetría y las leyes de conservación asociados. La *formulación lagrangeana* de la mecánica, que estudiaremos en este capítulo, intenta facilitar la resolución de ambos problemas: tanto la eliminación de vínculos en un problema mecánico como la introducción evidente de simetrías en el mismo a través de la función lagrangeana.

4.1. Movimiento vinculado

Existe un tipo de interacciones entre cuerpos, las *interacciones de contacto*, cuyo efecto es imponer restricciones en el movimiento. Por ejemplo, las cuentas de un collar están obligadas a moverse a lo largo del hilo, un tren a lo largo de las vías y un buque debe permanecer en la superficie del mar. Tales restricciones se llaman *condiciones de vínculo* y el movimiento bajo las mismas, *movimiento vinculado*.

4.1.1. Vínculos y grados de libertad

Diremos que un sistema tiene f *grados de libertad* si su posición respecto de un sistema de referencia queda determinada por un conjunto de f números reales. Así, el tren tiene un grado de libertad, el buque dos y una partícula libre en el espacio tiene tres grados de libertad. En general, un sistema de n partículas no vinculadas tiene $f = 3n$ grados de libertad. Si entre las coordenadas de un sistema de partículas se verifican r condiciones de la forma:

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = 0 \tag{4.1}$$

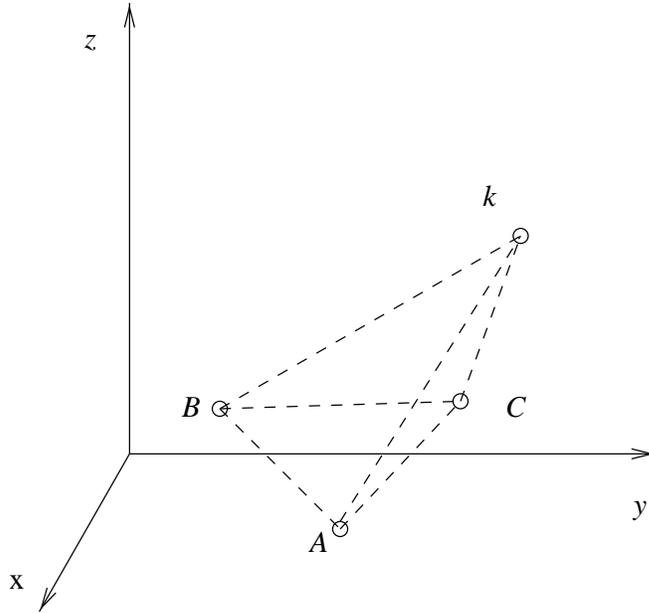


Figura 4.1: Relaciones de vínculo en un cuerpo rígido

el número de grados de libertad del sistema será:

$$f = 3n - r \quad (4.2)$$

Consideremos como ejemplo el *cuerpo rígido*. Éste es un sistema de partículas en el cual la distancia entre dos cualesquiera es constante. Entonces hay $\frac{1}{2}n(n-1)$ condiciones de vínculo de la forma $r_{ij} = c_{ij}$. No todas estas condiciones, sin embargo, son independientes. En realidad, basta con fijar la distancia de una partícula a otras tres, que pueden elegirse arbitrariamente (Figura 4.1). Hay $3n-9$ ecuaciones de este tipo, a las que debemos añadir tres más que fijan las distancias entre las partículas de referencia. En total hay:

$$f = 3n - (3n - 9 + 3) = 6 \quad (4.3)$$

Los vínculos que originan condiciones de la forma (4.1) se llaman *holonomos*. Hay otros tipos de vínculos que no pueden expresarse en la forma (4.1) y que se llaman *anholonomos*. Un ejemplo de vínculo anholonomo lo proporciona una pared rígida situada en el plano $z = 0$. Las trayectorias posibles de una partícula están restringidas por la desigualdad $z \geq 0$.

Otro ejemplo importante de vínculo anholonomos aparecen cuando hay fuerzas de roce en el sistema. Consideraremos como ejemplo un patín, que es un sistema con tres grados de libertad pues necesitamos tres números para especificar su posición: las coordenadas de su centro de masa, (x, y) y el ángulo ϕ que forma el

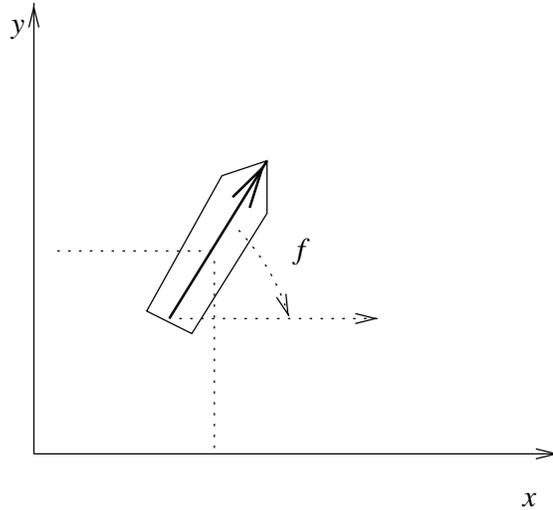


Figura 4.2: Vínculos anholonomos en un patín

eje del patín con el eje x . Sin embargo, las fuerzas de roce con el piso no permiten desplazamientos laterales y en un desplazamiento infinitesimal tendremos la restricción (Figura 4.2):

$$\cos \phi dy - \text{sen } \phi dx = 0 \quad (4.4)$$

Vemos que mientras que el patín es un sistema con tres grados de libertad, en un movimiento infinitesimal se comporta como un sistema con dos grados de libertad. Esto significa que la ecuación (4.4) no puede integrarse independientemente de las ecuaciones de movimiento y llevarse a la forma (4.1). Debemos, pues, resolver simultáneamente las ecuaciones de movimiento y la condición de vínculo (4.4). Esta clase de vínculos anholonomos, que en general se escribirá:

$$\sum_k \Phi_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \cdot d\mathbf{r}_k = 0 \quad (4.5)$$

es típico de los problemas de “rodadura sin deslizamiento”.

4.1.2. Trabajos virtuales

La manera más natural de tratar un problema de vínculos es introducir las *fuerzas de contacto* (o también *fuerzas de vínculo*) existentes entre ambos cuerpos. Pero infortunadamente, éstas son desconocidas y es necesario calcularlas junto con la solución de las ecuaciones de movimiento. Por ejemplo, consideremos una partícula obligada a moverse sobre un anillo circular. En este caso, las fuerzas de vínculo son la fuerza centrífuga de la partícula y la reacción del anillo. Como la fuerza centrífuga depende de la velocidad de la partícula es imposible calcularla hasta no haber resuelto el problema del movimiento.

Es posible formular la mecánica de manera que desaparezcan las fuerzas de vínculo y de esa manera evitar muchas de las complicaciones que traen aparejadas. Comencemos por considerar un sistema en el cual las fuerzas sobre cada una de las partículas que lo componen se anulan $\mathbf{F}_i = 0$. Diremos que este sistema está en *equilibrio* o que es un sistema *estático*. Imaginemos ahora que cada partícula sufre un desplazamiento infinitesimal $\delta\mathbf{r}_i$ compatible con los vínculos. Este desplazamiento, que no debe confundirse con un movimiento *real* del sistema, se llama un *desplazamiento virtual*. El trabajo realizado por los desplazamientos virtuales, llamado *trabajo virtual*, se anula trivialmente:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad (4.6)$$

Ahora bien, en un gran número de sistemas las fuerzas de vínculo son normales a los desplazamientos virtuales y no realizan trabajo. Por ejemplo, si una partícula está forzada a moverse sobre una curva, la fuerza centrífuga es normal a la curva y normal, por lo tanto, al desplazamiento virtual. Los sistemas con fuerzas de roce son ejemplos donde lo anterior no se cumple: las fuerzas de contacto tienen una componente paralela al desplazamiento virtual y producirán trabajo virtual. Si nos restringimos a sistemas libres de roce, las fuerzas de vínculo desaparecen de la ecuación (4.6), y éstas pueden escribirse:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(A)} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad (4.7)$$

en donde las $\mathbf{F}_i^{(A)}$ se llaman las *fuerzas aplicadas* al sistema.

La ecuación (4.7) resume en una forma muy elegante los principios de la estática de partículas vinculadas. Su importancia es tan grande que la enunciaremos como un principio:

Principio 4.1 (Trabajos virtuales).

Las fuerzas aplicadas a los sistemas vinculados satisfacen la ecuación (4.7), en donde los desplazamientos virtuales son compatibles con los vínculos.

Éste es un principio de gran generalidad, pues las fuerzas de roce pueden incluirse entre las fuerzas aplicadas.

Como un ejemplo sencillo, apliquemos la ecuación (4.7) a la palanca (Figura 4.3). Ésta consiste en un cuerpo rígido que puede girar alrededor de un punto llamado *punto de apoyo* A . Sobre los puntos B y C , situados a distancia l_1 y l_2 del punto de apoyo se aplican sendas fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 . Hallaremos las condiciones que deben satisfacer las fuerzas en equilibrio usando el principio de trabajos virtuales.

Un desplazamiento virtual compatible con los vínculos es una rotación en un ángulo $\delta\phi$ alrededor del punto de apoyo. Los puntos B y C se desplazarán una distancia:

$$\begin{aligned} \delta r_B &= -l_1 \delta\phi \\ \delta r_C &= l_2 \delta\phi \end{aligned}$$

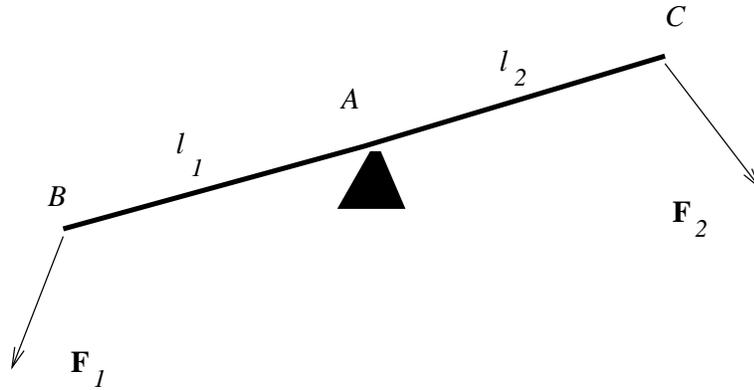


Figura 4.3: Equilibrio en una palanca

en una dirección normal a los *brazos de palanca* l_1 y l_2 . La ecuación (4.7) se reduce, en este caso a:

$$(F_1^n l_1 - F_2^n l_2) \delta\phi = 0$$

en donde F_i^n es la componente de la fuerza normal al brazo de palanca. Finalmente, puesto que $\delta\phi$ es arbitrario:

$$F_1^n l_1 = F_2^n l_2 \quad (4.8)$$

que es la *ley de Arquímedes*: los momentos de las fuerzas respecto del punto de apoyo deben ser iguales.

La fuerza de vínculo, en este caso la reacción del punto de apoyo, ha desaparecido completamente del problema.

4.1.3. El principio de d'Alembert

La generalización del principio de trabajos virtuales a la dinámica es inmediata. Escribamos la ley dinámica como:

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0 \quad (4.9)$$

e introduzcamos la noción de *fuerza inercial* $-\dot{\mathbf{p}}$. El ejemplo más conocido de fuerza inercial es la fuerza centrífuga. En este caso hay una aceleración dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria y la fuerza inercial correspondiente, cuyo módulo es:

$$|\mathbf{F}_c| = -ma_c = -m \frac{v^2}{\rho} \quad (4.10)$$

apunta en dirección opuesta al centro de curvatura. Otro ejemplo de fuerzas inerciales lo dan las frenadas de un automóvil: los pasajeros se sienten empujados hacia adelante.

Las fuerzas inerciales se manifiestan, por lo general, en sistemas de referencia no inerciales. Por ejemplo, en el caso de una frenada brusca el pasajero experimenta la fuerza inercial porque está vinculado (por las fuerzas de roce) al automóvil, que es un sistema no inercial. Con respecto al camino, que es un sistema inercial, el pasajero tiende a moverse con velocidad constante hasta que es detenido por las fuerzas de roce. Por esta razón, las fuerzas inerciales suelen llamarse fuerzas ficticias, pero este nombre es inapropiado: un lavarropas centrífugo expelle el agua por acción de la fuerza centrífuga y una frenada muy brusca puede terminar con un chichón real en la cabeza por acción de la “fuerza ficticia”.

Con la introducción de fuerzas inerciales la ley dinámica se reduce, formalmente, a una condición de equilibrio estático. Podemos, pues, aplicar el principio de trabajos virtuales a este sistema. Para hacerlo, “congelemos” el movimiento del sistema y apliquemos un desplazamiento virtual a cada partícula. La imposición del principio de trabajos virtuales conduce a:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(A)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (4.11)$$

Nuevamente estamos frente a una ecuación de gran importancia pues resume las leyes de la mecánica de sistemas vinculados y la enunciaremos como un principio:

Principio 4.2 (de d’Alembert).

Un sistema mecánico arbitrario satisface la ecuación (4.11), en donde los desplazamientos virtuales son compatibles con los vínculos.

Podemos enunciarlo también como que las fuerzas aplicadas están en equilibrio con las inerciales.

4.1.4. Ejemplos

Examinemos algunos ejemplos de aplicación del principio de d’Alembert a sistemas vinculados.

Máquina de Atwood

Como un primer ejemplo, examinemos el movimiento de una máquina de Atwood (Figura 4.4). Ésta consiste en una polea de radio R y masa despreciable de la que cuelgan dos masas m_1 y m_2 . La aplicación del principio de d’Alembert nos da la condición:

$$(m_1 g - m_1 \ddot{z}_1) \delta z_1 + (m_2 g - m_2 \ddot{z}_2) \delta z_2 = 0 \quad (4.12)$$

La condición de vínculo es:

$$z_1 + z_2 + \pi R = L \quad (4.13)$$

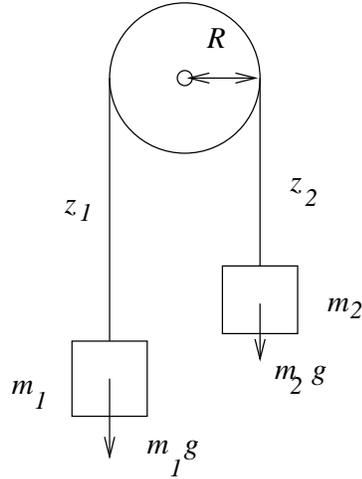


Figura 4.4: Esquema de una máquina de Atwood

dónde L es la longitud del hilo; y la condición de compatibilidad de los desplazamientos con los vínculos es:

$$\delta z_1 = -\delta z_2 \quad (4.14)$$

De las ecuaciones (4.12), (4.13) y (4.14) obtenemos la ecuación de movimiento para el sistema:

$$(m_1 + m_2)\ddot{z}_1 = (m_1 - m_2)g \quad (4.15)$$

En esta última ecuación la tensión del hilo, que es la fuerza de vínculo, ha desaparecido por completo.

Movimiento sobre una curva

Otro ejemplo importante es el de una partícula forzada a moverse siguiendo una curva dada. En este caso la condición de vínculo puede representarse convenientemente en forma paramétrica:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi) \quad (4.16)$$

Para este ejemplo, el principio de d'Alembert da la condición:

$$(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{p}}) \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (4.17)$$

y el desplazamiento será compatible con los vínculos si se produce a lo largo de la curva:

$$\delta \mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} \delta \xi \quad (4.18)$$

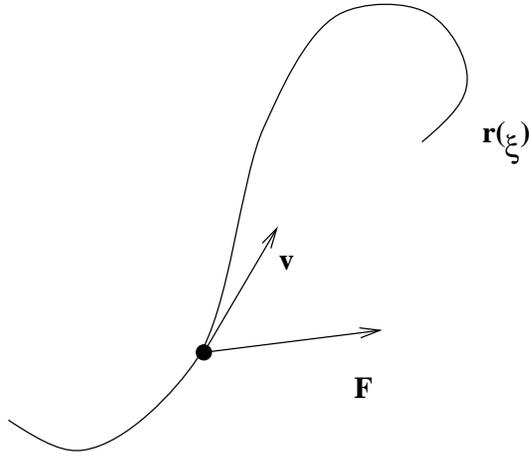


Figura 4.5: Movimiento sobre una curva

Como $\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}$ es proporcional al versor tangente a la trayectoria \mathbf{t} , podemos escribir la ecuación anterior en la forma:

$$(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{t} = 0$$

o sea

$$F_t = m\dot{v}_t \quad (4.19)$$

en donde el subíndice indica la componente tangencial del vector. Todavía es posible simplificar más la ecuación (4.19) utilizando:

$$v = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} \right| \frac{d\xi}{dt} = T(\xi)\dot{\xi}$$

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dT}{d\xi}\dot{\xi}^2 + T(\xi)\ddot{\xi}$$

para obtener una ecuación diferencial para el parámetro ξ .

El péndulo

El ejemplo clásico de movimiento sobre una curva prefijada es el péndulo simple (Figura 4.6). El hilo de suspensión obliga a la partícula a moverse sobre una circunferencia de centro O y radio l . Utilicemos el apartamiento del péndulo de la vertical θ como parámetro. La componente tangencial de la fuerza es:

$$F_t = -mg \operatorname{sen} \theta$$

y la componente tangencial de la aceleración es:

$$a_t = l\ddot{\theta}$$

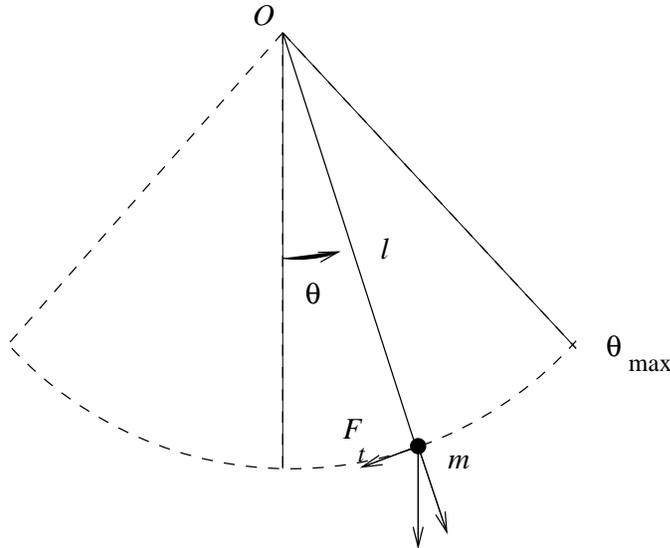


Figura 4.6: Péndulo ideal

De aquí deducimos la ecuación de movimiento:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (4.20)$$

La integración de esta ecuación no puede hacerse en términos de funciones elementales y conduce a integrales elípticas. Para oscilaciones de pequeña amplitud puede usarse el método de Bogoljubov-Krylov, desarrollando el seno en serie de Taylor:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots \right)$$

Al orden más bajo, el periodo de oscilación es independiente de la amplitud θ_{\max} (ley de isocronía de Galileo) y está dada por la fórmula conocida:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

4.1.5. Multiplicadores de Lagrange

Aplicamos el principio de d'Alembert para obtener ecuaciones de movimiento generales en presencia de vínculos. La dificultad para hacerlo es que los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{r}_k$ no son independientes pues deben ser compatibles con los vínculos. Así, si tenemos r condiciones de vínculo holonomos:

$$\Phi_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = 0 \quad (4.21)$$

los desplazamientos virtuales estarán ligados por la condición:

$$\sum_k \nabla_k \Phi_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad (4.22)$$

La misma forma tienen las restricciones introducidas por vínculos anholonomos.

Ahora bien, la existencia de las restricciones (4.22) introduce la siguiente dificultad. Si en el principio de d'Alembert (4.11) los desplazamientos virtuales fueran independientes, cada uno de los términos debe anularse y por lo tanto se obtienen las ecuaciones newtonianas del movimiento $\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k$. Pero en presencia de vínculos los desplazamientos virtuales están sujetos a las restricciones:

$$\sum_k \Phi_{ik} \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (4.23)$$

Una forma muy elegante de obtener las ecuaciones generales de movimiento es introducir los *multiplicadores de Lagrange*. Multipliquemos cada una de las ecuaciones (4.23) por una función *arbitraria* λ_i y sumemos a la (4.11). Obtenemos:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(A)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \lambda_i \sum_k \Phi_{ik} \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$$

o también, reordenando ligeramente:

$$\sum_k (\mathbf{F}_i^{(A)} - \dot{\mathbf{p}}_i + \sum_i \lambda_i \Phi_{ik}) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad (4.24)$$

Con la introducción de los multiplicadores de Lagrange existen suficientes parámetros libres como para tratar a los desplazamientos virtuales como cantidades independientes. De este modo hallamos las *ecuaciones de Lagrange de primera especie*:

$$\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_i \lambda_i \Phi_{ik} \quad (4.25)$$

Este es un sistema de $3n$ ecuaciones diferenciales que, junto con las r condiciones de vínculo nos permiten determinar las $3n + r$ incógnitas \mathbf{r}_k y λ_i . Las ecuaciones (4.25) muestran que los multiplicadores de Lagrange son las intensidades de las fuerzas de vínculo, ¡que de este modo vuelven a entrar por la puerta trasera! La ventaja de las ecuaciones de Lagrange de 1.^a especie es que proporcionan un tratamiento muy elegante de las mismas.

Como un ejemplo, retomemos el tratamiento de la máquina de Atwood. Introduzcamos un multiplicador de Lagrange para tratar las fuerzas de vínculo. Hallamos:

$$(m_1 g - m_1 \ddot{z}_1) \delta z_1 + (m_2 g - m_2 \ddot{z}_2) \delta z_2 + \lambda (\delta z_1 + \delta z_2) = 0 \quad (4.26)$$

De esta ecuación obtenemos las ecuaciones de Lagrange de 1.^a especie:

$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g + \lambda \quad (4.27a)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g + \lambda \quad (4.27b)$$

que junto con la ecuación de vínculo (4.13) permiten resolver el problema. En particular, de las ecuaciones (4.27) y (4.13) hallamos fácilmente el multiplicador de Lagrange:

$$\lambda = -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)g \quad (4.28)$$

que expresa el resultado intuitivo: la tensión de la cuerda es igual y opuesta al peso de las masas.

Problemas 4.1

Problema 4.1.1.

Hallar las condiciones de vínculo anholonomo en el caso de una esfera que rueda sobre un plano.

Problema 4.1.2.

Lo mismo para una rueda cuyo eje se mantiene en posición vertical.

Problema 4.1.3.

Aplicar el principio de trabajos virtuales a los sistemas de la Figura 4.7. ¿Cuáles son las aceleraciones si los sistemas se encuentran fuera del equilibrio?

Problema 4.1.4 (Balanza de Poggendorf).

De un brazo de una balanza cuelga una máquina de Atwood, cuya polea se encuentra trabada. Del otro brazo cuelga una masa que equilibra la masa de la máquina de Atwood. En el instante $t = 0$ el sistema se encuentra en reposo y se destraba la polea de la máquina de Atwood. Hallar las aceleraciones presentes en el sistema en ese instante. ¿Se desequilibra la balanza?

Problema 4.1.5.

Estudiar las pequeñas oscilaciones de una balanza alrededor de su posición de equilibrio.

Problema 4.1.6.

Una partícula cae desde una altura h a lo largo de un alambre en forma de hélice circular de radio R y paso d . Hallar el tiempo de caída de la partícula.

Problema 4.1.7 (Péndulo cicloidal).

Una partícula se mueve bajo la acción de la gravedad siguiendo una trayectoria cicloidal. Probar que el periodo de oscilación de la partícula es independiente de la amplitud de las oscilaciones.

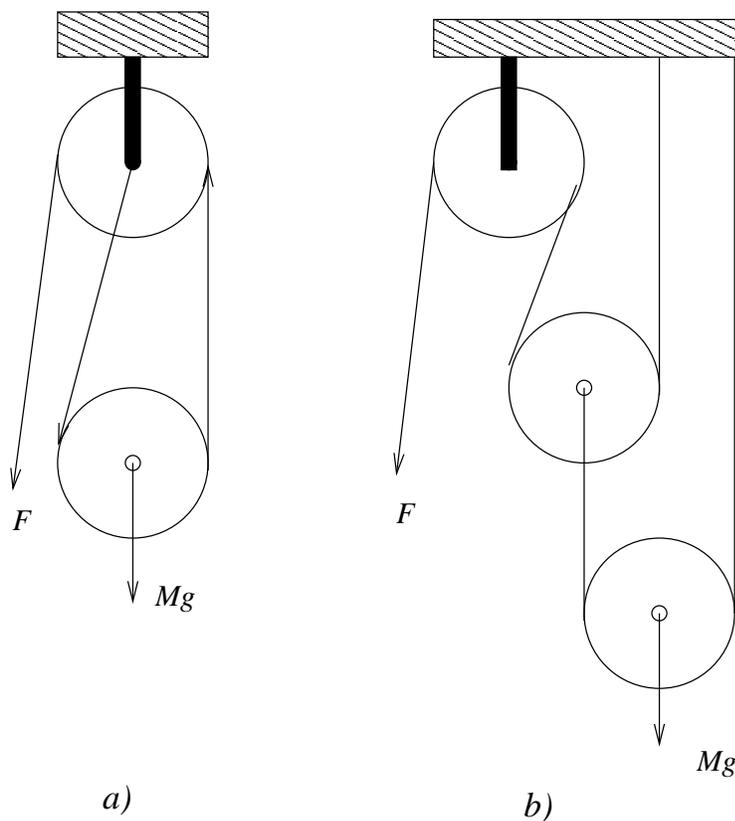


Figura 4.7: Problemas sobre trabajos virtuales

4.2. El Principio de Mínima Acción

El principio de d’Alembert, que hemos estudiado en la Sección 4.1 es una poderosa herramienta para tratar problemas de movimiento vinculado. En su forma original tiene el inconveniente de que las variaciones $\delta \mathbf{r}_i$ no son independientes entre sí pues deben satisfacer las condiciones de vínculo. La eliminación de estas variaciones es un proceso engorroso y resulta conveniente cambiar la formulación del principio de d’Alembert para obtener una formulación más elegante.

4.2.1. Lagrangeano y acción

Desarrollaremos la nueva formulación partiendo de la ecuación fundamental del Principio de d’Alembert:

$$\sum_k (\mathbf{F}_k^{(A)} - \dot{\mathbf{p}}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad (4.29)$$

En esta ecuación, los desplazamientos virtuales se efectúan “congelando” el sistema; es decir, variamos su configuración instantánea. Para cada instante ten-

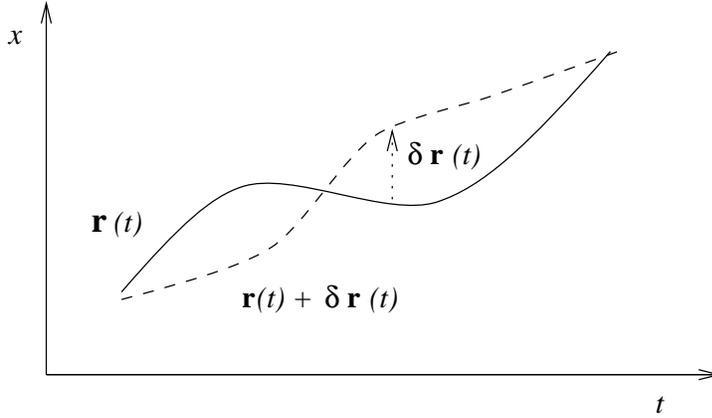


Figura 4.8: Variación de una trayectoria

Para cada instante de tiempo, tendremos un desplazamiento distinto $\delta \mathbf{r}_k(t)$, y llamaremos a estas funciones del tiempo la *variación de la trayectoria*. Para cada partícula del sistema tendremos, entonces, su trayectoria real $\mathbf{r}_k(t)$ y su *trayectoria variada* $\mathbf{r}_k(t) + \delta \mathbf{r}_k(t)$.

Para cada instante, tenemos una ecuación de la forma (4.29). Sintetizaremos todas estas ecuaciones en una sola integrando entre los instantes inicial y final t_0 y t_1 :

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_k (\mathbf{F}_k^{(A)} - \dot{\mathbf{p}}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad (4.30)$$

Ahora bien, la cantidad:

$$\sum_k \mathbf{F}_k^{(A)} \cdot \delta \mathbf{r}_k = \delta W(t) \quad (4.31)$$

es el trabajo virtual realizado por las fuerzas aplicadas al variar la trayectoria en el instante t . En el importantísimo caso particular de una fuerza conservativa:

$$\delta W = -\delta V(\mathbf{r}) \quad (4.32)$$

en donde

$$\delta V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - V(\mathbf{r})$$

es la variación de la energía potencial bajo un desplazamiento virtual.

El segundo término de (4.30), que es la integral del trabajo virtual realizado por las fuerzas inerciales, puede transformarse integrando por partes:

$$-\int_{t_0}^{t_1} dt \dot{\mathbf{p}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = -\mathbf{p}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{p}_k \cdot \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_k dt \quad (4.33)$$

Hasta aquí los $\delta \mathbf{r}_k$ son arbitrarios, salvo la restricción de que sean compatibles con los vínculos. impondremos, además, que la variación se anule en los extremos

del intervalo:

$$\delta \mathbf{r}_k(t_1) = \delta \mathbf{r}_k(t_0) = 0,$$

restricción que nos garantiza que la trayectoria variada coincide con la real en esos instantes. En estas condiciones el primer término de (4.33) se anula y el segundo lo simplificamos observando que:

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_k = \delta \dot{\mathbf{r}}_k$$

es la variación de la velocidad de la partícula, con lo que obtenemos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_k \mathbf{p}_k \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_k dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_k dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta T(t) dt \quad (4.34)$$

Finalmente, reemplazando (4.34) y (4.32) en (4.30) hallamos la condición:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta V) dt = 0$$

que enunciaremos como un principio:

Principio 4.3 (de Hamilton).

Un sistema mecánico conservativo debe satisfacer la condición

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0 \quad (4.35)$$

para las trayectorias reales de nuestro sistema.

La ecuación (4.35) se conoce también con el nombre de *Principio de Mínima Acción* o *Principio de Hamilton*. La cantidad:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt \quad (4.36)$$

se llama *acción* y la función

$$L = T - V \quad (4.37)$$

el *lagrangeano* del sistema.

Aclaremos algunos puntos conectados con la ecuación (4.35). En primer lugar, observemos que representa una *condición de extremo*. Para verificarlo, consideremos un sistema formado por una única partícula que se mueve sobre el eje x y aproximemos la integral (4.36) como una suma de Riemann:

$$S \simeq \sum_{i=0}^n L(t_i) \tau \quad (4.38)$$

en donde τ es un intervalo muy pequeño que haremos tender a cero. La expresión (4.38) es una función de $n + 1$ variables: las coordenadas de las partículas en los instantes t_0, \dots, t_n :

$$S(x_0, \dots, x_n)$$

Pero esta función de $n + 1$ variables tendrá un extremo si un pequeño cambio en las variables no produce cambios de primer orden en la función:

$$\delta S = S(x_0 + \delta x_0, \dots, x_n + \delta x_n) - S(x_0, \dots, x_n) = 0$$

Si ahora hacemos tender τ a cero, el número de variables tiende a infinito y obtenemos la condición (4.35). Una cantidad como (4.36) que a cada función de un conjunto le hace corresponder un número real se llama un *funcional* y es una generalización de la noción de función de varias variables reales.

Por otra parte, el extremo de la acción debe ser un mínimo, pues siempre es posible incrementar la acción sumando a la trayectoria una variación sinusoidal que incrementará la energía cinética. Resumiendo: la trayectoria real de un sistema entre dos puntos es la que hace mínima la acción.

Observemos, en segundo lugar, que el lagrangeano de un sistema mecánico no es único. Siempre es posible sumarle al derivada con respecto del tiempo de una función arbitraria, pues como las variaciones se anulan en los extremos del intervalo también se anula su contribución.

Si las fuerzas no son conservativas, el principio de mínima acción toma la forma:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta W) dt = 0 \quad (4.39)$$

que es importante cuando hay fuerzas de roce. Salvo algún caso excepcional, nos limitaremos a sistemas que admiten un lagrangeano y por lo tanto sin fuerzas de roce.

4.2.2. Coordenadas generalizadas

El principio de mínima acción (4.35) es una formulación completamente general de la ley dinámica y por lo tanto contiene las ecuaciones de movimiento de las partículas así como las restricciones introducidas por los vínculos. El paso siguiente será eliminar las restricciones que éstas introducen en las variaciones $\delta \mathbf{r}_k$.

Esto puede hacerse mediante el uso de multiplicadores de Lagrange, como en la Sección 4.1.5, pero en el caso de vínculos holonomos existe una manera aún más elegante de lograrlo. Comencemos examiando un ejemplo sencillo: el movimiento de una única partícula sometida a una condición de vínculo:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(x, y, z) = 0 \quad (4.40)$$

La condición expresa que la partícula está obligada a moverse sobre una superficie definida por la ecuación (4.40). Podemos expresar esta condición de otra manera con una representación paramétrica de la superficie:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad (4.41)$$

Lo mismo puede hacerse si la partícula se mueve sobre una curva (Cf. Sección 4.1.4). Los parámetros u, v constituyen un sistema de *coordenadas generalizadas* sobre la superficie y es natural intentar describir el movimiento de la partícula en estas coordenadas. Así, si la partícula está forzada a moverse sobre una esfera será natural usar latitud y longitud de la partícula como coordenadas.

Para generalizar estas ideas a un sistema de n partículas, imaginemos un espacio de $3n$ dimensiones que llamaremos el *espacio de configuración* del sistema. Un punto en el espacio de configuración queda determinado por las $3n$ coordenadas:

$$\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$$

y por lo tanto cada punto en el espacio de configuración representa una posición del sistema.

El espacio de configuración es un caso particular de una *variedad diferenciable*. Una variedad diferenciable M es un espacio topológico que satisface las siguientes propiedades:

1. M es un espacio de Hausdorff;
2. M tiene una base de abiertos numerable;
3. M es localmente euclídeo, es decir, para cada conjunto abierto $A \subset M$ existe un subconjunto abierto $A' \subset E^n$ tal que $A' = \psi(A)$;
4. las funciones $\psi : M \rightarrow E^n$ son difeomorfismos: biyectivas, continuas y diferenciables.

Si ahora existen r condiciones de vínculo holonomas:

$$\Phi_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = 0$$

el movimiento del punto representativo del sistema estará restringido a una variedad diferenciable de $3n - r = f$ dimensiones. Como en el espacio tridimensional, podemos introducir un sistema de coordenadas generalizadas en esta variedad usando una representación paramétrica de la misma. Llamaremos $\{q_i\}$ al conjunto de f parámetros independientes o coordenadas generalizadas. También será conveniente llamar *espacio de configuración* a la variedad parametrizada por las q_i , ya que el punto representativo está obligado a moverse sobre ella.

Si del espacio de configuración descendemos al espacio tridimensional ordinario, las coordenadas físicas de las partículas se expresan en la forma:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_f) \quad (4.42)$$

y con estas ecuaciones podemos expresar el lagrangeano como función de las q_i y de las *velocidades generalizadas* \dot{q}_i . La energía potencial se transforma de manera inmediata. Transformemos en cambio la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 \quad (4.43)$$

Derivando (4.42):

$$\dot{\mathbf{r}}_k = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (4.44)$$

que sustituido en (4.43) da:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (4.45)$$

en donde

$$g_{ij}(q) = \sum_k m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \quad (4.46)$$

De este modo, el lagrangeano queda expresado como una función general de las coordenadas y velocidades generalizadas:

$$L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) = L(q, \dot{q}) \quad (4.47)$$

La energía cinética tiene una interpretación geométrica muy elegante en el espacio de configuración. En efecto:

$$(dt)^2 \frac{2T}{M} = \sum_k \frac{m_k}{M} (d\mathbf{r}_k)^2 \quad (4.48)$$

en donde M es la masa total del sistema, representa la distancia entre dos puntos del espacio de configuración si las unidades de longitud sobre distintos ejes difieren en los factores de escala $\frac{m_k}{M}$. Incluyendo ahora las restricciones impuestas por los vínculos, la expresión $(dt)^2 \frac{2T}{M}$ representa la distancia entre dos puntos a lo largo de la variedad definida por las condiciones de vínculo.

4.2.3. Las ecuaciones de Lagrange

Con la introducción de coordenadas generalizadas estamos en condiciones de resolver nuestro problema: hallar ecuaciones de movimiento para sistemas con vínculos holonomos. La búsqueda de una función que haga mínimo un funcional de la forma:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}) dt \quad (4.49)$$

se conoce en matemáticas como *cálculo de variaciones*. Sus aplicaciones son, obviamente importantes: la determinación de curvas de longitud mínima entre dos puntos o *curvas geodésicas*, es un ejemplo. En ese caso, si t es el parámetro que describe la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, el núcleo del funcional será:

$$L = \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2}$$

El uso de coordenadas generalizadas puede ayudar a resolver estos problemas. En los problemas de esta sección damos algunos ejemplos interesantes de cálculo de variaciones.

Para hallar el mínimo de la acción debemos anular su variación, la que obtendremos variando cada una de las coordenadas generalizadas. La variación de la acción será:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt \quad (4.50)$$

Integrando por partes el primer término de (4.50), y recordando que las variaciones se anulan en los extremos, se encuentra:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0$$

Ahora bien, como las variaciones δq_i son arbitrarias e independientes, la integral sólo puede anularse si se anulan separadamente cada uno de los factores entre paréntesis. Obtenemos así las *ecuaciones de Lagrange*:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (4.51)$$

que son las ecuaciones de movimiento expresadas en coordenadas generalizadas. De su deducción concluimos que conservan su forma (o que son *covariantes*) bajo un cambio de coordenadas de la forma:

$$q'_i = q'_i(q_1, \dots, q_f)$$

que es, tal vez, su propiedad más importante.

Podemos escribir (4.51) en una forma semejante a la ley de Newton si introducimos los *impulsos generalizados*:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (4.52)$$

y las *fuerzas generalizadas*:

$$Q_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (4.53)$$

con lo que las ecuaciones de Lagrange toman la forma:

$$\dot{p}_i = Q_i \quad (4.54)$$

En general, los impulsos generalizados dependen de las coordenadas a través de las funciones $g_{ij}(q)$. Por la misma razón, las fuerzas generalizadas dependen de las velocidades. Estos términos pueden considerarse “fuerzas ficticias”, cuyo origen proviene del uso de coordenadas generalizadas.

Si en el sistema hay fuerzas no conservativas, es conveniente introducir las fuerzas generalizadas, de manera que:

$$\delta W = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_j Q_j \delta q_j \quad (4.55)$$

De la comparación de ambas expresiones deducimos la forma de las fuerzas generalizadas:

$$Q_j = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \quad (4.56)$$

4.2.4. Movimiento en un campo central

Apliquemos la teoría desarrollada en las secciones anteriores al movimiento de una partícula en un campo central (Sección 3.1). Ya hemos visto que es conveniente usar coordenadas polares para resolver este problema. Un breve repaso de los resultados de la Sección 3.1 nos muestra que el lagrangeano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r) \quad (4.57)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento calculemos:

$$Q_r = \frac{\partial L}{\partial r} = -\frac{dV}{dr} + mr\dot{\phi}^2$$

$$p_r = m\dot{r}$$

y la ecuación “radial” de movimiento resulta:

$$m\ddot{r} = -\frac{dV}{dr} + mr\dot{\phi}^2 \quad (4.58)$$

Como habíamos mencionado antes, en esta ecuación la fuerza no es sólo el gradiente del potencial. Tenemos además el término:

$$mr\dot{\phi}^2 = \frac{mv_t^2}{r}$$

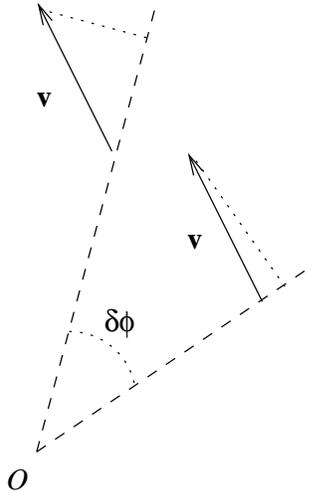


Figura 4.9: Variación de las componentes de un vector en coordenadas polares

que es la fuerza centrífuga. El origen de este término proviene del uso de un sistema de coordenadas no cartesiano: al desplazar el vector velocidad de un punto a otro próximo, su proyección en la dirección radial varía en (Figura 4.9):

$$\delta v = \dot{r}(\cos \delta\phi - 1) + r\dot{\phi} \sin \delta\phi = r\dot{\phi}^2 dt$$

Esta variación del vector se debe a la variación de la dirección de los ejes coordenados y representa una aceleración adicional que debe descontarse de la variación total de la velocidad. De allí que:

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{1}{m} \frac{dV}{dr}$$

sea la ecuación de movimiento para el radio vector.

Consideremos ahora la ecuación de Lagrange para ϕ . Las derivadas necesarias son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= mr^2\dot{\phi} \end{aligned}$$

y por lo tanto, la ecuación de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0$$

que se integra inmediatamente para dar:

$$mr^2\dot{\phi} = L \tag{4.59}$$

que es la ley de conservación del impulso angular. En la formulación lagrangeana, esta ley de conservación surge de la independencia del lagrangeano de la variable angular ϕ .

Una variable que no figura en el lagrangeano (aunque sí su derivada temporal) se llama una *variable cíclica*. Cada variable cíclica da lugar a una ley de conservación:

$$\dot{p}_c = 0$$

dónde

$$p_c = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c}$$

es el impulso generalizado asociado a la variable q_c . Veremos en la Sección 4.3 que la presencia de variables cíclicas refleja la existencia de simetrías en el lagrangeano; en este caso la invarianza bajo rotaciones alrededor del eje z .

4.2.5. Potenciales generalizados

La gran generalidad del principio de mínima acción queda demostrada con la introducción de *potenciales generalizados* $U(q, \dot{q})$, que dependen de las velocidades. La única condición que deben cumplir es que:

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q, \dot{q}) \quad (4.60a)$$

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \quad (4.60b)$$

Un ejemplo importante de potencial generalizado puede introducirse para el movimiento de una partícula en un campo electromagnético. La fuerza de Lorentz sobre una partícula de carga e es igual a:

$$\mathbf{F}_L = e \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \right] \quad (4.61)$$

Ahora bien, el campo electromagnético puede expresarse a través de dos potenciales: el *potencial escalar* ϕ y el *potencial vectorial* \mathbf{A} . Las expresiones correspondientes:

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (4.62a)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.62b)$$

satisfacen idénticamente las ecuaciones de Maxwell homogéneas:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

No es difícil demostrar que la fuerza de Lorentz (4.61) puede expresarse en términos del potencial generalizado:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = e \left(\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \right) \quad (4.63)$$

y el lagrangeano de una partícula en un campo electromagnético toma la forma:

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - e \left(\phi - \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \right) \quad (4.64)$$

Es fácil verificar que el lagrangeano (4.64) describe correctamente las ecuaciones de movimiento de una partícula en un campo electromagnético.

Problemas 4.2

Problema 4.2.1.

Expresar la energía cinética de una partícula en los siguientes sistemas de coordenadas:

1. Coordenadas parabólicas planas
2. Coordenadas esféricas.
3. Coordenadas elipsoidales

Problema 4.2.2.

Hallar el lagrangeano de los siguientes sistemas:

1. Péndulo simple
2. Péndulo cicloidal
3. Partícula que cae a lo largo de un alambre helicoidal.

Problema 4.2.3.

Hallar el lagrangeano de los siguientes sistemas:

1. Péndulo esférico
2. Péndulo doble (Figura 4.10).

Problema 4.2.4. 1. Probar que las geodésicas del plano son las líneas rectas. Trabajar en coordenadas cartesianas.

2. Resolver el mismo problema usando coordenadas polares.

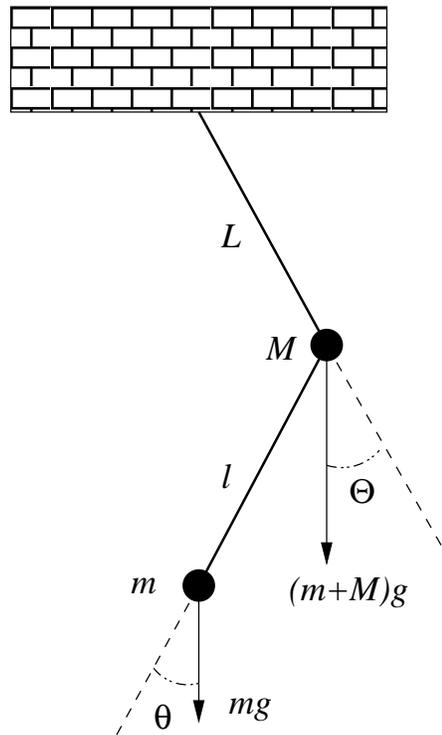


Figura 4.10: Coordenadas generalizadas para el péndulo doble

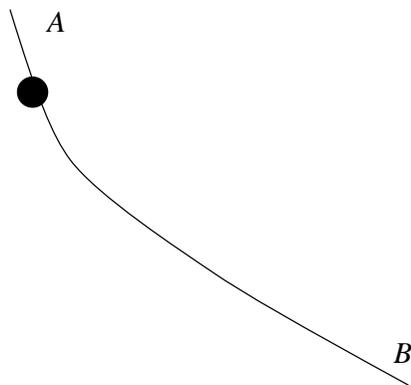


Figura 4.11: Problema de la braquistócrona

Problema 4.2.5.

Hallar las geodésicas de una superficie esférica.

Problema 4.2.6 (Problema de la braquistócrona).

Hallar la curva que debe seguir una partícula para descender entre dos puntos A y B en tiempo mínimo (Figura 4.11).

Problema 4.2.7 (Catenaria).

Hallar la forma de una cadena suspendida entre dos puntos A y B .

Problema 4.2.8.

En el instante $t = 0$ se deja caer una partícula desde el punto $x = 0$, que llega al punto $x = x_0$ en el instante $t = t_0$.

1. Si se supone que el movimiento de la partícula puede describirse con un polinomio cúbico, hallar las relaciones que deben satisfacer los coeficientes de:

$$x = a + bt + ct^2 + dt^3$$

para que se cumplan las condiciones inicial y final.

2. Calcular la acción para el movimiento:

$$S = \int_0^{t_0} L dt$$

con

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx$$

como función de los coeficientes indeterminados del polinomio.

3. Minimizar la acción (sujeta, eventualmente a alguna condición), hallar los coeficientes del polinomio y comparar con la solución elemental del problema.

Problema 4.2.9.

Probar que el lagrangeano (4.64) origina las ecuaciones de movimiento para una partícula en un campo electromagnético.

4.3. Simetrías y leyes de conservación

Las ecuaciones de movimiento de un sistema aislado de partículas deben satisfacer un conjunto de restricciones. Así, por ejemplo, el principio de relatividad de Galileo impone una forma particular a dichas ecuaciones (Sección 1.2.2). En esta sección mostraremos que esas restricciones son consecuencias de simetrías del sistema y que éstas dan origen a leyes de conservación.

4.3.1. Simetrías y grupos

En lo que sigue, jugará un papel esencial la noción de *grupo de transformaciones*. Las transformaciones que mencionamos en la Sección 1.1.2 son en realidad grupos de transformaciones sobre el espacio euclídeo: el grupo de rotaciones, de galileo, etc. Todos ellos son *grupos continuos* pues contienen elementos arbitrariamente próximos a la identidad; por ejemplo, en el grupo de traslaciones existen traslaciones que conectan pares de puntos del espacio euclídeo arbitrariamente próximos.

La multiplicación $g_1 \otimes g_2$ de dos elementos de un grupo continuo debe ser una función continua de g_1 y g_2 y también g^{-1} debe ser función continua de g . Si además de continuas estas dos funciones son infinitamente diferenciables C^∞ el grupo se llama un *grupo de Lie*. Todos los grupos introducidos en la Sección 1.1 son grupos de Lie.

Los elementos de un grupo de Lie son funciones de un pequeño número de variables: sus *parámetros*. Por ejemplo, una traslación cualquiera \mathbf{t} queda caracterizada por sus proyecciones sobre los ejes t_i .

Un *subgrupo* es un subconjunto de un grupo que a su vez forma grupo. En los grupos de Lie son importantes los *subgrupos uniparamétricos*, tales como las rotaciones alrededor del eje z o las traslaciones a lo largo del eje x . Un grupo de Lie se obtiene multiplicando elementos que pertenecen a distintos subgrupos uniparamétricos. Por ejemplo, una traslación arbitraria se obtiene sumando traslaciones apropiadas a lo largo de los tres ejes.

Estamos ahora en condiciones de definir una simetría en un sistema lagrangeano. Sea:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}) dt \quad (4.65)$$

la acción de un sistema mecánico lagrangeano y sea \mathcal{G} un grupo que actúa sobre el espacio de configuración en la forma:

$$q'_i = g_i(q) \quad (4.66)$$

Diremos que el sistema mecánico goza de simetría bajo dicho grupo si la acción transformada $S' = S + C$ difiere de la antigua en una constante aditiva. En ese caso, el lagrangeano transformado difiere del antiguo en una derivada total respecto del tiempo:

$$\begin{aligned} L'(q', \dot{q}') &= L(q, \dot{q}) + \dot{F} \\ S' &= S + \Delta F \end{aligned}$$

La invarianza de la acción bajo un determinado grupo de transformaciones exige que el lagrangeano tenga una forma muy particular. En efecto, las variaciones de coordenadas bajo la acción de un elemento infinitesimal del grupo no serán independientes y el efecto de la variación se cancelará sólo si la acción tiene dicha forma.

4.3.2. El teorema de Noether

La consecuencia más importante de la existencia de una simetría en un sistema mecánico es la aparición de una ley de conservación asociada a la misma. Este resultado, conocido como *teorema de Noether*, es una de las principales consecuencias de la formulación lagrangeana de la mecánica. Con él podemos relacionar las propiedades que atribuimos al espacio y al tiempo con los teoremas de conservación que ya conocemos.

Demostremos el teorema en el caso de un subgrupo uniparamétrico, limitándonos a transformaciones infinitesimales. Sea α el parámetro correspondiente al subgrupo. Bajo una transformación infinitesimal $d\alpha$ la transformación de coordenadas (4.66) tomará la forma:

$$\delta q_i = d\alpha \left. \frac{dq_i}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (4.67)$$

Consideremos ahora el cambio de la acción S calculada a lo largo de la trayectoria real de la partícula. Sustituyendo (4.67) en (4.50) hallamos el cambio de la acción:

$$\delta S = d\alpha \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{d\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{d\alpha} \right] dt \quad (4.68)$$

El último término de (4.68) se puede integrar por partes pero recordando que ahora las variaciones no se anulan en los extremos. Obtenemos de este modo:

$$\delta S = d\alpha \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \frac{dq_i}{d\alpha} + \sum_i \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{dq_i}{d\alpha} \right|_{t_0}^{t_1} \quad (4.69)$$

Ahora bien, el sistema mecánico obedece las ecuaciones de movimiento (4.51) y por lo tanto el primer término de (4.69) se anula a lo largo de la trayectoria. Si ahora imponemos la condición de invarianza de la acción $\delta S = 0$ hallamos:

$$p_i \left. \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_{t=t_1} = p_i \left. \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_{t=t_0} \quad (4.70)$$

que es la ley de conservación que buscábamos.

Los grupos tratados en la Sección 1.1 originan los teoremas clásicos de conservación. La *homogeneidad del espacio* se representa como invarianza bajo el grupo de traslaciones. El teorema de Noether muestra que la correspondiente cantidad conservada es el impulso lineal (Problema 4.3.3). La *isotropía del espacio* es la simetría asociada con la invarianza bajo el grupo de rotaciones. La cantidad conservada en este caso es el impulso angular del sistema (Problema 4.3.4).

La ley de conservación (4.70) puede expresarse de una manera particularmente sencilla si se elige el parámetro α mismo como una de las coordenadas generalizadas. La invarianza de la acción S bajo el grupo de transformaciones

implica que el lagrangeano no puede ser una función de α . Una variable dinámica que aparece en el lagrangeano sólo a través de su velocidad generalizada se llama *variable cíclica*. El teorema de conservación (4.70) se reduce entonces a la forma muy elegante:

$$p_\alpha = \text{Cte} \quad (4.71)$$

donde p_α es el impulso generalizado asociado con la variable cíclica α .

4.3.3. Homogeneidad temporal y energía

Discutamos brevemente la invarianza de la acción bajo *traslaciones temporales*:

$$t' = t + \delta t \quad (4.72)$$

Veremos que en ciertos casos la magnitud asociada con esta simetría es la energía total del sistema. Consideremos entonces la traslación temporal infinitesimal (4.72). El cambio de la acción bajo esta transformación es igual a:

$$\delta S = \delta t \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] dt - \delta t [L(t_1) - L(t_0)] \quad (4.73)$$

donde el último término proviene de la variación de los límites de integración. El primer término se escribe, con ayuda de la ecuación de movimiento (4.51), en la forma:

$$\delta t \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) dt = \delta t \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \frac{d}{dt} (p_i \dot{q}_i) dt$$

y sustituyendo en (4.73) obtenemos la ley de conservación:

$$(p_i \dot{q}_i - L)|_{t=t_1} = (p_i \dot{q}_i - L)|_{t=t_0}$$

La magnitud

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (4.74)$$

se llama *función de Hamilton* o *hamiltoniano* del sistema mecánico. Veremos más adelante que es función de las variables q_i y p_i y no de \dot{q}_i . Probaremos ahora que si las fuerzas son conservativas H es la energía total del sistema. En efecto, en ese caso:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q)$$

y los impulsos generalizados son:

$$p_i = \sum_j g_{ij} \dot{q}_j$$

El hamiltoniano del sistema resulta entonces:

$$H = \sum_{ij} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + V(q) = T + V \quad (4.75)$$

que es la energía total del sistema.

La conservación de la energía resulta, pues, consecuencia de la homogeneidad temporal. En realidad, debemos recordar que el lagrangeano de un sistema mecánico no puede definirse cuando hay fuerzas de roce, de manera que los sistemas aislados que admiten lagrangeanos son automáticamente conservativos. En presencia de fuerzas de roce hay otra simetría que es más importante para caracterizar a los sistemas conservativos: la invarianza de las ecuaciones de movimiento bajo la inversión temporal $t' = -t$. El grupo asociado a esta simetría es un grupo discreto y no está cubierto por el teorema de Noether. En general, el problema de las fuerzas de roce no puede discutirse únicamente dentro de la mecánica de partículas y las consideraciones termodinámicas son fundamentales para su elucidación.

4.3.4. Construcción de lagrangeanos

Tal vez lo más valioso de la formulación lagrangeana de la mecánica sea la posibilidad que abre el teorema de Noether para construir lagrangeanos que satisfagan determinados principios de simetría. Examinemos un par de ejemplos sencillos y en los problemas se enunciarán otros.

La partícula libre

Comencemos con el problema sencillo del lagrangeano de una partícula aislada. Nuestro propósito es construir una función escalar de los *tensores concomitantes* de una partícula libre: su posición \mathbf{r} y su velocidad \mathbf{v} . La forma más general del lagrangeano de una partícula será, pues:

$$L = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (4.76)$$

Sin embargo, el lagrangeano (4.76) debe ser invariante bajo los grupos de traslaciones, rotaciones, tralación temporal y Galileo, y eso introducirá grandes restricciones en su forma. Recordemos que vajo una transformación cualquiera, el lagrangeano sólo puede cambiar en una constante aditiva.

Bajo una traslación infinitesimal $\delta \mathbf{r}$, el lagrangeano (4.76) se transformará en la forma:

$$L' = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \nabla f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \delta \mathbf{r}$$

y como el último término no puede escribirse como una derivada total respecto del tiempo, el lagrangeano no puede depender de \mathbf{r} . En forma similar, la homogeneidad temporal implica que f no puede depender de t . El lagrangeano debe

tener, pues, la forma:

$$L = f(\mathbf{v})$$

Pero la invarianza bajo rotaciones exige que f sea función sólo de cantidades escalares, y el único escalar que puede formarse con el vector \mathbf{v} es v^2 ; de modo que:

$$L = f(v^2) \quad (4.77)$$

Finalmente, exijamos invarianza bajo transformaciones de Galileo $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \delta\mathbf{V}$. Sustituyendo en (4.77) hallamos:

$$L' = f(v^2) + 2f'(v^2)\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{V}$$

en donde f' indica la derivada respecto del argumento v^2 .

Como $\delta\mathbf{V}$ es un vector constante, el último término será una derivada total sólo si el coeficiente es una constante:

$$2f'(v^2) = m$$

en donde m representa la masa de la partícula. Finalmente, combinando los resultados anteriores hallamos:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.78)$$

para el lagrangeano de la partícula libre.

Partícula en un campo electromagnético

Para el lagrangeano de una partícula en un campo electromagnético, buscaremos una forma muy general, basada en el *principio de aditividad*: el lagrangeano es una suma de términos con las simetrías adecuadas. Los tensores concomitantes que tenemos en juego son la posición y velocidad de la partícula, \mathbf{r} y \mathbf{v} , y los potenciales escalares y vectorial del campo ϕ y \mathbf{A} . Si exigimos que en ausencia de campo el lagrangeano se reduzca a la partícula libre, tendremos:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\phi + e'\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} + e''\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} \quad (4.79)$$

En general, un campo electromagnético puede depender del espacio y del tiempo, de manera que los principios mencionados de simetría no son relevantes. En cambio, en presencia de un campo electromagnético, el principio fundamental de simetría es la *invarianza bajo transformaciones de medida*. Las ecuaciones (4.62) ue expresan los campos en función de los potenciales son invariantes bajo transformaciones de medida de los potenciales, de la forma:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\alpha(\mathbf{r}, t) \quad (4.80a)$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t} \quad (4.80b)$$

Puesto que son los campos quienes ejercen las acciones ponderomotrices, es natural exigir que la invarianza de medida sea una simetría del lagrangeano. Efectuando la transformación (4.80) hallamos:

$$L' = L + e \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + e' \nabla \alpha \cdot \mathbf{v} + e'' \nabla \alpha \cdot \mathbf{r}$$

Los dos primeros términos forman una derivada total si $e' = e$, mientras que el último término no puede escribirse de esta manera, de modo que $e'' = 0$. Finalmente, el lagrangeano toma la forma (4.64).

Problemas 4.3

Problema 4.3.1.

Hallar la ley de composición de dos traslaciones.

Problema 4.3.2.

Lo mismo, para dos transformaciones de Galileo.

Problema 4.3.3.

Probar que la invarianza de la acción bajo traslaciones a lo largo del eje z implica la conservación del impulso p_z .

Problema 4.3.4.

Lo mismo, para rotaciones alrededor del eje z y L_z .

Problema 4.3.5.

Mostrar que la forma más general para una interacción que dependa únicamente de las coordenadas de dos partículas y que satisfaga los principios de invarianza mencionados es $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$.

Problema 4.3.6.

Probar que en el lagrangeano de una partícula en un campo electromagnético no puede existir un término de la forma $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L}$.

Capítulo 5

El cuerpo rígido

El cuerpo rígido, que ya hemos definido (Sección 4.1.1), es el más simple de los sistemas de muchas partículas. Esta simplicidad se debe a que el número de grados de libertad de un cuerpo rígido es siempre seis, cualquiera sea el número de partículas en juego. Por esta razón los problemas en que interviene un cuerpo rígido se pueden resolver muchas veces analíticamente. Si pensamos en la gran cantidad de cuerpos que se comportan aproximadamente como rígidos (desde la carrocería de un auto hasta una cacerola) y la gran cantidad de dispositivos que se han diseñado sobre ese modelo, se comprende el gran interés que tiene la teoría. En este capítulo nos limitaremos a los problemas más sencillos.

5.1. Rotaciones

De los seis grados de libertad de un cuerpo rígido (Sección 4.1), tres corresponden a una traslación del centro de masas del cuerpo de la posición inicial \mathbf{R}_0 a la posición final \mathbf{R}_1 . Sabemos que este movimiento está regido por la ley dinámica (1.86). Los otros tres grados de libertad se refieren al movimiento relativo alrededor del centro de masas (Sección 1.5) y son los más interesantes. Intuitivamente, este movimiento relativo debe ser una rotación alrededor de un punto del cuerpo pues éste es el único movimiento que no altera las distancias entre dos puntos cualesquiera del cuerpo. Las rotaciones juegan, entonces, un papel fundamental en la dinámica del cuerpo rígido y las estudiaremos con mayor profundidad en esta sección.

5.1.1. El teorema de Euler

Comenzaremos dando una demostración sencilla pero rigurosa de que los tres grados de libertad de movimiento relativo representan una rotación del cuerpo. Como ya hemos visto (Sección 1.5), la posición de cualquier punto del cuerpo queda fijada si se conocen las posiciones de tres puntos dados (Figura 4.1) y basta

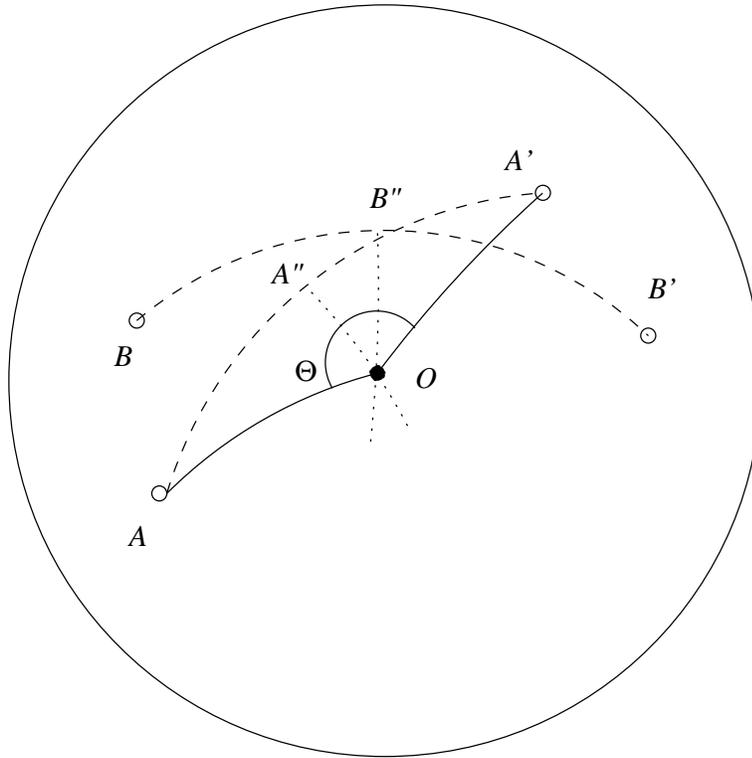


Figura 5.1: Diagrama para el teorema de Euler

con examinar lo que ocurre con estos tres. Sin perder generalidad, elegiremos a C equidistante de A y B . Si trazamos una esfera E , de radio AC con centro en C , los puntos A y B pertenecerán a la superficie de la misma. Durante el movimiento del cuerpo rígido, el punto C experimentará una traslación $\Delta \mathbf{R}$ hasta el punto C' y la esfera E se transformará en la esfera E' , con centro en C' . Sin embargo, los puntos A y B no se transformarán, por lo general, en los puntos trasladados (Figura 5.1) sino en otro par de puntos A' y B' . Todo sucede como si el cuerpo se moviese alrededor de un punto fijo $C = C'$. Mostraremos ahora que hay una rotación alrededor de C que transforma los puntos A, B en A', B' .

Ante todo, mostremos que hay un punto fijo O sobre la esfera, que representa el eje de rotación. Para probarlo, conectemos A con A' y B con B' mediante sendos arcos de círculo máximo. Desde los puntos medios de dichos arcos A'', B'' , tracemos los arcos bisectores perpendiculares, que se cortarán en un punto O . Ahora bien los triángulos esféricos $\triangle AA''O$ y $\triangle A'A''O$ son congruentes por ser rectángulos y tener dos lados iguales; por lo tanto, vale la igualdad $AO = A'O$ entre los lados correspondientes. Lo mismo vale para $BO = B'O$ y por lo tanto para todo par de puntos correspondientes. El ángulo de rotación $\Phi = \angle AOA'$ es el mismo para cualquier par de puntos, como puede probarse fácilmente considerando la congruencia de los triángulos esféricos $\triangle ABO$ y $\triangle A'B'O$.

Con los resultados anteriores, hemos probado el:

Teorema 5.1 (Euler).

El movimiento más general de un cuerpo rígido con un punto C fijo es una rotación alrededor de dicho punto.

y combinando con nuestras observaciones sobre la traslación, el

Teorema 5.2 (Chasles).

El movimiento más general de un cuerpo rígido es una traslación compuesta con una rotación.

Como ya hemos mencionado, estos resultados son intuitivos: traslaciones y rotaciones son los grupos que conservan las distancias entre dos puntos en el espacio euclídeo. Una demostración analítica del teorema de Euler está esbozada como Problema 5.1.4.

Sea ahora \mathbf{n} el versor en la dirección del eje de rotación. La componente del vector \mathbf{r} paralela al eje de rotación no cambiará, mientras que la componente perpendicular $\mathbf{r}_t = \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ rotará un ángulo Φ . De este modo obtenemos una representación de la rotación general:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{n} \wedge \mathbf{r} \operatorname{sen} \Phi + \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}) \operatorname{cos} \Phi \quad (5.1)$$

de la que pueden deducirse los elementos de la matriz de rotación.

El Teorema 5.1 sugiere una representación del grupo de rotaciones como una variedad diferenciable. Para hacerlo, representemos la rotación como un vector \mathbf{O} paralelo al eje de rotación y de longitud $\frac{\Phi}{\pi}$. Este conjunto de vectores representa el interior de la esfera unidad. Además, como puntos diametralmente opuestos sobre la esfera representan la misma rotación, es necesario identificar estos puntos.

La Figura 5.2 muestra el espacio de configuración del grupo de rotaciones. Aunque cualquier pequeño volumen del espacio de configuración es isomorfo al espacio euclídeo (por ejemplo, un entorno del origen) la estructura global del grupo es muy diferente. Este último es un espacio compacto, que ocupa un volumen finito.

5.1.2. Los ángulos de Euler

La descripción anterior de una rotación no es la más práctica para describir la orientación de un cuerpo rígido. Una descripción diferente, aunque equivalente, introducida por Euler, ha resultado la más conveniente.

La orientación de un cuerpo rígido puede especificarse considerando un sistema de coordenadas cartesianas C solidario con el mismo. Existe una única rotación \mathbb{R} que transforma desde el sistema inercial S a C . Los elementos de la matriz $\Lambda(\mathbb{R})$ son los cosenos directores de los ejes de C en el sistema S . Estos parámetros

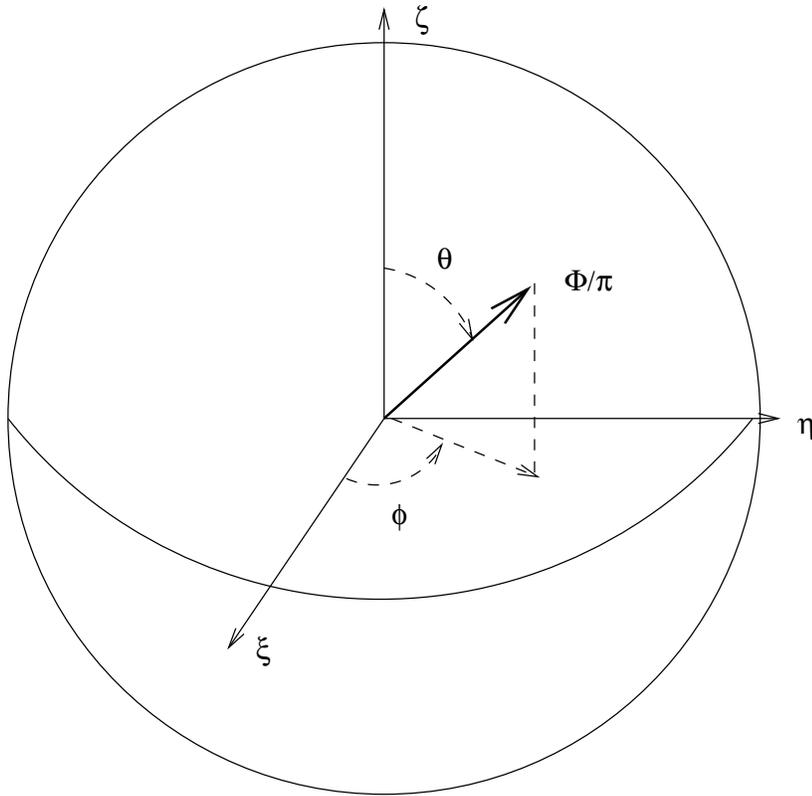


Figura 5.2: El grupo de rotaciones como variedad diferenciable

no son independientes (Sección 1.1.2) pero es posible expresar a todos ellos en función de sólo tres ángulos.

Podemos construir la transformación entre S y C con tres rotaciones virtuales del cuerpo rígido. En primer lugar, lo rotamos en un ángulo α alrededor del eje z (Figura 5.3) de tal modo que el eje y sea perpendicular a los ejes z y ζ . La nueva posición del eje y , llamémosla Ω se conoce como la *línea de los nodos*. Rotemos ahora en un ángulo β alrededor de la línea de los nodos, de manera de llevar el eje z sobre el eje ζ (Figura 5.3). Finalmente, rotemos alrededor de este último eje en un ángulo γ de manera tal que Ω se superponga con el eje η . Simultáneamente, la posición final del eje x coincidirá con ξ (Figura 5.3).

Los ángulos α, β, γ que acabamos de introducir describen totalmente la rotación Λ ; llamados *ángulos de Euler*, forman un sistema de coordenadas generalizadas apropiado para describir rotaciones. La matriz de rotación se construye fácilmente a partir de las matrices de rotación individuales. Un momento de reflexión muestra que la misma matriz Λ se puede construir efectuando las rotaciones en orden inverso, a lo largo de los ejes del sistema S . Si llamamos A, B, Γ a las

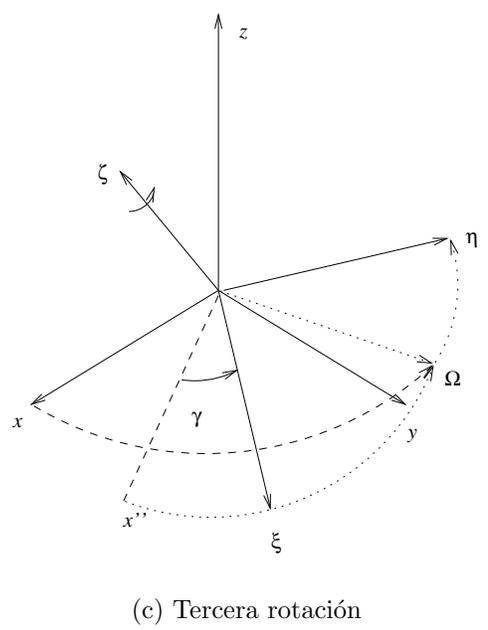
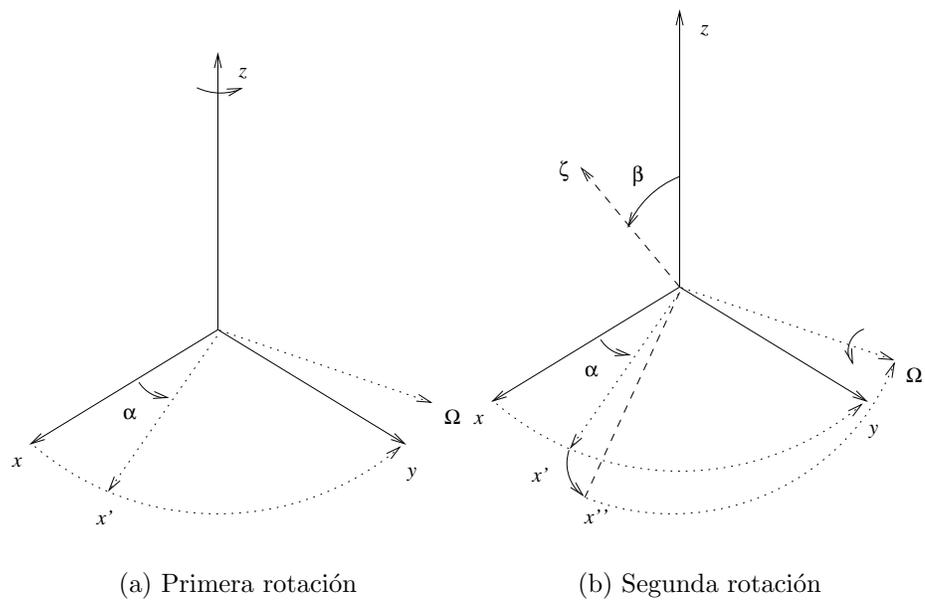


Figura 5.3: Ángulos de Euler

matrices correspondientes a las rotaciones, tendremos:

$$\Lambda = \Gamma B A \quad (5.2)$$

La expresión final para la matriz Λ es compleja, pero puede hallarse fácilmente como producto de las matrices individuales:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3a)$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\operatorname{sen} \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (5.3b)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\operatorname{sen} \gamma & 0 \\ \operatorname{sen} \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3c)$$

La multiplicación indicada da como resultado:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha - \operatorname{sen} \gamma \sin \alpha & -\cos \gamma \cos \beta \sin \alpha - \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha & -\cos \gamma \sin \beta \\ \sin \gamma \cos \beta \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha & -\sin \gamma \cos \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & -\sin \gamma \sin \beta \\ \sin \beta \cos \alpha & -\sin \beta \sin \alpha & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

5.1.3. Rotaciones infinitesimales

Las rotaciones finitas son difíciles de manejar pues son objetos no conmutativos. Es fácil hallar ejemplos de matrices ortogonales que no conmutan entre sí (Problema 5.1.1). El siguiente experimento se puede llevar a cabo en forma muy sencilla con una caja de fósforos, un libro o cualquier otro objeto con tres dimensiones diferentes (Figura 5.4). Dada una posición inicial, si rotamos el objeto primero alrededor del eje z y luego alrededor del eje y llegamos a una orientación diferente que si las rotaciones se hacen en el orden inverso.

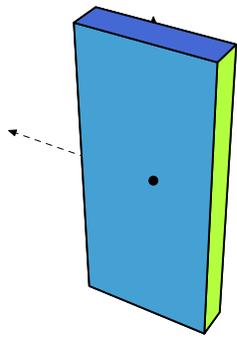
Las rotaciones infinitesimales, en cambio, conmutan a menos de infinitésimos de orden superior. Como ya lo hemos visto, (Sección 5.1.1) una rotación cualquiera queda especificada con el eje de rotación \mathbf{n} y el ángulo de rotación alrededor del eje $\delta\phi$. Será conveniente introducir el *vector de rotación infinitesimal*:

$$\delta\phi = \delta\phi \mathbf{n} \quad (5.5)$$

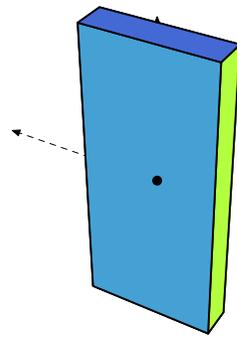
para lo que sigue.

Es fácil ver que bajo una rotación infinitesimal, cualquier punto del cuerpo se desplaza en la cantidad:

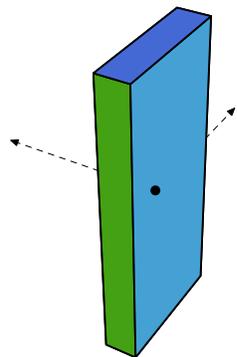
$$\delta\boldsymbol{\rho} = \delta\phi \wedge \boldsymbol{\rho} \quad (5.6)$$



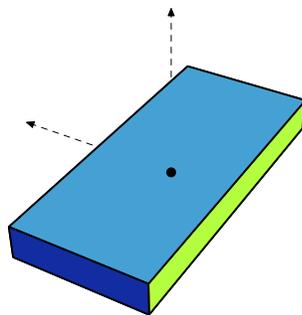
(a) Posición inicial



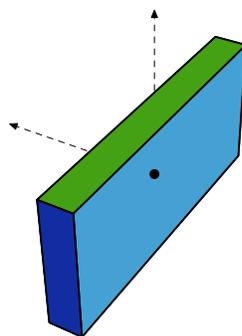
(b) Posición inicial



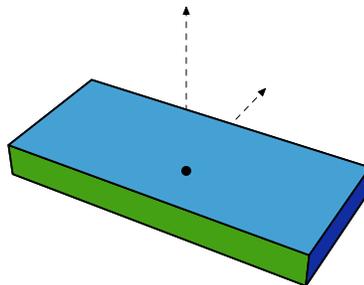
(c) Rotada 90° alrededor del eje z



(d) Rotada 90° alrededor del eje y



(e) Rotada 90° alrededor del eje y



(f) Rotada 90° alrededor del eje z

Figura 5.4: Ejemplo de rotaciones no conmutativas

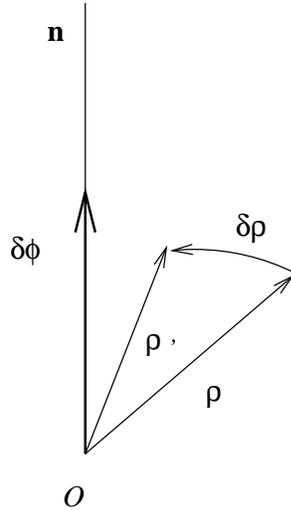


Figura 5.5: Desplazamiento de un punto en una rotación infinitesimal

en donde $\boldsymbol{\rho}$ es la posición relativa al punto de referencia O (Figura 5.5).

La ecuación (5.6) puede escribirse en forma matricial introduciendo el *símbolo de Levi-Civita*:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk \text{ es permutación par de } 123, \\ -1 & \text{si } ijk \text{ es permutación impar de } 123 \\ 0 & \text{si dos índices son iguales} \end{cases} \quad (5.7)$$

Usando el símbolo de Levi-Civita, el producto vectorial de $\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ puede escribirse, en componentes:

$$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

como puede verificarse fácilmente (Problema 5.1.2). La matriz de la rotación infinitesimal $\delta\boldsymbol{\phi}$ se expresa (Problema 5.1.3):

$$\lambda_{ij}(\delta\boldsymbol{\phi}) = \delta_{ij} - \epsilon_{ijk} \delta\phi_k \quad (5.8a)$$

o también, explícitamente:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \delta\phi_z & -\delta\phi_y \\ -\delta\phi_z & 1 & \delta\phi_x \\ \delta\phi_y & -\delta\phi_x & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8b)$$

que es una matriz *antisimétrica*, que representa un apartamiento pequeño de la identidad del grupo. Utilizando cualquiera de las representaciones (5.8) se puede comprobar que las rotaciones infinitesimales conmutan, a menos de términos de orden superior.

Utilizando (5.6) se puede calcular la velocidad de un punto cualquiera del cuerpo, respecto del punto de referencia:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\rho} \quad (5.9)$$

donde

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \boldsymbol{\phi}}{dt} \quad (5.10)$$

se llama la *velocidad angular* del cuerpo rígido. Si realizamos ahora dos transformaciones infinitesimales sucesivas, la velocidad resultante será:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ &= (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \wedge \boldsymbol{\rho} \\ &= \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\rho} \end{aligned} \quad (5.11)$$

que muestra que las rotaciones infinitesimales se componen como suma de vectores.

Aunque la velocidad angular tiene un significado físico mu sencillo, no es la derivada con respecto del tiempo de una variable vectorial pues $\delta \boldsymbol{\phi}$ es un elemento infinitesimal del grupo de rotaciones, cuyos elementos finitos no pueden representarse como vectores. La integral de $\boldsymbol{\omega}$ no tiene, pues, ningún significado geométrico: sus componentes cartesianas suelen llamarse *anholonomas* por analogía con los vínculos no integrables.

Los ángulos de Euler muestran aquí su utilidad: las rotaciones infinitesimales definidas por los ángulos de Euler $d\alpha, d\beta, d\gamma$ tienen un significado geométrico claro y las velocidades angulares correspondientes $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ tienen integrales bien definidas y son componentes *holonomas* pero curvilíneas de la velocidad angular.

Es importante encontrar la relación entre las componentes holonomas y anholonomas de la velocidad angular, pues las ecuaciones de movimiento se escriben con sencillez usando estas últimas y se integran con las primeras. Podemos hallarla mediante simples consideraciones geométricas. Así, por ejemplo, la componente ω_ζ de la velocidad angular (en el sistema C) la obtenemos observando que es igual a *gamma* más la proyección de $\dot{\alpha}$ sobre el eje ζ (Figura 5.6). De este modo obtenemos las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ en el sistema móvil C:

$$\omega_\xi = \dot{\beta} \operatorname{sen} \gamma - \dot{\alpha} \operatorname{sen} \beta \cos \gamma \quad (5.12a)$$

$$\omega_\eta = \dot{\beta} \cos \gamma + \dot{\alpha} \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma \quad (5.12b)$$

$$\omega_\zeta = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta \quad (5.12c)$$

Estas ecuaciones suelen llamarse las *ecuaciones cinemáticas de Euler*. De la misma manera se pueden hallar las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ en el sistema inercial S.

Aunque no puedan integrarse para hallar la orientación de un cuerpo, las componentes cartesianas de la velocidad angular gozan de las propiedades formales

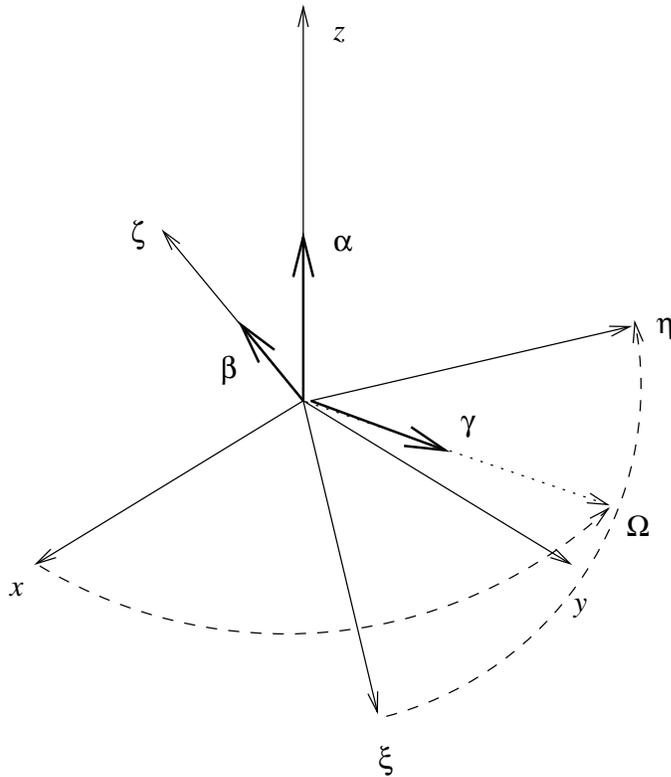


Figura 5.6: Componentes holonomas de la velocidad angular

de las componentes cartesianas de un vector y de ahí su gran utilidad. Cuando se trata de especificar en forma efectiva la orientación de un cuerpo rígido, en cambio, son los ángulos de Euler los que necesitamos y las componentes anholonomas de la velocidad angular son necesarias para hallarlos.

Problemas 5.1

Problema 5.1.1.

Probar que las siguientes matrices representan rotaciones:

1.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

2.

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Probar, además, que no conmutan.

Problema 5.1.2.

Expresar las siguientes operaciones vectoriales con el símbolo de Lévi-Civita:

1. El producto vectorial de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} .
2. El producto mixto de tres vectores: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$.
3. El doble producto vectorial: $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$.

Problema 5.1.3.

Probar que la matriz de una rotación infinitesimal puede escribirse en la forma (5.8).

Sugestión: Mostrar que las distancias quedan invariantes.

Problema 5.1.4 (Otra demostración del teorema de Euler).

Ya que una matriz ortogonal conserva las distancias (Sección 1.1.2) para probar el teorema de Euler bastará con mostrar que una matriz ortogonal admite un vector fijo \mathbf{n} : el eje de rotación. Para hacerlo, probar los siguientes lemas:

1. Los autovalores de una matriz ortogonal tienen módulo unidad.
2. Una matriz ortogonal real tiene un autovalor real.
3. El determinante de una matriz que representa la rotación de un cuerpo rígido vale $+1$.
4. El complejo conjugado de un autovalor es otro autovalor.

Completar la demostración mostrando que siempre existe un autovalor $\lambda = +1$.

5.2. Movimiento relativo

Con la introducción de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ podemos resolver el importante problema de hallar las ecuaciones de movimiento en un sistema de referencia no inercial. La solución de este problema es importante por varias razones: en primer lugar, aclarará la noción de fuerza inercial, introducida en la Sección 4.1.3; además, puesto que la Tierra y la Galaxia son sistemas inerciales en rotación, es importante comprender las ecuaciones de movimiento en sistemas acelerados. El uso de la formulación lagrangeana simplificará enormemente la solución del problema.

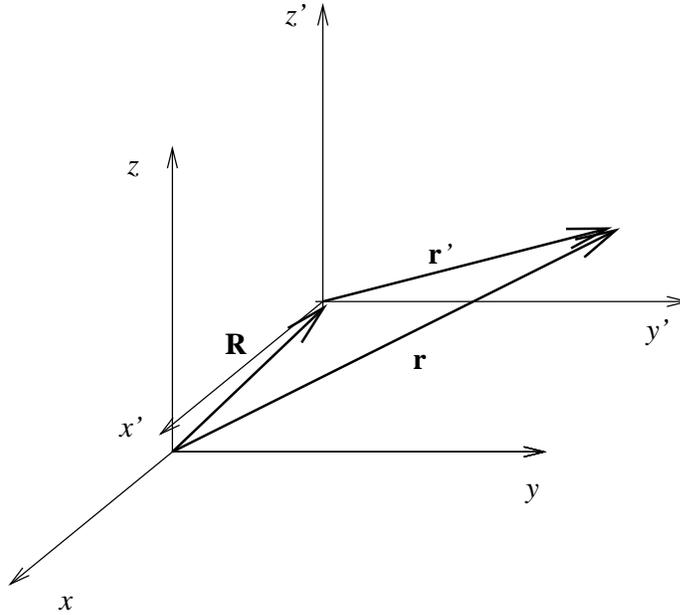


Figura 5.7: Transformación a un sistema de referencia acelerado

5.2.1. Sistemas de referencia acelerados

Consideremos el movimiento de una partícula en un sistema de referencia acelerado C. Supondremos que el movimiento se efectúa sin que los ejes roten. Si \mathbf{r} es la posición de la partícula respecto de un sistema inercial S, \mathbf{r}' la posición respecto de C y $\mathbf{R}(t)$ el origen de C respecto de S, valen las igualdades:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{R} \quad (5.13a)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V} \quad (5.13b)$$

en donde \mathbf{v} , \mathbf{v}' y \mathbf{V} son las respectivas velocidades (Figura 5.7).

Si sustituimos en el lagrangeano de la partícula:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U$$

hallamos el lagrangeano en un sistema acelerado:

$$L = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}' + \mathbf{V})^2 - U \quad (5.14)$$

El caso más importante es cuando U es un potencial que depende únicamente de las coordenadas relativas a C. En ese caso, la ecuación de movimiento es:

$$m\dot{\mathbf{v}}' = \mathbf{F} - m\mathbf{A} \quad (5.15)$$

en donde \mathbf{A} es la aceleración de \mathbf{C} respecto de \mathbf{S} . El último término representa la fuerza inercial que actúa sobre la partícula debido a la aceleración del sistema inercial. Es de signo contrario a la aceleración del \mathbf{C} y por eso los pasajeros de un automóvil que frena bruscamnte ($a < 0$) se sienten empujados hacia adelante por la fuerza inercial.

Una de las sorpresas que ofrece la naturaleza es que en determinadas circunstancias, un sistema acelerado puede comportarse como inercial. Esto se debe a un fenómeno conocido como la *universalidad de la caída libre*, enunciado intuitivamente por Galileo: “Todos los cuerpos caen en el vacío con la misma aceleración”. La leyenda cuenta que, para verificarlo, arrojó desde la punta de la Torre Inclinada de Pisa, bolas de hierro y madera que llegaron al suelo al mismo tiempo, ante la confusión de sus adversarios.

Un sistema de referencia está en *caída libre* si se trata de un cuerpo que se mueve bajo la acción de la gravedad solamente. En un campo gravitacional uniforme \mathbf{g} el sistema de referencia \mathbf{C} tendrá la aceleración $\mathbf{A} = \mathbf{g}$. La ecuación de movimiento de una partícula respecto de dicho sistema de referencia es, entonces:

$$m\dot{\mathbf{v}}' = m\mathbf{g} - m\mathbf{A} = 0$$

Un sistema de referencia en caída libre se comporta, pues, como un sistema inercial respecto de los fenómenos mecánicos. La generalización de esta ley a todos los fenómenos físicos, el *principio de equivalencia de Einstein*, es una de las leyes más profundas de la naturaleza. Intuitivamente, afirma que objetos que no se pueden pesar o tocar, como la luz o el calor, caen con la misma aceleración que las bolas de Galileo.

5.2.2. Sistemas en rotación

Más complejo que el caso de un sistema acelerado, es el de un sistema de referencia en rotación. En este caso, el problema principal se resuelve si se encuentra la variación de un vector \mathbf{r} en el sistema \mathbf{C} .

Sea $\dot{\mathbf{r}}$ la derivada temporal de \mathbf{r} en el sistema \mathbf{S} . En el sistema \mathbf{C} hay un cambio adicional del vector debido a la rotación. Si \mathbf{C} rota un ángulo $\delta\phi$, el vector experimentará un cambio:

$$\delta\mathbf{r} = -\delta\phi \wedge \mathbf{r} \tag{5.16}$$

En esta ecuación, el cambio del vector tiene el signo opuesto al de (5.6) pues aquí el sistema de referencia ha girado un ángulo $\delta\phi$, mientras que allí ha girado el cuerpo en ese ángulo. El cambio total del vector en el sistema \mathbf{C} será, entonces:

$$\Delta\mathbf{r} = d\mathbf{r} - \delta\mathbf{r}$$

De esta ecuación obtenemos la relación entre las velocidades en ambos sistemas de referencia:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \tag{5.17}$$

Indicaremos la velocidad en el sistema móvil con la notación:

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

Sea ahora \mathbf{r} el vector posición de una partícula. El lagrangeano correspondiente de esta partícula será:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_S^2 - V(\mathbf{r}_C) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{\mathbf{r}}_C + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_C\right)^2 - V(\mathbf{r}_C) \end{aligned} \quad (5.18)$$

y llamado $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_C$, hallamos:

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + m\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})^2 - V(\mathbf{r}) \quad (5.19)$$

para el lagrangeano de una partícula en rotación. En la última ecuación, todos los vectores se refieren al sistema C.

Los dos términos que aparecen en el lagrangeano son potenciales de fuerzas inerciales introducidas por la elección del sistema de referencia. El segundo de ellos es nuestra amiga la fuerza centrífuga. El primero es más interesante, pues nos muestra el potencial de una fuerza dependiente de la velocidad. Esta fuerza, perpendicular a la trayectoria de la partícula, se llama la *fuerza de Coriolis*:

$$\mathbf{F}_C = 2m\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega} \quad (5.20)$$

Para comprender la naturaleza de esta fuerza, imaginemos que la partícula realiza oscilaciones armónicas a lo largo del eje x en el sistema C. Si $\boldsymbol{\omega} = \Omega\hat{\mathbf{z}}$, las ecuaciones de movimiento que se deducen de (5.19) son:

$$m\ddot{x} = -kx + 2m\Omega\dot{y} + m\Omega^2x \quad (5.21a)$$

$$m\ddot{y} = -ky - 2m\Omega\dot{x} + m\Omega^2y \quad (5.21b)$$

en donde hemos usado la notación sencilla \dot{x} para las derivadas respecto del tiempo.

Para integrar el sistema (5.21), introduzcamos la variable compleja auxiliar $z = x + iy$. Multiplicando la segunda ecuación por i y sumando obtenemos:

$$\ddot{z} + 2i\Omega\dot{z} + (\omega_0^2 - \Omega^2)z = 0$$

en donde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Esta ecuación se resuelve con la sustitución de d'Alembert $z = Ce^{i\omega t}$, que proporciona la ecuación característica:

$$-\omega^2 - 2\Omega\omega + \omega_0^2 - \Omega^2 = 0$$

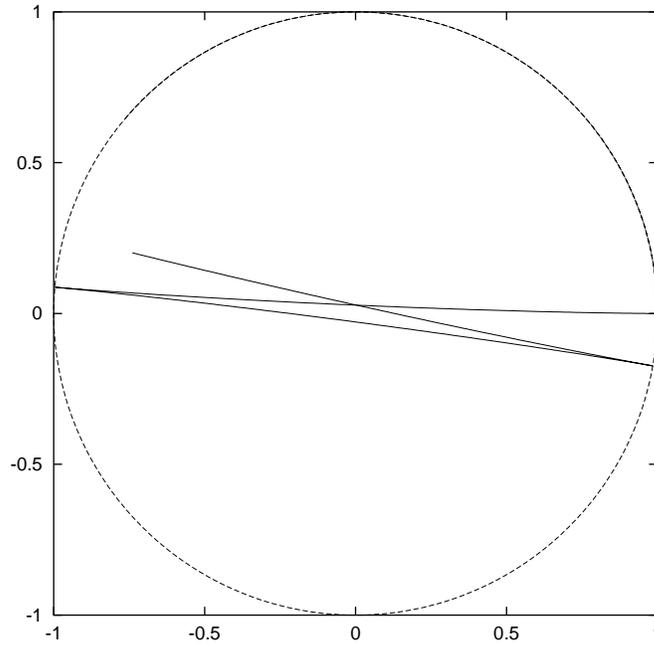


Figura 5.8: Oscilador armónico en un sistema en rotación

cuyas soluciones son:

$$\omega = -\Omega \pm \omega_0 \quad (5.22)$$

La solución más general de (5.21), expresada en forma compleja, será:

$$z = C_1 e^{i(\omega_0 - \Omega)t} + C_2 e^{-i(\omega_0 + \Omega)t}$$

y las constantes de integración se determinan con las condiciones iniciales. Por ejemplo, si cuando $t = 0$:

$$x = a \quad \dot{x} = y = \dot{y} = 0$$

la solución resulta:

$$x = a \left(\cos \omega_0 t \cos \Omega t + \frac{\Omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \Omega t \right) \quad (5.23a)$$

$$y = -a \left(\cos \omega_0 t \sin \Omega t + \frac{\Omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \Omega t \right) \quad (5.23b)$$

Al cabo de un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, los nuevos valores de x, y son:

$$x(T) = a \cos 2\pi \frac{\Omega}{\omega_0} \quad y(T) = -a \sin 2\pi \frac{\Omega}{\omega_0}$$

es decir, el punto de retorno sufre una precesión en un ángulo $\delta\phi = 2\pi\frac{\Omega}{\omega_0}$. Éste es exactamente el ángulo girado por el sistema C. La trayectoria está bosquejada en la Figura 5.8.

La corteza terrestre no es un sistema inercial y se halla en rotación con un periodo de 24 horas. Las fuerzas centrífugas y de Coriolis son responsables de varios fenómenos interesantes. En particular, la fuerza centrífuga es responsable de la variación de la aceleración de la gravedad con la latitud. Como ya hemos mencionado, las fuerzas gravitacionales son, como las inerciales, proporcionales a la masa. La fuerza centrífuga varía con la latitud, haciéndose máxima en el ecuador y nula en los polos. La fuerza gravitatoria que experimentamos es la suma vectorial de la atracción gravitacional terrestre, aproximadamente independiente de la latitud, y de la fuerza centrífuga. El resultado es no sólo una disminución de la intensidad de la aceleración de la gravedad en el ecuador (alrededor del 1%) sino también un apartamiento de la vertical del lugar (definida como la dirección del campo gravitacional local) y la dirección radial.

Mucho más interesantes son los fenómenos debidos a la fuerza de Coriolis. Por ejemplo, si no hubiera fuerza de Coriolis el cuerpo caería siguiendo la vertical del lugar. La aceleración de Coriolis perturba esta trayectoria produciendo una desviación de la vertical (Problema 5.2.1). La trayectoria se desvía hacia el Este en el hemisferio Norte. Naturalmente, también se verán afectados los proyectiles, cuyas trayectorias pueden desviarse mucho si tienen un alcance muy grande (Problema 5.2.2). El efecto es máximo en un satélite artificial cuya órbita, a menos de pequeñas perturbaciones, permanece en un mismo plano en un sistema inercial (Sección 3.1). Respecto de la corteza terrestre, el plano de la órbita dará una vuelta completa en 24 horas, que se explica por la aceleración de Coriolis presente en un sistema en rotación.

El mismo fenómeno se presenta en el experimento del péndulo de Foucault. El plano de oscilación del péndulo permanece estacionario en un sistema inercial. Con respecto de un punto de la corteza terrestre, efectúa una rotación completa en un tiempo que depende de la latitud del lugar (Problema 5.2.3). Si el movimiento del péndulo se inicia en la dirección Norte-Sur, al cabo de algún tiempo la fuerza de Coriolis habrá provocado una desviación apreciable del meridiano.

5.2.3. El problema restringido de los tres cuerpos

El *problema de los tres cuerpos* consiste en hallar la solución general del movimiento de tres cuerpos que interactúan con la ley de gravitación de Newton (1.21). El problema, notorio por su dificultad, puede analizarse con sencillez bajo las siguientes condiciones:

1. Dos de los cuerpos, S y J digamos, tienen masas grandes y se mueven sobre órbitas circulares.

2. El tercer cuerpo (el *planetoide*) tiene masa despreciable y, por lo tanto, no afecta el movimiento de los otros dos.

Esta simplificación del problema se conoce como *problema restringido de los tres cuerpos* y constituye una primera aproximación para el movimiento de un satélite alrededor de un planeta J o el de un asteroide bajo la influencia de Júpiter y el Sol.

Pueden obtenerse importantes conclusiones en forma cualitativa trabajando en un sistema de referencia que rota con la velocidad angular del sistema $S - J$:

$$\Omega^2 = \frac{G_N(m_S + m_J)}{a_0^3} \quad (5.24)$$

en donde m_S y m_J son las masas de los dos cuerpos principales. Elijamos el origen de nuestro sistema de referencia rotante en el centro de masa de los dos cuerpos principales. Las posiciones de ambos cuerpos serán entonces:

$$\mathbf{r}_S = -\nu a_0 \hat{\mathbf{x}} \quad (5.25a)$$

$$\mathbf{r}_J = \mu a_0 \hat{\mathbf{x}} \quad (5.25b)$$

en donde hemos introducido las fracciones de masa:

$$\mu = \frac{m_S}{m_S + m_J} \quad (5.26a)$$

$$\nu = \frac{m_J}{m_S + m_J} \quad (5.26b)$$

$$\mu + \nu = 1 \quad (5.26c)$$

Con estas notaciones, el lagrangeano para el movimiento de la tercera partícula es:

$$L = m_0 \left[\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{r}} - \Omega \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{r})^2 + G_N(m_S + m_J) \left(\frac{\mu}{r_{0S}} + \frac{\nu}{r_{0J}} \right) \right] \quad (5.27)$$

Si ahora introducimos las coordenadas adimensionales

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r}}{a_0} \quad (5.28)$$

y usamos la ecuación (5.24) obtenemos la forma canónica del lagrangeano, que se ha utilizado desde tiempo inmemorial para estudiar el problema restringido:

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{\rho}} - \Omega \hat{\mathbf{z}} \wedge \boldsymbol{\rho})^2 + \Omega^2 \left(\frac{\mu}{\rho_{0S}} + \frac{\nu}{\rho_{0J}} \right) \quad (5.29)$$

Podemos obtener importante información cualitativa sobre el problema restringido observando que (5.29) es independiente del tiempo y por lo tanto existe la cantidad conservada:

$$\begin{aligned} H &= (\dot{\boldsymbol{\rho}} - \Omega \hat{\mathbf{z}} \wedge \boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{\rho} - \tilde{L} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\rho}}^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 (\xi^2 + \eta^2) - \Omega^2 \left(\frac{\mu}{\rho_{0S}} + \frac{\nu}{\rho_{0J}} \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

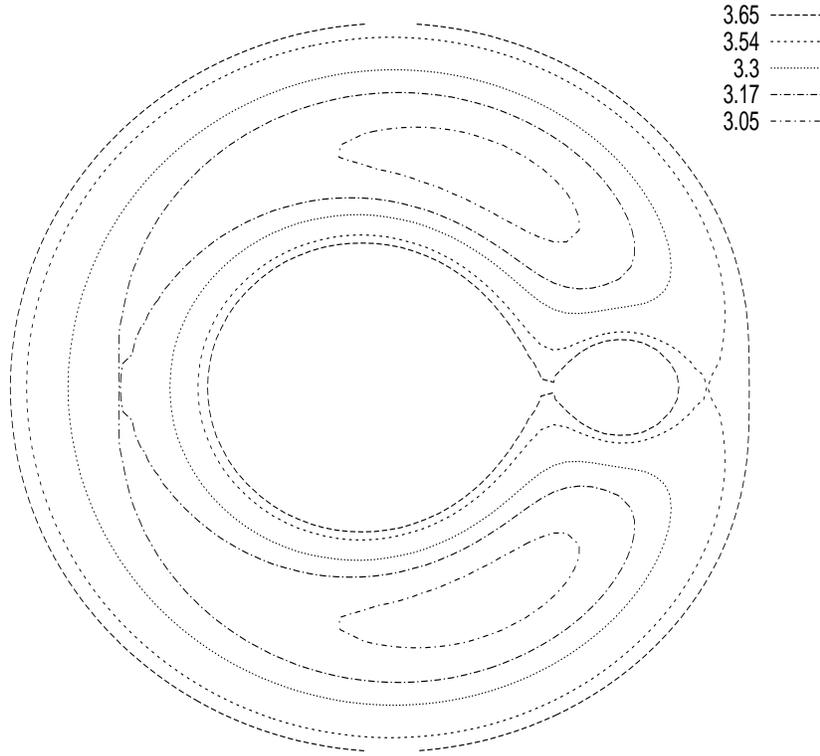


Figura 5.9: Curvas de velocidad nula en el caso $\mu = \frac{10}{11}$.

que se llama la *integral de Jacobi*. Análoga a la conservación de la energía, se la puede usar para discutir cualitativamente el movimiento, en una forma que generaliza el tratamiento de la Sección 1.4.2.

Examinemos el movimiento de un cuerpo en el plano $\zeta = 0$ cuando su *constante de Jacobi* $H = -\frac{1}{2}\Omega^2 C$ es positiva, lo que corresponde a movimiento finito del cuerpo. El análogo de los puntos de retorno en el movimiento unidimensional (Sección 1.4.2) son las *curvas de velocidad nula*, definidas por la condición $\dot{\rho}^2 = 0$:

$$C = U(\boldsymbol{\rho}) = \left[2 \left(\frac{\mu}{\rho_{0S}} + \frac{\nu}{\rho_{0J}} \right) + \xi^2 + \eta^2 \right] \quad (5.31)$$

La Figura 5.9 muestra las curvas de velocidad nula para el caso $\mu = 10/11$. La trayectoria de una partícula con un valor de C_0 dado, está confinada a las regiones con $U > C_0$. El movimiento de un satélite próximo a J , (tal como la

Luna y la Tierra), queda confinado a la región comprendida en el lazo que rodea a J . Los valles encima y debajo de los cuerpos principales coresponen a órbitas potencialmente inestables. Sin embargo, veremos que la presencia de fuerzas de Coriolis estabiliza en ciertas circunstancias el movimiento.

Problemas 5.2

Problema 5.2.1.

Estudiar la caída de un cuerpo en la superficie terrestre.

Problema 5.2.2.

Estudiar el movimiento de un proyectil en la corteza terrestre. Suponer que el alcance es lo suficientemente pequeño como para despreciar la curvatura.

Problema 5.2.3 (Péndulo de Foucault).

Un péndulo efectúa pequeñas oscilaciones inicialmente en la dirección Norte-Sur. Hallar el ángulo de desviación del plano de oscilación en función del tiempo.

5.3. El tensor de inercia

En las secciones anteriores hemos introducido, sumariamente, cantidades cinemáticas necesarias para describir el movimiento de un cuerpo rígido. Pasemos ahora a describir las magnitudes dinámicas que caracterizan su movimiento, con el fin de escribir las ecuaciones dinámicas o (lo que es equivalente) la función de Lagrange. Algunas de estas cantidades son el impulso angular y la energía cinética de un cuerpo rígido en función por ejemplo de los ángulos de Euler y sus derivadas temporales.

5.3.1. Impulso angular de un cuerpo rígido

Examinemos primero el impulso angular de un cuerpo rígido. Si O es el punto de referencia, el impulso angular del mismo es (Sección 1.5.2):

$$\mathbf{L} = \sum_a m_a \boldsymbol{\rho}_a \wedge \mathbf{v}_a \quad (5.32)$$

en donde $\boldsymbol{\rho}_a$ es la posición de la a -ésima partícula respecto del punto de referencia. Las velocidades no son independientes pues están conectadas con la velocidad angular a través de la ecuación (5.9). Sustituyendo, hallamos:

$$\begin{aligned} L &= \sum_a m_a \boldsymbol{\rho}_a \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\rho}_a) \\ &= \sum_a m_a [\rho_a^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\rho}_a \cdot \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\rho}_a] \end{aligned} \quad (5.33)$$

Esta ecuación define una relación lineal entre la velocidad angular y el impulso angular, análoga a la que hay entre el impulso y la velocidad. Esta función, sin embargo, es más compleja que la anterior. La ecuación (5.33) muestra que velocidad angular e impulso angular no serán, en general, paralelos. La conexión se efectúa por medio de un *tensor*, que pasamos a definir.

El conjunto de nueve cantidades:

$$I_{ij} = \sum_a m_a [\rho_a^2 \delta_{ij} - \rho_{ai} \rho_{aj}] \quad (5.34)$$

que podemos pensar como las componentes de una matriz cuadrada \mathbf{I} , se transforman bajo rotaciones como el producto de las coordenadas:

$$I'_{ik} = \lambda_{il} \lambda_{km} I_{ml} \quad (5.35)$$

Un conjunto de nueve números que se transforma como (5.35) se llama *tensor de segundo rango*. En forma matricial podemos escribir la ecuación (5.35) como:

$$\mathbf{I}' = \mathbf{\Lambda} \mathbf{I} \mathbf{\Lambda}^T \quad (5.36)$$

El tensor \mathbf{I} se conoce como *tensor de inercia* del cuerpo rígido. Desempeña un papel análogo al de la masa, pues expresa la “capacidad de reacción” de un cuerpo rígido ante la aplicación de una cupla. Usando el tensor de inercia podemos escribir la ecuación (5.33) en las formas equivalentes:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (5.37a)$$

$$L_i = I_{ik} \omega_k \quad (5.37b)$$

La energía cinética del cuerpo rígido también puede expresarse usando el tensor de inercia. Un cálculo sencillo conduce a:

$$T = \frac{1}{2} \omega_i I_{ik} \omega_k \quad (5.38a)$$

$$= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (5.38b)$$

Esta cantidad es necesariamente positiva. Veremos que eso implica restricciones sobre la forma del tensor de inercia. Finalmente, definimos el *momento de inercia* respecto del eje de rotación \mathbf{n} como:

$$I = 2 \frac{T}{\omega^2} \quad (5.39)$$

Es fácil probar que esta definición coincide con la definición elemental de momento de inercia.

5.3.2. Nociones de álgebra tensorial

Los tensores de segundo rango, como el momento de inercia, aparecen en muchos campos de la física y por eso nos detendremos brevemente en su estudio.

Los tensores de segundo rango pertenecen, como los escalares y los vectores, a la familia de los *tensores cartesianos*. Un *tensor (cartesiano) de rango k* es un conjunto de 3^k cantidades que bajo rotaciones se transforman como el producto de k coordenadas:

$$t'_{i_1 \dots i_k} = \lambda_{i_1 j_1} \dots \lambda_{i_k j_k} t_{j_1 \dots j_k} \quad (5.40)$$

Los vectores satisfacen, evidentemente, esta definición (Cf. ecuación (1.6)) e interpretaremos a los escalares como tensores de rango cero. Si en un sistema de coordenadas cartesianas se anulan todas las componentes del tensor, también se anularán en todo otro sistema cartesiano. Esta propiedad es, pues, covariante bajo rotaciones y por lo tanto las ecuaciones tensoriales, tal como las vectoriales, expresan propiedades intrínsecas de un sistema mecánico.

Las operaciones algebraicas entre tensores son sencillas: la suma componente a componente de dos tensores del mismo rango produce otro tensor del mismo rango y el producto componente a componente de tensores de rango k y l produce un nuevo tensor de rango $k+l$. En particular, dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , el *producto tensorial* de ambos es el tensor de segundo rango $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de componentes $a_i b_j$. Usando estas operaciones tensoriales, el tensor de inercia se expresa como:

$$\mathbf{I} = \sum_a m_a (\mathbb{I} \rho_a^2 - \boldsymbol{\rho}_a \times \boldsymbol{\rho}_a)$$

en donde \mathbb{I} representa el *tensor unidad* o *tensor de Kronecker*.

Una última operación sobre tensores generaliza la noción de producto escalar: la *contracción* de dos índices del tensor. Esta operación consiste en hacer iguales dos índices del tensor y sumar sobre ellos. Se obtiene en este caso un tensor de rango $k - 2$:

$$s_{i_1 \dots i_{k-2}} = t_{i_1 \dots i_{k-2} j j}$$

El producto escalar de dos vectores resulta igual a la contracción de su producto tensorial:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$$

Este es un caso particular de la contracción de un tensor cualquiera de segundo orden, operación que origina un escalar llamado la *traza* del tensor:

$$\text{tr } \mathbf{I} = I_{jj} \quad (5.41)$$

En general, indicaremos el producto seguido de contracción como un producto escalar, tal como en las ecuaciones (5.37a) y (5.38b). Por ejemplo, el *invariante cuadrático* del tensor \mathbf{I} se escribe:

$$\mathbf{QI} = \mathbf{I} : \mathbf{I} = I_{ml} I_{ml} \quad (5.42)$$

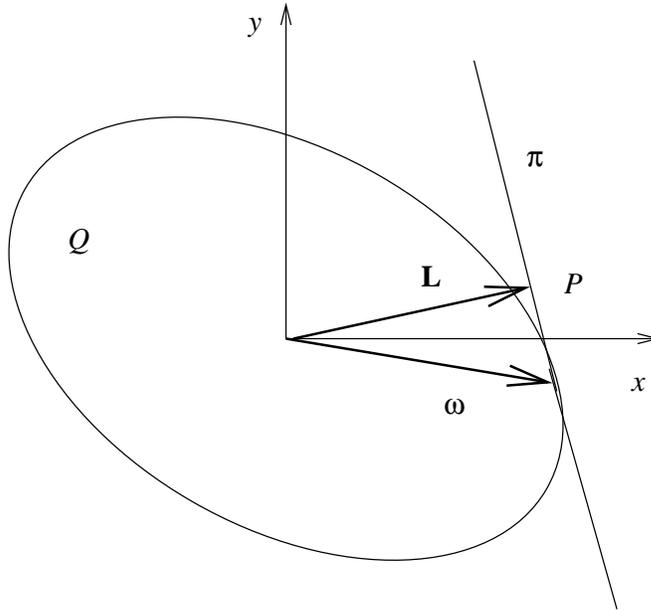


Figura 5.10: Elipsoide de Inercia

Mencionemos, finalmente, que las propiedades de simetría o antisimetría de un tensor:

$$I_{lm} = I_{ml} \quad A_{lm} = -A_{ml}$$

son covariantes bajo transformaciones de coordenadas y representan, por lo tanto, propiedades intrínsecas del sistema.

5.3.3. Ejes de inercia

Si bien un tensor simétrico de segundo rango representa un objeto geométrico (o dinámico) este objeto es más complejo que la simple flecha que representa un vector. Un objeto adecuado está sugerido por las ecuaciones (5.38), que representan una cuádrica, más precisamente un elipsoide. Esta cuádrica es la representación más adecuada de un tensor de segundo rango.

La cuádrica definida por la ecuación:

$$\frac{2T}{I\omega^2} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}{I\omega^2} = 1 \quad (5.43)$$

se llama el *elipsoide de inercia*. Podemos usarlo para dar una bonita representación de la acción de un tensor sobre un vector, sugerida por Poinsot. Tracemos el vector $\boldsymbol{\omega}$ hasta un punto P sobre el elipsoide y por él tracemos el plano tangente. Pero como $\mathbf{L} = \nabla_{\boldsymbol{\omega}} T$ el impulso angular debe ser normal al plano tangente (Figura 5.10). Por lo general, pues, un tensor actuando sobre un vector produce un vector de distinta dirección.

Sin embargo, existen tres direcciones privilegiadas en las que \mathbf{L} y $\boldsymbol{\omega}$ son paralelos, que se llaman los *ejes principales* del tensor o (en nuestro caso) *ejes de inercia*. En efecto, los ejes de inercia quedan definidos por la condición:

$$\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad (5.44)$$

Esta es una ecuación lineal homogénea que tendrá solución si y sólo si el determinante de los coeficientes se anula:

$$\det(\mathbf{l} - \lambda \mathbb{I}) = 0 \quad (5.45)$$

y ésta, a su vez, es una ecuación de tercer grado en λ , que tendrá tres soluciones llamadas *autovalores* del tensor o (en nuestro caso) *momentos principales de inercia*. Los vectores $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ asociados a cada uno de los autovalores, llamados *autovectores* del tensor (o, en nuestro caso, *versores de inercia*) son ortogonales entre sí. En efecto, sean:

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(i)} &= I_i \boldsymbol{\omega}^{(i)} \\ \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(j)} &= I_j \boldsymbol{\omega}^{(j)} \end{aligned}$$

las ecuaciones correspondientes a los autovalores I_i e I_j . Multiplicando escalarmente la primera por $\boldsymbol{\omega}^{(j)}$ y la segunda por $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ y restando hallamos:

$$\boldsymbol{\omega}^{(j)} \cdot \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(i)} - \boldsymbol{\omega}^{(i)} \cdot \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(j)} = (I_i - I_j) \boldsymbol{\omega}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(j)}$$

pero el primer miembro se anula por ser simétrico el tensor \mathbf{l} , de modo que hallamos:

$$(I_i - I_j) \boldsymbol{\omega}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(j)} \quad (5.46)$$

Si los momentos principales de inercia son distintos, deducimos de inmediato que los versores son ortogonales. Si son iguales, no se puede afirmar lo mismo, pero en este caso se puede construir fácilmente otro par de autovectores ortogonales. En efecto, si $I_i = I_j$, $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ y $\boldsymbol{\omega}^{(j)}$ satisfacen la misma ecuación y también la satisfará cualquier combinación lineal de ambos. Podemos formar entonces dos nuevos autovectores de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varpi}^i &= \boldsymbol{\omega}^{(i)} \\ \boldsymbol{\varpi}^j &= \boldsymbol{\omega}^{(j)} - \alpha \boldsymbol{\omega}^{(i)} \end{aligned}$$

y elegir el parámetro α de manera que $\boldsymbol{\varpi}^i$ sea ortogonal a $\boldsymbol{\varpi}^j$:

$$0 = \boldsymbol{\omega}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(j)} - \alpha \boldsymbol{\omega}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(i)}$$

De esta manera es posible hallar tres ejes ortogonales, los ejes principales de inercia, que podemos elegir como nuevo sistema de coordenadas, con la importante propiedad de que el tensor de inercia toma la forma diagonal:

$$I_{ik} = I_i \delta_{ik} \quad (5.47)$$

y por lo tanto, las ecuaciones del impulso angular y de la energía cinética toman en él su forma más sencilla:

$$L_i = I_i \omega_i \quad (5.48)$$

(¡No se suma sobre índices repetidos!)

$$T = \frac{1}{2}(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (5.49)$$

La posibilidad de reducir el tensor de inercia a forma diagonal depende sólo de la simetría del tensor:

$$\mathbf{I}^\top = \mathbf{I} \quad (5.50)$$

y vale para cualquier tensor simétrico.

En el caso particular en que dos de los momentos de inercia se son iguales se trata de un *cuerpo simétrico* cuyo elipsoide de inercia es de revolución. Esto ocurre cada vez que la distribución de masa tiene un eje de simetría, tal como ocurre en los trompos de juguete, y uno de los ejes principales coincide con el de simetría.

Problemas 5.3

Problema 5.3.1 (Teorema de Steiner).

Sea I el momento de inercia de un cuerpo de masa M respecto de un eje de rotación \mathbf{n} , y sea I' el momento de inercia respecto de otro eje $\mathbf{n}' \parallel \mathbf{n}$ y situado a una distancia d del primero. Probar que:

$$I' = I + Md^2$$

Problema 5.3.2.

Probar que si la distribución de masas tiene un plano de simetría, el elipsoide de inercia, tomado respecto del centro de masas, tiene ese mismo plano de simetría.

Problema 5.3.3.

Mostrar que si la distribución de masas tiene tres o más planos de simetría que se cortan en un eje \mathbf{n} , el elipsoide de inercia es de revolución respecto de ese eje.

Problema 5.3.4.

Mostrar que para una distribución de masas concentrada en el plano (x, y) , se cumple que

$$I_z = I_x + I_y$$

Problema 5.3.5.

Hallar los momentos de inercia respecto del centro de masas de los cuerpos siguientes:

1. Paralelepípedo de lados a, b, c .

2. Cilindro circular de radio R y altura h .
3. Elipsoide de semiejes a, b, c .
4. Toro, de radio mayor R y menor r .

En todos los casos, se supone densidad constante ρ y masa total M .

5.4. Las ecuaciones de Euler

En las secciones anteriores hemos desarrollado los elementos necesarios para estudiar escribir las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido. Éstas, llamadas *ecuaciones dinámicas de Euler*, por su simetría y elegancia son uno de los grandes logros de la Mecánica Analítica. Combinadas con las ecuaciones cinemáticas de Euler (5.12) proporcionan, en principio, la solución de cualquier problema dinámico del cuerpo rígido.

5.4.1. Deducción de las ecuaciones

Deduciremos las ecuaciones de Euler a partir de las ecuaciones de Lagrange y para ello, debemos construir el lagrangeano de un cuerpo rígido:

$$L = T - V \tag{5.51}$$

en donde tanto T como V dependen sólo de las coordenadas del centro de masa y de los ángulos de Euler. Se presenta aquí una dificultad: el tensor de inercia es una función complicada de los ángulos de Euler en el sistema S : una magnitud que cambia con la orientación del cuerpo. El tensor de inercia, sin embargo, es constante en el sistema C . Además, es diagonal si se eligen los ejes principales del cuerpo como los ejes de C . Pero C es un sistema rotante y aparecerán fuerzas inerciales si trabajamos en él. De los dos males éste es el menor y por lo tanto la energía cinética del cuerpo toma la forma (5.49).

Recordemos que ω no son variables holonomas y para hallar las ecuaciones de movimiento es necesario usar los ángulos de Euler. Nos bastará estudiar la ecuación de Lagrange para el ángulo γ . Usando las ecuaciones (5.12) hallamos:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} = I_3 \omega_3 \tag{5.52a}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \gamma} = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \tag{5.52b}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma} = \tau_3 \tag{5.52c}$$

en donde τ_3 es la cupla alrededor del eje principal 3. Reemplazando en las ecuaciones de Lagrange (4.51) hallamos:

$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = \tau_3 \quad (5.53a)$$

Como la elección del eje 3 es arbitraria, ecuaciones análogas deben resultar para los otros dos ejes y sin mayor trabajo obtenemos:

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = \tau_1 \quad (5.53b)$$

$$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = \tau_2 \quad (5.53c)$$

Estas elegantísimas *ecuaciones de Euler* contienen la dinámica del cuerpo rígido con un punto fijo. No es difícil probar que expresan la ley de variación del impulso angular (1.92) en el sistema C (Problema 5.4.1):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} \quad (5.54)$$

y eligiendo a este último como el sistema de ejes principales.

De la misma manera, puede probarse que la ley de Newton en el sistema C se escribe (Problema 5.4.2):

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (5.55)$$

La belleza y simetría de las ecuaciones (5.53) esconden las dificultades del problema: se trata de ecuaciones no lineales y por lo tanto muy difíciles de integrar. Salvo casos particulares sencillos, es necesario conformarse con consideraciones cualitativas.

5.4.2. El cuerpo simétrico

El caso de un cuerpo simétrico libre de cuplas es el más sencillo, tanto que la integración puede llevarse a cabo en forma elemental. La eliminación de las cuplas puede lograrse colocando el cuerpo simétrico R en un *montaje de Cardano* (Figura 5.11). Éste consiste en tres anillos, centrados en el centro de masas del cuerpo, que pueden girar sobre tres ejes ortogonales. Otra manera de lograrlo es poner el cuerpo rígido en caída libre, ya que localmente se trata de un sistema inercial.

Elijamos como eje 3, el eje de simetría del cuerpo; tendremos, entonces $I_1 = I_2$ y si el trompo está libre de fuerzas $\boldsymbol{\tau} = 0$. Sustituyendo en la ecuación (5.53a) obtenemos:

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0 = \dot{L}_3$$

que nos da la ley de conservación del impulso angular sobre el eje de simetría:

$$L_3 = I_3\omega_3 \quad (5.56)$$

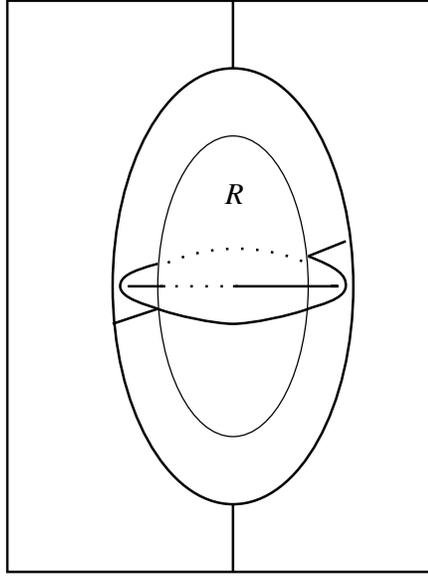


Figura 5.11: Montaje de Cardano para un giróscopo

Las otras dos ecuaciones (5.53) toman la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 + \Omega_E \omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 - \Omega_E \omega_1 &= 0\end{aligned}$$

en donde hemos introducido la *frecuencia de Euler*:

$$\Omega_E = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \quad (5.57)$$

Introduciendo la variable auxiliar $\varpi = \omega_1 + i\omega_2$ las ecuaciones anteriores se reducen a una única ecuación compleja:

$$\dot{\varpi} - i\Omega_E \varpi = 0 \quad (5.58)$$

cuya solución tiene la forma:

$$\varpi = \varpi_0 e^{i\Omega_E t} \quad (5.59)$$

Esta última ecuación expresa que la velocidad angular gira uniformemente alrededor del eje de simetría del cuerpo con el *periodo de Euler*:

$$T_E = \frac{I_1}{I_3 - I_1} \frac{2\pi}{\omega_3} \quad (5.60)$$

Éste es el fenómeno de la precesión de la velocidad angular. Lo mismo ocurre con el impulso angular del cuerpo: gira con la frecuencia Ω_E alrededor del eje de simetría. Este fenómeno se conoce como *precesión regular* del cuerpo rígido.

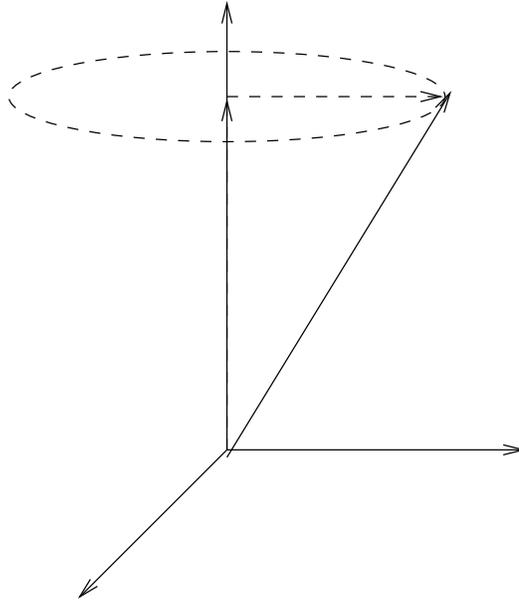


Figura 5.12: Precesión regular del cuerpo rígido en el sistema C.

Aplicamos la teoría anterior a la rotación de la Tierra que, en primera aproximación, se comporta como un cuerpo simétrico libre de fuerzas. En este caso, la diferencia de los momentos principales de inercia es pequeña:

$$\left. \frac{I_3 - I_1}{I_3} \right|_{\oplus} \sim 305$$

y por lo tanto se espera que el eje instantáneo de rotación de la Tierra (el polo celeste) gire alrededor del eje de simetría de la Tierra (el polo geométrico) con un periodo de ~ 300 días. Las observaciones, iniciadas el siglo pasado, muestran que existe un movimiento como el predicho, pero con un periodo de ~ 427 días (Periodo de Chandler). La diferencia entre los dos periodos se debe a la rigidez imperfecta de la Tierra.

Hasta ahora, hemos examinado el movimiento del cuerpo simétrico respecto del sistema C, pero es importante examinar el mismo problema en el sistema inercial S. Para ello, es necesario conocer los ángulos de Euler en función del tiempo. Puesto que conocemos las componentes de la velocidad angular en C, podemos calcularlos directamente de las ecuaciones cinemáticas de Euler (5.12). Otro camino posible es usar la formulación lagrangeana, junto con las leyes de conservación.

Elijamos el eje z del sistema S coincidente con el impulso angular total \mathbf{L} . Tanto \mathbf{L} como $|\text{vector } L_3$, su proyección sobre el eje 3, son sonstantes del movimiento

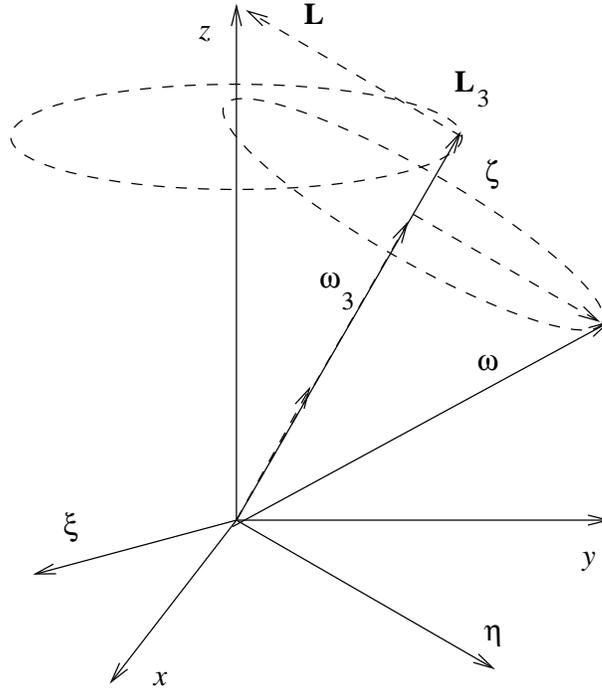


Figura 5.13: Precesión regular del eje alrededor del impulso angular total

y por lo tanto lo es el ángulo β pues:

$$\cos \beta = \frac{L_3}{L} \quad (5.61)$$

La velocidad angular alrededor del eje 3 está conectada con los ángulos de Euler a través de:

$$\omega_3 = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \frac{L_3}{L} \quad (5.62)$$

Además, $\dot{\gamma} = -\Omega_E$ es menos la frecuencia de Euler. Finalmente, hallamos la *frecuencia de precesión* del cuerpo:

$$\Omega_p = \frac{L}{I_1} \quad (5.63)$$

El eje de simetría del cuerpo gira uniformemente alrededor del impulso angular total. Este es el fenómeno de *precesión regular del cuerpo rígido*. El eje de simetría describe un cono de ángulo β en el sistema \mathbf{S} . Si \mathbf{L} está alineado con el eje de simetría, el ángulo del cono será muy pequeño y la dirección del eje de simetría de un cuerpo simétrico permanecerá estacionaria en el espacio. El sistema se comporta como un “patrón de dirección” que se mantiene en el tiempo mientras sean despreciables las cuplas sobre el sistema. De hecho, la idea se utiliza en sistemas de piloto automático.

5.4.3. Fenómenos giroscópicos

Aunque de hecho todas las leyes básicas de la física contradicen la intuición mecánica adquirida desde la infancia, en el giróscopo se encuentran algunas de las manifestaciones más sorprendentes. Examinemos dos sencillos experimentos que pueden realizarse colocando el giróscopo sobre una mesa giratoria.

En primer lugar, se coloca el giróscopo sobre la mesa, con el vínculo de que pueda moverse sólo en un plano vertical que pase por el eje de rotación de la mesa. Puesto que se trata del vínculo holonomo $\alpha = 0$, será más conveniente trabajar con las ecuaciones de Lagrange.

Si se sustituyen las ecuaciones cinemáticas de Euler en la energía cinética del cuerpo simétrico hallamos:

$$T = \frac{1}{2}I_1(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta)^2 \quad (5.64)$$

Ahora bien: en la configuración en que estamos trabajando, el giróscopo está conectado sobre una mesa que gira con velocidad Ω y obligado a moverse en el plano $\alpha = 0$. El sistema S no es ahora inercial sino acelerado y es necesario sumar a la velocidad angular del cuerpo rígido la de rotación de la mesa. Elijamos en S el eje z como el de rotación de la mesa, el eje x en la dirección radial y el y ortogonal a ambos. Es fácil ver que la energía cinética en estas condiciones se obtiene de (5.64) sustituyendo $\dot{\alpha}$ por Ω . Hallamos para el lagrangeano del giróscopo en rotación:

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\beta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \beta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\gamma} + \Omega \cos \beta)^2 \quad (5.65)$$

El lagrangeano anterior es independiente del tiempo y la variable γ es cíclica. Tenemos, pues, dos leyes de conservación:

$$L_3 = I_3\omega_3 = I_3(\dot{\gamma} + \Omega \cos \beta) \quad (5.66a)$$

$$H = \frac{1}{2}I_1(\dot{\beta}^2 - \Omega^2 \sin^2 \beta) + L_3\omega_3 + \frac{1}{2}L_3\dot{\gamma} \quad (5.66b)$$

Si ahora eliminamos $\dot{\gamma}$ entre las ecuaciones (5.66) hallamos la ley de conservación de la energía para el sistema:

$$E - \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{I_3} = \frac{1}{2}I_1(\dot{\beta}^2 - \Omega^2 \sin^2 \beta) - I_3\omega_3\Omega \cos \beta \quad (5.67)$$

Para apartamientos pequeños del eje z , la ecuación anterior toma la forma aproximada:

$$E' = \frac{1}{2}I_1\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3\Omega\beta^2 - \frac{1}{12}I_1\Omega^2\beta^2$$

En las condiciones usuales del experimento, el giroscopo gira a muy alta velocidad $\omega_3 \gg \Omega$ y el último término es despreciable frente al segundo. La ecuación diferencial es la de un oscilador armónico si ω_3 y Ω tienen el mismo signo y describe un movimiento inestable en caso contrario. Esta ecuación describe al tendencia de los impulsos angulares a ser paralelos.

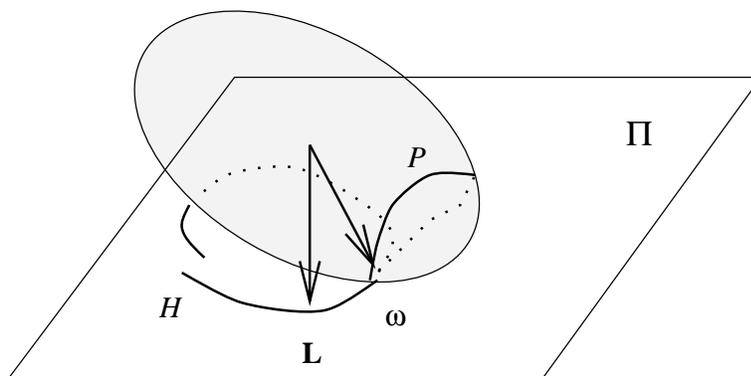


Figura 5.14: Movimiento de un cuerpo rígido asimétrico: descripción de Poinsoot.

5.4.4. El cuerpo asimétrico

El movimiento de un cuerpo asimétrico es mucho más difícil de tratar que el de uno simétrico. Lo que aumenta la dificultad es que se pierde la ley de conservación del impulso angular alrededor del eje de simetría (5.56). Las ecuaciones de Euler (5.53) pueden integrarse usando funciones elípticas, las que usualmente no se estudian en cursos elementales. Las consideraciones cualitativas, pues, se hacen muy importantes.

Una manera sencilla de describir el movimiento de un cuerpo rígido se debe a Poinsoot, que para ello introdujo la construcción que estudiamos en la Sección 5.3 (Figura 5.10). Como \mathbf{L} es un vector constante en un sistema inercial, el plano tangente a la construcción de Poinsoot no cambia con el tiempo y por eso se lo llama el *plano invariable* Π (Figura 5.14). Pero la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ cambia de posición con respecto del cuerpo y describe sobre el elipsoide de inercia una curva llamada *polodo* P . El movimiento del sólido asimétrico puede describirse, pues, afirmando que el elipsoide de inercia rueda sin deslizarse sobre el plano invariable. La curva descrita por el vector $\boldsymbol{\omega}$ sobre este último se llama el *herpolodo* H .

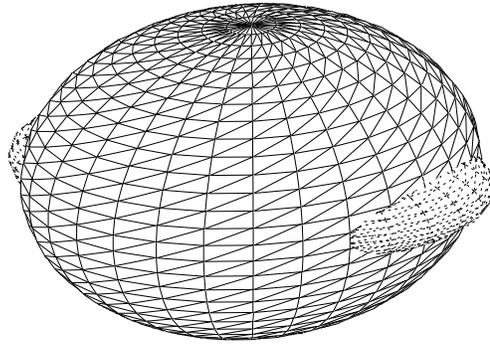
No es difícil hallar las ecuaciones del polodo. Consideremos en el sistema C las ecuaciones de conservación de la energía y del impulso angular total:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \right) \quad (5.68)$$

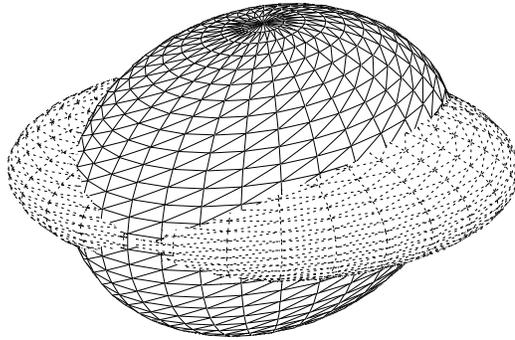
$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

Ambas ecuaciones deben ser satisfechas por las componentes del impulso angular y son, por lo tanto, las ecuaciones del polodo: las intersecciones de una esfera con un elipsoide de tres ejes.

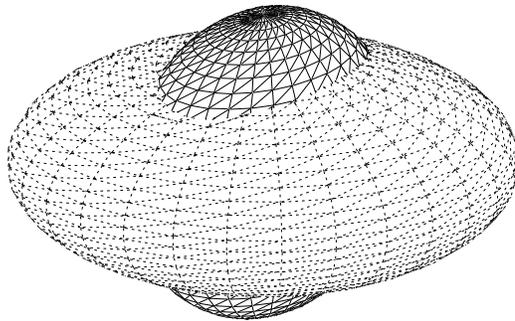
La construcción de Poinsoot permite una descripción cualitativa del movimiento del cuerpo rígido. Examinemos, por ejemplo, la estabilidad de las rotaciones del



(a) $L^2 > 2I_2E$



(b) $L^2 = 2I_2E$



(c) $L^2 < 2I_2E$

Figura 5.15: Polodos en las cercanías de los ejes

cuerpo asimétrico alrededor de los ejes. En ese caso, el radio de la esfera será apenas menor que el eje mayor del elipsoide y la intersección de ambas superficies será una curva situada a distancia pequeña del eje (Figura 5.4.4): el eje mayor del elipsoide se comporta como un centro (Sección 2.3). Como consecuencia, la rotación de un cuerpo rígido alrededor del eje mayor de inercia es estable, en el sentido de que una pequeña perturbación en las condiciones iniciales cambia muy poco la orientación del cuerpo: el impulso angular efectuará una precesión alrededor del eje mayor. También son estables las rotaciones alrededor del eje menor del elipsoide de inercia (Figura 5.4.4). Esto no es cierto, sin embargo de las rotaciones alrededor del eje intermedio. En ese caso, el elipsoide y la esfera se intersecan en curvas semejantes a hipérbolas (Figura 5.4.4): el eje intermedio del elipsoide de inercia se comporta como un punto de ensilladura (Sección 2.3). Un pequeño apartamiento del eje hará que el impulso angular se mueva a lo largo de la intersección, alejándose de su posición original y por lo tanto el eje intermedio es inestable respecto de pequeñas perturbaciones.

Un sencillo experimento con una caja de fósforos ilustrará estos resultados. Se la deja caer haciéndola girar rápidamente alrededor de sus ejes. Puesto que se trata de un cuerpo en caída libre, se comportará como un cuerpo asimétrico libre de cuplas. Si se la hace girar alrededor del eje mayor o del menor, se logrará fácilmente que caiga mostrando siempre la misma cara; pero no se podrá lograr si se la hace girar alrededor del eje medio. En ese caso, la caja caerá dando tumbos y mostrando sus caras en un remolino de colores.

Problemas 5.4

Problema 5.4.1.

Probar las ecuaciones de Euler (5.53) a partir de la conservación del impulso angular (1.92).

Problema 5.4.2.

Probar la ley de movimiento (5.55) a partir de la ley dinámica de Newton.

Problema 5.4.3.

Discutir el movimiento de un cuerpo simétrico a partir de las ecuaciones de Lagrange.

Sugestión: Utilizar las leyes de conservación deducibles del lagrangeano.

Problema 5.4.4.

Estudiar el *girocompás de Foucault*: un giróscopo forzado a moverse en un plano horizontal. Probar que el eje de rotación efectúa oscilaciones alrededor del meridiano del lugar.

Problema 5.4.5.

Deducir los teoremas de conservación (5.68) a partir de las ecuaciones de Euler.

Problema 5.4.6.

Estudiar el movimiento del cuerpo asimétrico cerca de uno de los ejes estables de rotación. Hallar las ecuaciones del polodo y los periodos de rotación.

Sugestión: Conservar términos lineales en las ecuaciones de Euler.

Problema 5.4.7.

Estudiar el movimiento del cuerpo asimétrico cerca del eje intermedio de inercia.

5.5. El trompo

El movimiento de un cuerpo rígido sometido a cuplas es uno de los problemas más fascinantes de la mecánica. El extraño comportamiento de un *trompo*¹ que apoyado en el piso rehusa caer ha atraído a niños y adultos desde tiempo inmemorial. Su fascinante teoría atrajo (y sigue atrayendo) a físicos y matemáticos, que la han trabajado en gran profundidad. En esta sección nos limitaremos a los casos más sencillos, y la discusión será, en su mayor parte, cualitativa.

5.5.1. El trompo pesado

Sea un trompo simétrico cuya punta está fija en el origen del sistema S . Esto corresponde, aproximadamente, al lanzamiento de una peonza sobre un piso rugoso (Figura 5.16). El lagrangeano de este sistema, expresado con los ángulos de Euler, es (Cf. (5.64)):

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta)^2 - Mgl \cos \beta \quad (5.69)$$

donde los momentos de inercia se toman respecto del punto fijo y M es la masa del trompo.

En este lagrangeano, las variables α y γ son cíclicas y por lo tanto los impulsos generalizados correspondientes se conservan (Sección 5.4.3):

$$L_z = I_1 \dot{\alpha} \sin^2 \beta + I_3(\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma}) \cos \beta \quad (5.70a)$$

$$L_3 = I_3(\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma}) = I_3 \omega_3 \quad (5.70b)$$

Estas cantidades son las proyecciones del impulso angular sobre la vertical y sobre el eje de simetría del trompo. Además, la invarianza bajo traslaciones temporales implica la conservación de la energía:

$$E = \frac{1}{2}I_1(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma})^2 + Mgl \cos \beta \quad (5.70c)$$

¹En castellano rioplatense. En España y otros países latinoamericanos, *peonza*.

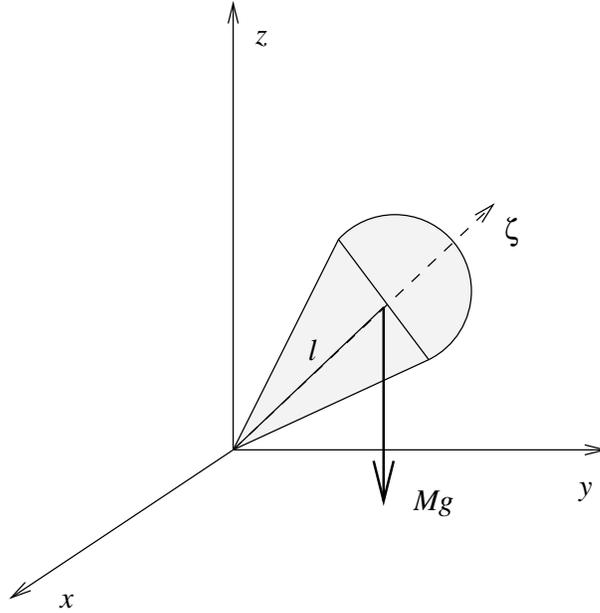


Figura 5.16: Esquema de un trompo pesado

Estas leyes de conservación son suficientes para resolver completamente el problema sin formar las ecuaciones de Lagrange (Sección 5.4.3). Eliminemos las velocidades angulares $\dot{\alpha}$ y $\dot{\gamma}$ usando las dos primeras leyes de conservación:

$$\dot{\alpha} = \frac{L_z - L_3 \cos \beta}{I_1 \sin^2 \beta} \quad (5.71a)$$

$$\dot{\gamma} = \omega_3 - \dot{\alpha} \cos \beta \quad (5.71b)$$

y sustituyendo en la ecuación de la energía (5.70c):

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\beta}^2 + \frac{L_3^2}{2I_3} + \frac{1}{2} \frac{(L_z - L_3 \cos \beta)^2}{I_1 \sin^2 \beta} + Mgl \cos \beta \quad (5.72)$$

que corresponde al movimiento unidimensional de una partícula en un potencial efectivo:

$$V_{\text{ef}} = \frac{1}{2} \frac{(L_z - L_3 \cos \beta)^2}{I_1 \sin^2 \beta} + Mgl \cos \beta$$

con una energía total efectiva:

$$E_{\text{ef}} = E - \frac{L_3^2}{2I_3}$$

Integrando la ecuación (5.72), de ella se obtiene β como función del tiempo. Sustituyendo en las ecuaciones (5.71) se obtienen los otros dos ángulos de Euler. De esta manera se puede, en principio, hallar una descripción completa del movimiento en función del tiempo.

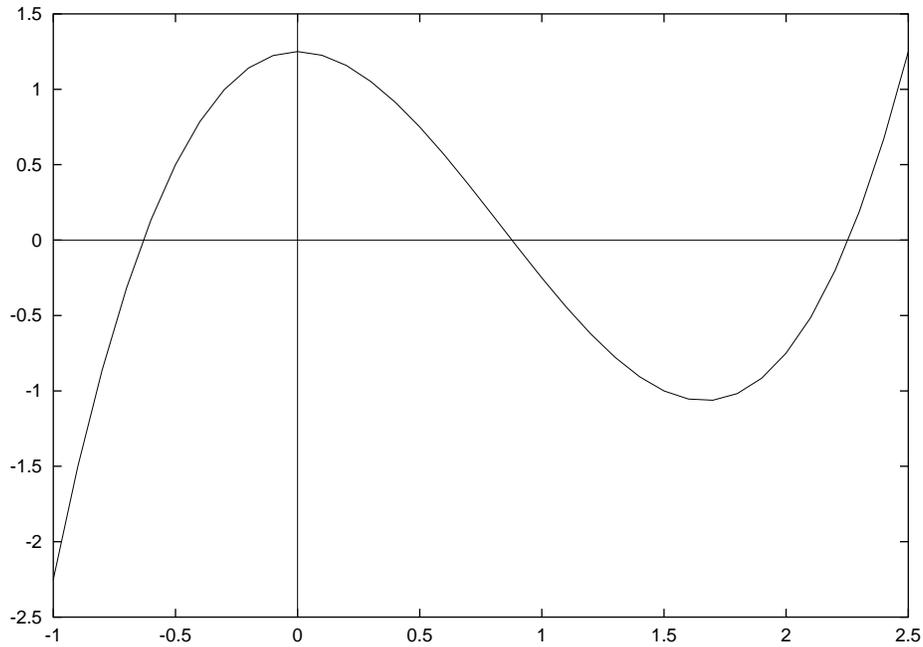


Figura 5.17: El polinomio $f(u)$

5.5.2. Discusión del movimiento

La integración de las ecuaciones del trompo pesado conduce a integrales elípticas y la discusión analítica de sus soluciones es algo complicada. Podemos, sin embargo, analizar cualitativamente su movimiento con ayuda de la ecuación de la energía y el método del potencial efectivo.

Es conveniente, para desarrollar la teoría, introducir el cambio de variables:

$$\begin{aligned} u &= \cos \beta \\ \dot{u} &= -\text{sen } \beta \dot{\beta} \end{aligned} \quad (5.73)$$

Con este cambio de variables, la ecuación (5.72) toma la forma algebraica:

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\epsilon - \mu u) - (b - au)^2 \quad (5.74)$$

en donde hemos introducido la notación abreviada:

$$\epsilon = 2 \frac{E_{\text{ef}}}{I_1} \quad \mu = 2 \frac{Mgl}{I_1} \quad (5.75)$$

$$b = \frac{L_z}{I_1} \quad a = \frac{L_3}{I_1} \quad (5.76)$$

Estudiemos la ecuación diferencial (5.74) con un método análogo al del potencial efectivo. El segundo miembro de la ecuación es un polinomio de tercer

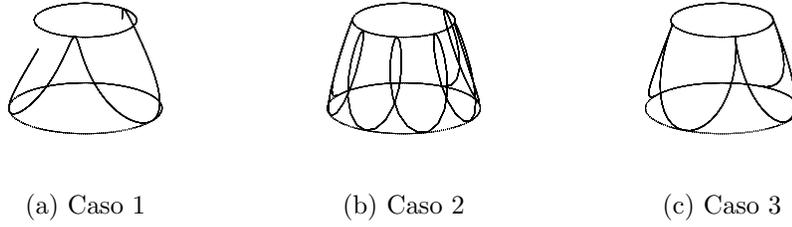


Figura 5.18: Trayectoria del eje del trompo sobre la esfera unidad

grado en la variable u :

$$f(u) = (1 - u^2)(\epsilon - \mu u) - (b - au)^2 \quad (5.77)$$

Ahora bien, cuando $u = \pm 1$ (que corresponde a los valores $\beta = 0, \pi$), $f(u) = (b \pm a)^2$ es negativo y además, cuando $u \rightarrow \infty$, $f(u) \rightarrow \mu u^3 > 0$. Para que el movimiento sea posible, el polinomio debe tener tres raíces reales que satisfacen:

$$-1 < u_1 < u_2 < 1 < u_3$$

La variable u , entoces, debe estar limitada al intervalo $u_1 \leq u \leq u_2$. El ángulo β varía entre los dos ángulos

$$\cos \beta_1 = u_1 \qquad \cos \beta_2 = u_2$$

con una oscilación llamada *nutación libre* del trompo.

Por otra parte, el ángulo α obedece la ecuación (5.71a) y su comportamiento depende de las constantes a y b . Pueden presentarse dos casos principales:

1. $b - au$ no se anula en el intervalo $[u_1, u_2]$. En ese caso $\dot{\alpha}$ tiene siempre el mismo signo y el trompo sufre una precesión alrededor del eje z . Esta *precesión forzada* por la gravitación no debe confundirse con la precesión regular del trompo libre de cuplas. La velocidad de precesión no es constante y simultáneamente el trompo cabecea de arriba abajo.
2. $b - au$ se anula en el intervalo $[u_1, u_2]$. En ese caso $\dot{\alpha}$ cambia de signo mientras β sugre la nutación y las velocidades instantáneas de precesión son diferentes sobre los círculos que limitan el movimiento. El ángulo α se adelanta y retarda en función del tiempo y la trayectoria forma lazos sobre la esfera unidad.
3. Un caso límite entre 1 y 2 ocurre cuando $b - au$ tiene un cero sobre u_2 (o sobre u_1). En ese caso tanto $\dot{\alpha}$ como \dot{u} se anulan simultáneamente y la

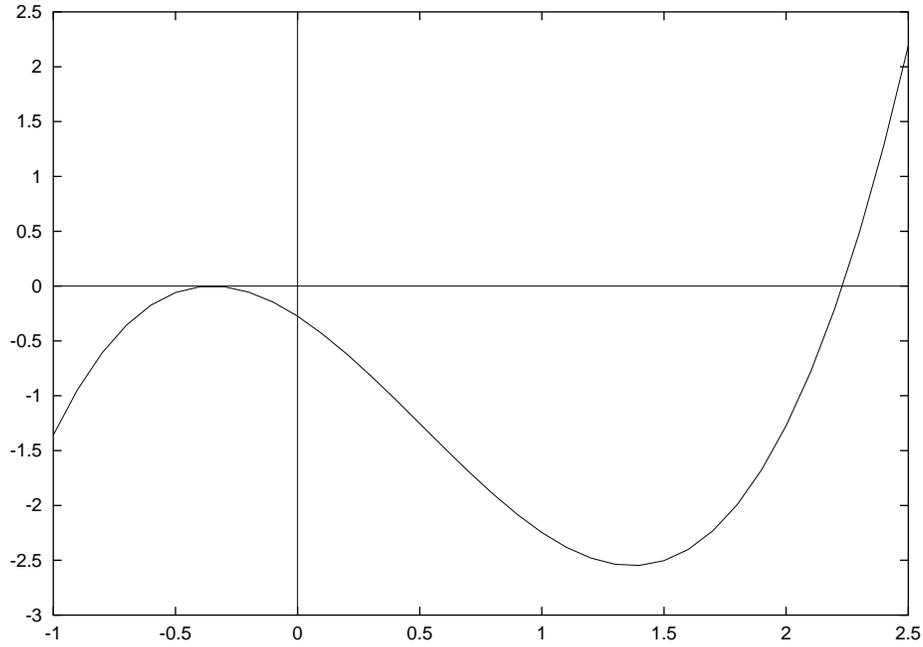


Figura 5.19: Polinomio $f(u)$ en condiciones de precesión regular

trayectoria tiene cúspides sobre el correspondiente círculo límite. Este caso corresponde a las condiciones iniciales usuales en un giróscopo sobre el que actúa un peso: para ponerlo en marcha se le da una velocidad angular ω_3 manteniendo fija la dirección del eje y luego se lo deja caer.

Hay dos casos particulares en que la solución es elemental: cuando la amplitud de nutación se anula $u_1 = u_2$ y cuando el trompo está “parado” $u = 1$. Examinaremos el primer caso y dejaremos como ejercicio el segundo (Problema 5.5.1). Para que se anule la amplitud de nutación deben anularse función y derivada al mismo tiempo (Figura 5.19):

$$(1 - u_0^2)(\epsilon - \mu u_0) = (b - au_0)^2 \quad (5.78a)$$

$$-\mu(1 - u_0^2) - 2(\epsilon - \mu u_0)u_0 = -2a(b - au_0) \quad (5.78b)$$

De la ecuación (5.71a) deducimos:

$$b - au_0 = (1 - u_0^2)\Omega_r \quad (5.79)$$

que introducida en las ecuaciones (5.78) conduce a:

$$\begin{aligned} \epsilon - \mu u_0 &= (1 - u_0^2)\Omega_r^2 \\ -\mu(1 - u_0^2) - 2(\epsilon - \mu u_0)u_0 &= -2a(1 - u_0^2)\Omega_r \end{aligned}$$

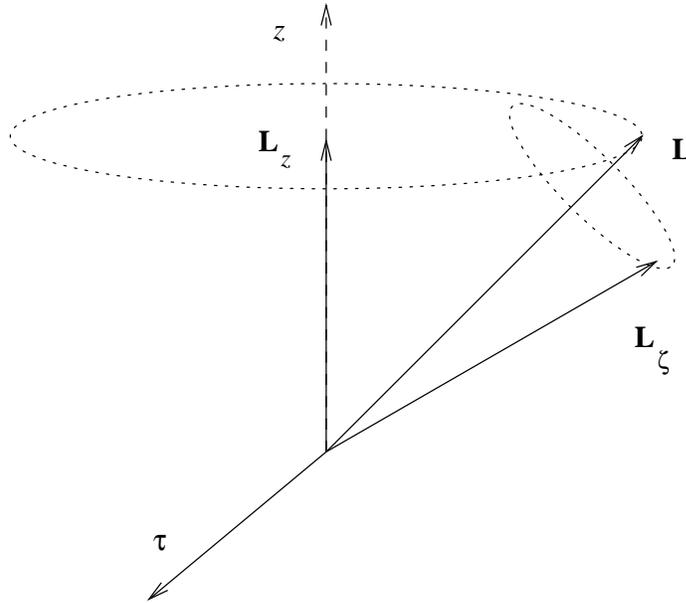


Figura 5.20: Diagrama vectorial para el trompo veloz

y finalmente, se halla:

$$\mu + 2u_0\Omega_r^2 = 2a\Omega_r \quad (5.80)$$

Existen dos soluciones de (5.80), que se llaman, por lo general *precesión rápida* y *precesión lenta* respectivamente. Esta ecuación establece un vínculo entre las condiciones iniciales, necesario para que exista *precesión regular* del trompo. De la discusión, vemos que $\dot{\alpha}$ debe ser distinto de cero para lograrla.

5.5.3. El trompo veloz

Si la energía cinética de rotación alrededor del eje de simetría es grande comparada con la energía potencial gravitatoria estamos examinando el caso del *trompo veloz*. Este es usualmente el caso cuando se arroja una peonza (o una perinola) sobre un piso rugoso. En ese caso, es posible resolver las ecuaciones en forma aproximada usando funciones elementales (Problema 5.5.2). Las frecuencias de precesión y nutación, sin embargo se pueden hallar en forma elemental.

Si la energía cinética de rotación es grande, puede despreciarse en primera aproximación la fuerza de gravedad y entonces el eje del trompo ζ describirá una precesión regular alrededor del vector \mathbf{L} , con frecuencia:

$$\Omega_n = \frac{L}{I_1} \quad (5.81)$$

Este es el movimiento que debemos asociar a la nutación: coincide (en esta aproximación) con la precesión libre del cuerpo simétrico. Por otra parte, bajo la

acción de la gravedad, el vector \mathbf{L} obedece la ecuación:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = Mgl\hat{\boldsymbol{\zeta}} \wedge \hat{\mathbf{k}}$$

El momento $\boldsymbol{\tau}$ dependerá de la inclinación del eje del trompo, pero como el movimiento de precesión es lento el eje de simetría dará muchas vueltas alrededor de \mathbf{L} mientras éste precede. Obtenemos una aproximación razonable proyectando el eje de simetría sobre el impulso angular. El ángulo entre ambos vectores está dado por la ecuación (5.61) y por lo tanto:

$$\langle \boldsymbol{\tau} \rangle = Mgl \frac{L_3}{L} \frac{\mathbf{L}}{L} \wedge \hat{\mathbf{k}}$$

y por lo tanto la ecuación promediada para el impulso angular:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{Mgl}{L} \frac{L_3}{L} \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{L} \quad (5.82)$$

Esta ecuación puede integrarse en forma similar a lo que hicimos en el caso del trompo simétrico. El vector \mathbf{L} precede alrededor del eje z con una frecuencia:

$$\Omega_p = \frac{Mgl}{L} \frac{L_3}{L} \quad (5.83)$$

que es el mismo resultado que se obtiene de la teoría elemental del trompo.

En fin, el movimiento de un trompo pesado se compone de un cabeceo del eje, la nutación, y de un movimiento de precesión alrededor de la vertical inducido por la gravedad. El efecto combinado de ambos fenómenos está esquematizado en la Figura 5.18. Pero cuando la energía cinética de rotación alrededor del eje de simetría es grande, la amplitud de la nutación es pequeña y se amortigua fácilmente bajo la acción de la fricción. El trompo parece efectuar una precesión regular y resistirse a caer bajo la acción de la gravedad. Esta *precesión seudoregular* es el desconcertante fenómeno que deleita a grandes y chicos.

5.5.4. Otros fenómenos similares

Cualquier cupla que se ejerza sobre un cuerpo rígido en rotación producirá fenómenos similares a los que acabamos de analizar. Un ejemplo importante es el fenómeno astronómico llamado *precesión de los equinoccios*. El Sol y la Luna ejercen cuplas sobre el abultamiento ecuatorial de la Tierra que tienden a “enderezarla”; es decir, colocar el eje terrestre paralelo al eje de la eclíptica (Figura 5.21). Bajo la influencia de estas cuplas, el eje de la Tierra efectúa una precesión lenta alrededor de un eje perpendicular al plano de la eclíptica.

El potencial de interacción entre la Tierra y el Sol es igual a:

$$V = -GM_{\odot} \int d\rho \frac{\mu(\rho)}{|\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}|}$$

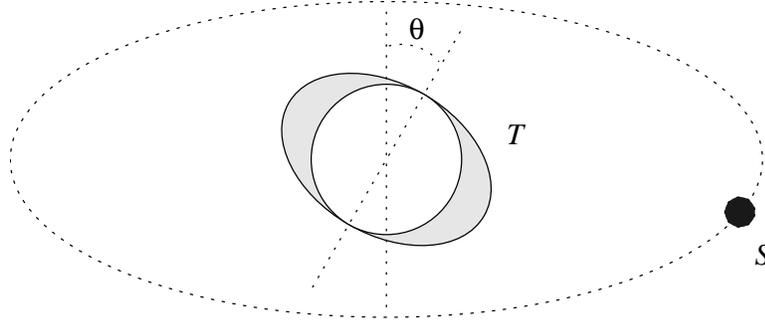


Figura 5.21: Precesión de los equinoccios

en donde \mathbf{r} es la coordenada heliocéntrica del centro de masas de la Tierra, $\boldsymbol{\rho}$ la coordenada del elemento de volumen respecto del centro de masas de la Tierra y $\mu(\boldsymbol{\rho})$ la densidad de la Tierra. Puesto que $|\boldsymbol{\rho}| \ll |\mathbf{r}|$, se puede desarrollar el denominador en serie y obtener:

$$V \simeq -\frac{GM_{\odot}m_{\oplus}}{r} + \frac{1}{2}\frac{GM_{\odot}}{r^3} \int d\boldsymbol{\rho}\mu(\boldsymbol{\rho}) \left(\frac{3(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{r})^2}{r^2} - \rho^2 \right)$$

y el último término puede expresarse en función del tensor de inercia en la forma:

$$V \simeq -\frac{GM_{\odot}m_{\oplus}}{r} - \frac{1}{2}\frac{GM_{\odot}}{r^3} \left(3\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{r}}{r^2} - \text{tr } \mathbf{l} \right) \quad (5.84)$$

El segundo término del potencial es el responsable de la cupla sobre la Tierra. Se puede simplificar aun más el problema suponiendo que la órbita solar es un círculo. Además, el movimiento de precesión es tan lento comparado con el año que es una buena aproximación promediar la ecuación anterior sobre todas las posiciones del sol. Se obtiene de esa manera:

$$\langle V \rangle = -\frac{1}{8}GM_{\odot}(I_3 - I_1) \frac{3 \cos 2\epsilon - 1}{a_{\odot}^3} \quad (5.85)$$

en donde $\epsilon \sim 23^{\circ},5$ es la inclinación del eje de la Tierra respecto de la eclíptica. La órbita lunar yace en un plano casi coincidente con el de la eclíptica y su contribución al potencial tiene la misma forma.

El momento de la fuerza (que se halla derivando respecto de ϵ) tiene la dirección de la línea de los nodos. Un cálculo sencillo muestra que:

$$\langle \boldsymbol{\tau} \rangle = \frac{3}{2}G(I_3 - I_1) \left(\frac{M_{\odot}}{a_{\odot}^3} + \frac{M_{\zeta}}{a_{\zeta}^3} \right) \hat{\boldsymbol{\zeta}} \wedge \hat{\mathbf{k}}$$

y de aquí deducimos (Cf. (5.83)):

$$\Omega_p = \frac{3}{2}G(I_3 - I_1) \left(\frac{M_{\odot}}{a_{\odot}^3} + \frac{M_{\zeta}}{a_{\zeta}^3} \right) \frac{\cos \epsilon}{L} \quad (5.86)$$

En el caso de la Tierra, $L \simeq L_3 = I_3\Omega_0$, hallamos:

$$T_p = \frac{2\pi}{\Omega_p} \simeq 25500 \text{ años}$$

en excelente acuerdo con el valor observado:

$$T_{\text{obs}} \simeq 25800 \text{ años.}$$

A la nutación de la Tierra le corresponde el periodo de Euler (o más bien el de Chandler). Aclaremos que en astronomía se llama nutación a un movimiento forzado del eje de la Tierra debido a los apartamientos del sencillo modelo anterior: las órbitas lunares y terrestres son elípticas y tienen distinta inclinación respecto del ecuador. Estos fenómenos originan una cupla variable en el tiempo, cuyo mayor periodo es de 18 años y que provoca un cabeceo adicional del eje de la Tierra.

Problemas 5.5

Problema 5.5.1.

¿En qué condiciones puede un trompo permanecer girando con su eje vertical?

Problema 5.5.2.

La ecuación (5.74) puede integrarse aproximadamente en el caso de un trompo veloz. Supondremos que el sistema no se aparta mucho de una precesión regular.

1. Probar que la frecuencia de precesión regular tiene los valores aproximados

$$\Omega_p^R = \begin{cases} \frac{a}{u_0} \\ \frac{\mu}{a} \end{cases}$$

2. Suponiendo un apartamiento pequeño de la condición de precesión regular lenta, desarrollar $f(u)$ en serie hasta términos cuadráticos. Determinar así la frecuencia de nutación.
3. Determinar la amplitud de nutación en función de los parámetros del problema.
4. Integrar la ecuación diferencial para α . Discutir los diferentes casos que pueden presentarse.
5. Finalmente, integrar la ecuación diferencial para γ .

Sugestión: Expresar las constantes a, b, ϵ en función de las raíces de $f(u)$.

Problema 5.5.3.

El péndulo esférico es similar al problema de un trompo con $\omega_3 = 0$. Discutir el movimiento de un péndulo esférico de amplitud no del todo pequeña.

Problema 5.5.4.

Un cuerpo cargado que gira tiene un momento magnético:

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc} \mathbf{L}$$

Discutir el movimiento del cuerpo en un campo magnético \mathbf{B} . Mostar que \mathbf{L} precece alrededor de \mathbf{B} con la *frecuencia de Larmor*:

$$\Omega_L = \frac{qB}{2mc}$$

Capítulo 6

Pequeñas oscilaciones

El movimiento general de un sistema mecánico es, en general, imposible de estudiar en detalle, dadas las graves dificultades para su integración. Los sistemas exactamente integrables son muy pocos: la gran mayoría son “no integrables”: no sólo no existen soluciones analíticas expresables en términos de funciones conocidas sino que, por lo general, estos sistemas son caóticos. Los exponentes de Lyapunov son positivos y dos soluciones que difieran muy poco en sus condiciones iniciales divergerán exponencialmente una de otra en un intervalo relativamente corto.

Poco se puede decir de estos sistemas, excepto cerca de situaciones especiales. Una clase general de puntos excepcionales, donde es posible analizar en forma bastante general el comportamiento del sistema, son los entornos de puntos de equilibrio. Alrededor de esos puntos excepcionales el sistema puede efectuar *pequeñas oscilaciones* y es posible analizarlo con una generalización del tratamiento de sistemas dinámicos autónomos (Sección 2.3).

6.1. Equilibrio en general

Examinemos, en primer lugar, el movimiento de un sistema mecánico descrito por un conjunto de f coordenadas generalizadas, cuando sufre pequeños apartamientos de una posición de equilibrio. En un sistema de muchos grados de libertad, cuyo lagrangeano puede contener potenciales dependientes de la velocidad, esta última noción debe generalizarse.

6.1.1. Estados de equilibrio

Consideremos las ecuaciones de Lagrange del sistema de f grados de libertad:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (6.1)$$

Llamaremos *punto de equilibrio generalizado* una configuración en que todas las fuerzas generalizadas se anulan:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (6.2)$$

Si ahora sustituimos en (6.1), hallamos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p_i = p_i^0 \quad (6.3)$$

Las ecuaciones (6.2) y (6.3) son un sistema de ecuaciones que describen la configuración de equilibrio, en que las fuerzas generalizadas se anulan y los impulsos generalizados son constantes. Distinguiremos dos casos importantes:

1. Ninguna de las coordenadas q_i es cíclica. En este caso las ecuaciones (6.2) son un conjunto de ecuaciones no lineales, cuya solución determina puntos en el espacio de configuración con coordenadas q_i^0 independientes del tiempo; y las constantes p_i^0 necesariamente se anulan. Estos puntos se llaman *puntos de equilibrio*.
2. Algunas q_i son cíclicas. Los correspondientes impulsos generalizados no necesariamente se anulan y tenemos el caso de *movimiento estacionario*. Este caso es, obviamente, más complicado que el anterior y lo estudiaremos más tarde.

6.1.2. Ejemplos

Examinemos algunos ejemplos sencillos de situaciones de equilibrio.

Equilibrio en una dimensión: Ya hemos examinado el caso de movimiento unidimensional (Sección 1.4). Los puntos de equilibrio en un sistema unidimensional son aquellos en los que el potencial tiene un extremo (Figura 1.13).

Péndulo doble: En el caso del péndulo doble (Figura 4.10), hay cuatro posiciones de equilibrio, que corresponden a los péndulos en posición vertical.

Doble puente de hidrógeno: Varias moléculas de importancia en la biología están unidas por un doble puente de hidrógeno; entre ellas, los nucleótidos adenina y timina (Figura 6.1). Podemos elegir como coordenadas generalizadas a las distancias de los protones a un punto entre las dos moléculas M_1 y M_2 . El átomo de hidrógeno es atraído por ambas moléculas y sufre la repulsión coulombiana del otro protón. El potencial tiene dos mínimos, que representan las configuraciones de equilibrio estable de ambas moléculas; y además un punto de ensilladura, que representa un punto de equilibrio inestable (Figura 6.1).

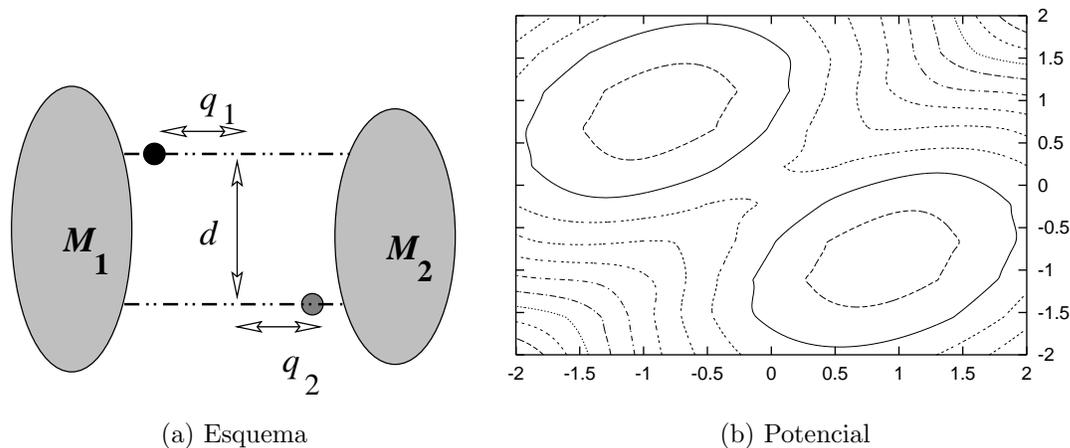


Figura 6.1: Doble puente de hidrógeno

Órbita circular en un campo central: En este caso la variable ϕ es cíclica, la fuerza generalizada se anula trivialmente y la velocidad angular es constante e igual a:

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr_0}$$

mientras que la coordenada radial constante está definida por la condición de equilibrio:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (6.4)$$

que contiene a la velocidad angular $\dot{\phi}$. Ejemplos similares de movimiento estacionario son la precesión regular de un trompo o la rotación de un cuerpo rígido alrededor de los ejes principales de inercia.

El problema restringido de tres cuerpos: Los puntos de equilibrio en el problema restringido de los tres cuerpos se llaman *puntos de Lagrange*. Es fácil determinar cualitativamente la posición de tres de ellos por consideraciones topológicas. En la Figura 5.9 se ven tres puntos de ensilladura situados a la izquierda del cuerpo S , entre S y J y a la derecha de J . Éstos son los puntos de Lagrange L_1, L_2 y L_3 respectivamente. Por otra parte, en los valles situados encima y debajo de los cuerpos principales, hay dos mínimos que son también puntos de equilibrio. No es difícil probar que éstos están en los vértices de sendos triángulos equiláteros, cuya base es el segmento \overline{SJ} . En efecto, en el punto L_4 , por ejemplo, la aceleración total del planetoides P es (Figura 6.2):

$$\mathbf{a}_P = -\frac{G_N M_S}{r_1^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S) - \frac{G_N M_J}{r_2^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_J) + \Omega^2 \mathbf{r} \quad (6.5)$$

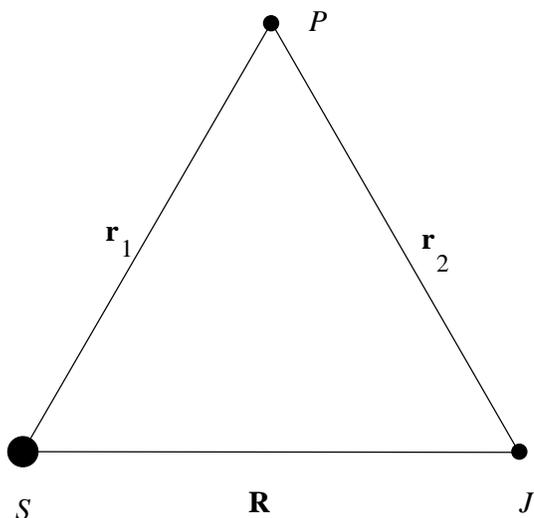


Figura 6.2: Soluciones equiláteras en el problema restringido de tres cuerpos

Si ahora introducimos la tercera ley de Képler:

$$\Omega^2 = \frac{G_N(M_S + M_J)}{R^3}$$

la condición de triángulo equilátero:

$$r_1^3 = r_2^3 = R^3$$

y la definición de centro de masa:

$$M_S \mathbf{r}_S + M_J \mathbf{r}_J = 0$$

hallamos que la aceleración (6.5) se anula y así probamos la existencia de las *soluciones equiláteras* del problema restringido de tres cuerpos.

Problemas 6.1

Problema 6.1.1.

Determinar las posiciones de equilibrio en el potencial:

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{e^2}{\sqrt{(x - y)^2 + d^2}}$$

Problema 6.1.2.

Discutir las posiciones de equilibrio en el problema restringido de los tres cuerpos.

6.2. Oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio

Examinemos, en primer lugar, pequeños apartamientos de una posición de equilibrio. Llamando ξ_i a los apartamientos de la posición de equilibrio tendremos:

$$q_i = q_i^0 + \xi_i \quad (6.6a)$$

$$\dot{q}_i = \dot{\xi}_i \quad (6.6b)$$

Supondremos que las cantidades $\xi_i, \dot{\xi}_i$ son pequeñas en el siguiente sentido: después de introducirlas en el lagrangeano del sistema, lo desarrollaremos en serie de Taylor hasta segundo orden. Puesto que trabajamos con coordenadas generalizadas:

$$T(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2} a_{ij}(q^0) \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j + O(\xi^3) \quad (6.7a)$$

$$V(q_i) = V(q^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(q^0)}{\partial q_i \partial q_j} \xi_i \xi_j + O(\xi^3) \quad (6.7b)$$

Introduciendo las notaciones:

$$m_{ij} = a_{ij}(q^0) \quad (6.8a)$$

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 V(q^0)}{\partial q_i \partial q_j} \quad (6.8b)$$

el lagrangeano toma la forma:

$$L = \frac{1}{2} \left(m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - k_{ij} \xi_i \xi_j \right) \quad (6.9)$$

6.2.1. Modos normales

Podemos simplificar aún más esta expresión introduciendo notación matricial. Sean \mathbf{M} y \mathbf{K} matrices $f \times f$ con elementos (6.8a) y (6.8b) respectivamente y que llamaremos *matriz de masas* y *matriz de restitución*. Con esta notación el lagrangeano (6.9) se escribe:

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi} \right) \quad (6.10)$$

Para aligerar la notación, desde ahora en adelante omitiremos el símbolo de producto escalar ‘ \cdot ’.

Examinemos algunas propiedades del lagrangeano (6.10). La energía cinética es, en coordenadas cartesianas, una suma de cuadrados y necesariamente positiva. Debe cumplirse, entonces:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad (6.11)$$

es decir, la matriz \mathbf{M} es *definida positiva*. Por otra parte, la matriz \mathbf{K} también debe ser definida positiva si estamos cerca de un mínimo.

Las ecuaciones de movimiento que deducimos de (6.10) son:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\xi} = 0 \quad (6.12)$$

Para resolver estas ecuaciones de movimiento, consideremos la sustitución de d'Alembert:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}e^{-i\omega t}$$

que sustituido en (6.12) da el resultado:

$$\mathbf{K}\mathbf{A} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{A} \quad (6.13)$$

Éste es un sistema lineal homogéneo que tendrá solución si y sólo si el determinante de los coeficientes se anula:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0 \quad (6.14)$$

La ecuación (6.14) se llama la *ecuación secular* del sistema y sus f soluciones ω_α^2 , las *frecuencias propias* de oscilación. Una vez halladas éstas últimas, sustituyendo en $f - 1$ ecuaciones del sistema (6.13) se hallan los coeficientes \mathbf{A} a menos de una constante multiplicativa. Cada una de las correspondientes soluciones:

$$\boldsymbol{\xi}^\alpha = \mathbf{A}^\alpha e^{-i\omega_\alpha t} \quad (6.15)$$

se llama un *modo normal* de oscilación del sistema. La solución general del problema se halla como una combinación lineal de los modos normales de oscilación:

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{\alpha} C_{\alpha} \boldsymbol{\xi}^{\alpha}(t) \quad (6.16)$$

en donde los f vectores constantes C_{α} se determinan a partir de las condiciones iniciales.

6.2.2. Coordenadas normales

La determinación de las constantes de integración C_{α} requiere normalizar adecuadamente las amplitudes \mathbf{A}^{α} y resolver un sistema de ecuaciones lineales. Ambas operaciones tienen un interesante significado geométrico, que generaliza la transformación a ejes de inercia (Sección 5.3.3).

Mostraremos ahora que existe una transformación lineal de coordenadas, con matriz \mathbf{A} , que simultáneamente

1. Reduce la matriz de masas \mathbf{M} a la matriz unidad;
2. Reduce la matriz de restitución \mathbf{K} a forma diagonal.

Construiremos esta transformación lineal en dos etapas. En primer lugar, observemos que cualquier matriz simétrica puede llevarse a forma diagonal mediante una transformación ortogonal; es decir, que existe una matriz ortogonal \mathbf{U} tal que:

$$\mathbf{U}^\top \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad (6.17)$$

$$\mathbf{U}^\top \mathbf{M} \mathbf{U} = \mathbf{M}^D \quad (6.18)$$

Formemos ahora la matriz:

$$\mathbf{B} = \mathbf{U} \mathbf{M}^{D\frac{1}{2}} \quad (6.19)$$

cuyo efecto sobre \mathbf{M} es reducirla a la unidad. Si aplicamos esta matriz al sistema (6.13) hallamos:

$$\mathbf{B}^\top \mathbf{K} \boldsymbol{\xi} = \omega^2 \mathbf{B}^\top \mathbf{M} \boldsymbol{\xi}$$

cuyo segundo miembro puede escribirse en la forma:

$$\omega^2 \mathbf{B}^\top \mathbf{M} \mathbf{B} \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\xi} = \omega^2 \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\xi}$$

Finalmente, con el mismo procedimiento hallamos:

$$\boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{\eta} = \omega^2 \boldsymbol{\eta} \quad (6.20a)$$

$$\boldsymbol{\Omega}^2 = \mathbf{B}^\top \mathbf{K} \mathbf{B} \quad (6.20b)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\xi} \quad (6.20c)$$

La ecuación (6.20a) es un nuevo problema de autovalores para la matriz simétrica $\boldsymbol{\Omega}^2$. Existe, pues, una matriz ortogonal \mathbf{V} que la lleva a forma diagonal:

$$\mathbf{V}^\top \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (6.21a)$$

$$\mathbf{V}^\top \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{V} = \omega^2 \mathbf{D} \quad (6.21b)$$

Introduzcamos, finalmente, la matriz:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{M}^{D-\frac{1}{2}} \mathbf{V} \quad (6.22)$$

Es fácil ver, sobre la base de los resultados anteriores, que esta matriz tiene las propiedades anunciadas. En particular, la condición

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{M} \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (6.23)$$

juega el papel de una condición de ortogonalidad generalizada sobre la matriz \mathbf{A} .

Las columnas de \mathbf{A} no son otra cosa que los vectores \mathbf{A}^α correctamente normalizados (cf. Sección 6.2.1). Podemos ahora determinar las constantes C_α utilizando (6.23). Multiplicando (6.16) y su derivada por $\mathbf{A}^\top \mathbf{M}$ hallamos:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^\top \mathbf{M} \boldsymbol{\xi}(0) \quad (6.24a)$$

$$-i\omega^D \mathbf{C} = \mathbf{A}^\top \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\xi}}(0) \quad (6.24b)$$

ecuaciones determinan las partes real e imaginaria de \mathbf{C} .

La transformación lineal \mathbf{A} representa un cambio de coordenadas en el espacio de configuración del sistema. Lo llamaremos *coordenadas normales* del sistema y lo designaremos con la notación $Q_\alpha(t)$. De este modo, la ecuación (6.16) se escribe:

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{A}\mathbf{Q}(t) \quad (6.25)$$

Sustituyendo (6.25) en el lagrangeano (6.10):

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{Q}}^2 - \mathbf{Q}\boldsymbol{\omega}^{2D}\mathbf{Q} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} (\dot{Q}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2) \end{aligned} \quad (6.26a)$$

Estas nuevas coordenadas se comportan como osciladores armónicos independientes. Es fácil ver que lo mismo sucede con la energía del sistema:

$$E = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} (\dot{Q}_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2) \quad (6.27)$$

Por otra parte, las coordenadas normales describen al sistema en forma global. En general no se puede excitar un único grado de libertad del sistema (6.10) sin excitar, a través de las matrices de acoplamiento \mathbf{M} y \mathbf{K} , todos los demás. En cambio, es posible excitar el sistema de manera que todas las partículas oscilen con la misma frecuencia: éstos son los modos normales de oscilación.

La transformación a coordenadas normales, pues, consiste en reemplazar la descripción local del sistema por los desplazamientos $\boldsymbol{\xi}$, por una descripción colectiva, a través de las coordenadas normales \mathbf{Q} .

6.2.3. Un ejemplo sencillo

Discutamos brevemente un ejemplo muy simple: un sistema de dos masas iguales m , conectado por resortes simétricos de constante k a dos paredes y entre sí por un tercer resorte de constante κ (Figura 6.3). Por lo general, esperamos que $\kappa \ll k$, aunque no necesitaremos esa hipótesis. Este sistema puede representar una molécula diatómica acoplada a dos radicales masivos.

Las energías cinética y potencial del sistema valen:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) \quad (6.28a)$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} [k(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \kappa(\xi_1 - \xi_2)^2] \\ &= \frac{1}{2} [(k + \kappa)(\xi_1^2 + \xi_2^2) - 2\kappa\xi_1\xi_2] \end{aligned} \quad (6.28b)$$

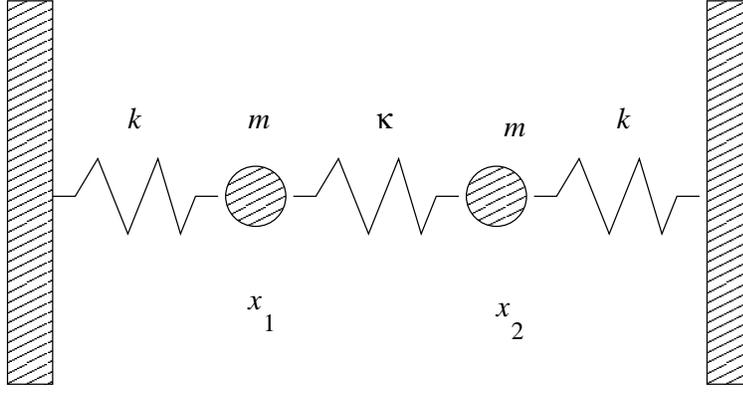


Figura 6.3: Un ejemplo sencillo de osciladores acoplados

y por lo tanto el lagrangeano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) - \frac{1}{2}[(k + \kappa)(\xi_1^2 + \xi_2^2) - 2\kappa\xi_1\xi_2] \quad (6.29)$$

Podemos ahora construir fácilmente las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = m\mathbb{I} \quad (6.30a)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k + \kappa & -\kappa \\ -\kappa & k + \kappa \end{pmatrix} \quad (6.30b)$$

y con ellas la ecuación de autovalores:

$$\begin{pmatrix} k + \kappa & -\kappa \\ -\kappa & k + \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \omega^2 m \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

En este caso la diagonalización de la matriz \mathbf{M} es trivial y no vale la pena molestarse en hacerla. Por otra parte, la alta simetría del sistema permite resolver la ecuación de autovalores con sencillas operaciones algebraicas lineales. En efecto, si escribimos explícitamente el sistema homogéneo (6.31):

$$(k + \kappa)A_1 - \kappa A_2 = m\omega^2 A_1 \quad (6.32a)$$

$$-\kappa A_1 + (k + \kappa)A_2 = m\omega^2 A_2 \quad (6.32b)$$

podemos hallar el primer autovalor sumando miembro a miembro ambas ecuaciones (6.32):

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{k}{m} \quad (6.33)$$

que sustituida en (6.32) proporciona la condición:

$$A_1^{(1)} = A_2^{(1)}$$

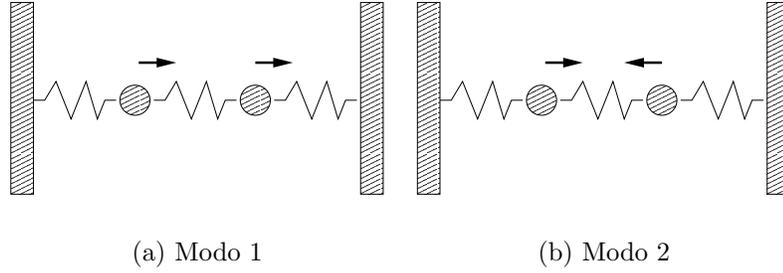


Figura 6.4: Modos normales de oscilación del sistema

y normalizando hallamos:

$$A_1^{(1)} = A_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \quad (6.34)$$

De la misma manera, encontramos para el segundo modo normal de oscilación:

$$\omega_{(2)}^2 = \frac{k + 2\kappa}{m} \quad (6.35)$$

$$-A_1^{(2)} = A_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \quad (6.36)$$

La Figura 6.4 muestra esquemáticamente la estructura de los modos normales de vibración del sistema. El primer modo no comprime el resorte central: se trata de una traslación de ambas partículas con la misma amplitud y fase. El segundo modo, por otra parte, comprime el resorte y por eso aumenta su frecuencia.

Con los resultados (6.34) y (6.36), la matriz de transformación entre coordenadas de partículas y coordenadas normales es:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

Geoméricamente, esta transformación es una rotación de 45° que transforma la elipse de ecuación

$$\frac{1}{2} \left[\frac{(k + \kappa)}{m} (\xi_1^2 + \xi_2^2) - 2 \frac{\kappa}{m} \xi_1 \xi_2 \right] = 1$$

en la elipse

$$\frac{1}{2} \left[\frac{(k + \kappa)}{m} Q_2^2 + \frac{\kappa}{m} Q_1^2 \right] = 1$$

Para examinar con algo más de detalle el comportamiento del sistema, examinemos el caso particular en que sólo una de las partículas, digamos la partícula

1, se parta inicialmente de su posición de equilibrio una cantidad ξ_0 . Usando la expresión (6.37) hallamos las amplitudes de los modos normales de oscilación:

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= \frac{\xi_0}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \\ &= \xi_0 \cos \left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \right] \cos \left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \right]\end{aligned}\quad (6.38a)$$

$$\begin{aligned}\xi_2(t) &= \frac{\xi_0}{2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \\ &= \xi_0 \sin \left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \right] \sin \left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \right]\end{aligned}\quad (6.38b)$$

El movimiento de las partículas individuales muestra el fenómeno de *batido*, bien conocido: la energía se transfiere de una partícula a la otra en forma cíclica, con un periodo

$$T_{\text{bat}} = \frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

que, si $\kappa \ll k$, puede ser mucho mayor que el de los osciladores individuales.

6.2.4. Oscilaciones de moléculas

Las oscilaciones moleculares, sumamente importantes para comprender las propiedades espectroscópicas y termodinámicas de gases, tienen una dificultad peculiar: la aparición de *modos cero*: “oscilaciones” con frecuencia propia cero. Nuestro ejemplo de la Sección 6.2.3 puede ayudarnos a entender por qué.

Examinemos lo que ocurre cuando hacemos $k \rightarrow 0$ en el ejemplo. En ese caso las frecuencias (6.33) y (6.35) toman los valores:

$$\omega_{(1)}^2 = 0 \qquad \omega_{(2)}^2 = \frac{\kappa}{m}$$

El modo normal de oscilación correspondiente a frecuencia nula representa la traslación del centro de masa de la molécula diatómica a lo largo del eje x . Por otra parte, si examinamos el movimiento de la molécula en el plano hallaremos otros dos modos cero (Figura 6.5). Estos corresponden a traslaciones a lo largo del eje y y a rotaciones alrededor del eje z .

Los modos cero pueden eliminarse, reduciendo el orden de la matriz a tratar, imponiendo vínculos sobre las coordenadas de las partículas individuales. Por ejemplo, si se trabaja en el sistema **CM**, las coordenadas ξ_i deben satisfacer:

$$\sum_a m_a \boldsymbol{\xi}_a = 0 \quad (6.39)$$

y si, además, se impone que el impulso angular total $\mathbf{L} = 0$, se debe verificar:

$$\sum_a m_a \mathbf{r}_{0a} \wedge \boldsymbol{\xi}_a = 0 \quad (6.40)$$

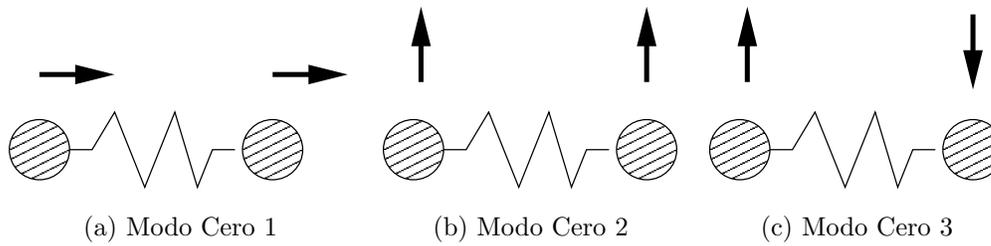


Figura 6.5: Modos cero de una molécula diatómica en el plano

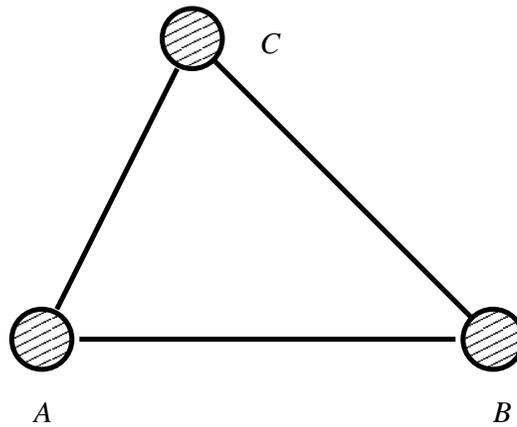


Figura 6.6: Molécula triatómica típica

en donde \mathbf{r}_{0a} son las posiciones de equilibrio de los átomos individuales.

Sin embargo, un método más adecuado a la formulación lagrangeana de la mecánica es el uso de un sistema de coordenadas generalizadas que elimine los modos ceros del problema. Ejemplificaremos este modo de resolver el problema con una molécula triatómica (Figura 6.6), aunque el procedimiento es totalmente general y se aplica a cualquier sistema de tres cuerpos.

En el problema de dos cuerpos, el movimiento del centro de masa se elimina pasando a coordenadas relativas y de centro de masas (Sección 3.1.1). La generalización de este procedimiento se llaman *coordenadas de Jacobi*. Sean \mathbf{r}_I , con $I = A, B, C$ las coordenadas de los átomos individuales de la molécula. Introdu-

cimos las coordenadas de Jacobi con las siguientes ecuaciones:

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B \quad \text{Coordenada relativa } A - B \quad (6.41a)$$

$$\boldsymbol{\rho}_2 = \mathbf{r}_C - \frac{M_A \mathbf{r}_A + M_B \mathbf{r}_B}{M_A + M_B} \quad \text{Coordenada } C \text{ resp. del CM } A - B \quad (6.41b)$$

$$\boldsymbol{\rho}_3 = \frac{\sum_I M_I \mathbf{r}_I}{\sum_I M_I} \quad \text{Coordenada del CM} \quad (6.41c)$$

La invarianza bajo el grupo de Galileo garantiza que con estas coordenadas el lagrangeano toma la forma:

$$L = \frac{1}{2} M_T \dot{\boldsymbol{\rho}}_3^2 + L_{\text{int}}$$

y el movimiento del centro de masas queda separado.

Para eliminar las rotaciones, es necesario introducir un “sistema de referencia ligado a la molécula” C y expresar la conexión entre ambos sistemas a través de una matriz de rotación. Examinemos el caso particular interesante de una molécula en el plano. En este caso, la matriz corresponde a una rotación alrededor del eje z . Elijamos el eje x del sistema intrínseco coincidente con $\boldsymbol{\rho}_1$. Entonces tendremos, con una notación obvia:

$$x_1 = r \cos \phi \quad x_2 = x_2 \cos \phi - y_2 \sin \phi \quad (6.42a)$$

$$y_1 = r \sin \phi \quad y_2 = x_2 \sin \phi + y_2 \cos \phi \quad (6.42b)$$

La invarianza bajo rotaciones indica que ϕ debe ser una variable cíclica y de esta manera se elimina el grado de libertad de rotación.

Problemas 6.2

Problema 6.2.1.

Probar que todos los autovalores de una matriz definida positiva son positivos.

Problema 6.2.2.

Hallar los modos normales de oscilación de un péndulo doble.

1. Hallar las matrices de masa y de restitución correspondientes.
2. Hallar las coordenadas normales.

Problema 6.2.3.

Discutir el movimiento de las masas de un péndulo doble. Probar que se producen batidos si la masa M del péndulo superior es mucho mayor que la masa m del péndulo inferior.

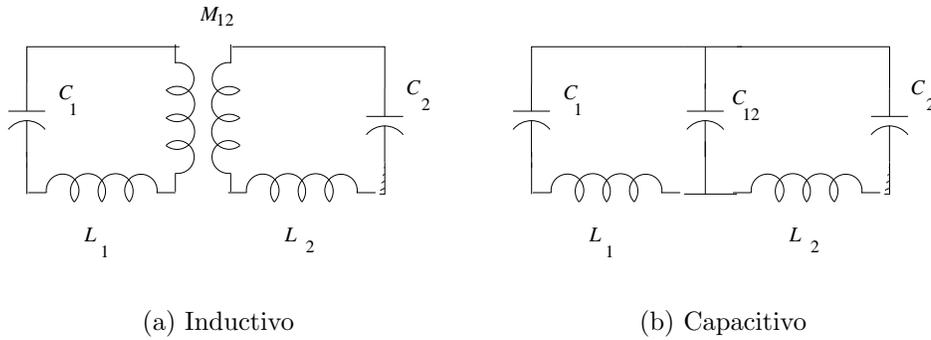


Figura 6.7: Circuitos oscilantes acoplados

Problema 6.2.4.

Hallar los modos normales de oscilación de los circuitos acoplados de la Figura 6.7.

Problema 6.2.5.

Un modelo esquemático para la suspensión de un automóvil consiste en una barra rígida de masa M y momento de inercia I , suspendida sobre dos resortes de constantes k_1 y k_2 sujetos a distancias l_1 y l_2 de la abcisa del centro de masas C (Figura 6.8). La barra puede moverse verticalmente o rotar alrededor del centro de masa. Hallar frecuencias y amplitudes de los modos normales de oscilación del sistema. ¿Cual es la condición para que ambas frecuencias de oscilación sean iguales?

Problema 6.2.6.

Transformar el lagrangeano de una molécula triatómica a coordenadas jacobianas.

Problema 6.2.7.

Usando los resultados del problema anterior, hallar los modos normales de vibración de una molécula triatómica simétrica XY_2 . Usar el modelo de la Figura 6.9.

Problema 6.2.8.

Determinar las constantes de fuerza k, k_α y el ángulo de torsión 2α para las moléculas de la Tabla 6.9 usando las frecuencias indicadas.

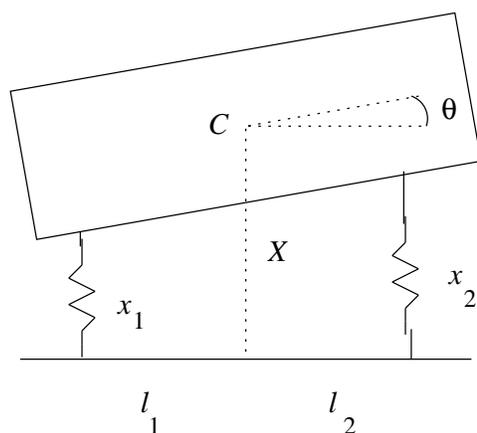
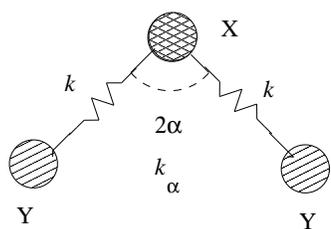


Figura 6.8: Modelo de suspensión de un automóvil



(a) Modelo

Mol.	ν_1	ν_2	ν_3	$2\alpha_{\text{Obs}}$
CO ₂	1337	667	2344	180
CS ₂	657	397	1523	180
H ₂ O	3652	1595	3756	105
D ₂ O	2666	1179	2784	105
SO ₂	1151	524	1621	120
NO ₂	1320	648	1621	120

(b) Tabla

Figura 6.9: (a) Modelo de una molécula triatómica simétrica (b) Frecuencias de oscilación de moléculas triatómicas simétricas típicas (cm^{-1}). La última columna muestra el ángulo de torsión observado en grados. Las masas aproximadas (en uma) valen $M_H = 1$, $M_D = 2$, $M_C = 12$, $M_N = 14$, $M_O = 16$ y $M_S = 32$. $1 \text{ uma} = 1,66 \times 10^{-24} \text{ g}$.

6.3. Oscilaciones alrededor de un movimiento estacionario

Examinemos ahora las oscilaciones alrededor de un movimiento estacionario, que son importantes no sólo para estudiar la estabilidad del movimiento sino también como tratamiento aproximado de órbitas más generales.

6.3.1. Formulación general

Como ya hemos visto en la Sección 6.1.1, el movimiento estacionario se produce cuando las condiciones de equilibrio se aplican a una variable cíclica (Caso 2). Necesariamente la coordenada q_0 es función lineal del tiempo:

$$q_0(t) = q_{00} + \dot{q}_0 t$$

en donde la velocidad generalizada \dot{q}_0 es constante, pero no puede suponerse pequeña. Esto cambia, en general, la forma de la energía cinética. En efecto, desarrollándola alrededor del movimiento estacionario:

$$q_0(t) = q_{00} + \dot{q}_0 t + \xi_0(t) \quad (6.43a)$$

$$q_i(t) = q_{i0} + \xi_i \quad (6.43b)$$

la energía cinética toma la forma:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} T_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \\ &= \frac{1}{2} T_{00} \dot{q}_0^2 + \frac{1}{2} T_{0,i>0} \dot{q}_0 \dot{q}_i + \frac{1}{2} T_{ij>0}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned}$$

y finalmente, desarrollando los coeficientes $T_{00}, T_{0,i>0}$ alrededor del punto de equilibrio se encuentra la forma:

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j + g_{ij} \xi_i \dot{\xi}_j + \frac{1}{2} c_{ij} \xi_i \xi_j \quad (6.44)$$

El lagrangeano linealizado, por lo tanto, tendrá la forma:

$$L = \frac{1}{2} \left[m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j + b_{ij} \xi_i \dot{\xi}_j - k_{ij} \xi_i \xi_j \right] \quad (6.45)$$

en donde la matriz $\mathbf{b} = \mathbf{g} - \mathbf{g}^\top$ es antisimétrica. Esta cantidad es una vieja conocida bajo un disfraz: la hemos visto aparecer en la teoría del movimiento relativo (Sección 5.2) como términos giroscópicos, conectados con la fuerza de Coriolis. La antisimetría de la matriz \mathbf{b} garantiza la existencia de una cantidad conservada: la integral de Jacobi generalizada.

Los impulsos y fuerzas generalizadas resultan ser:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} = m_{ij} \dot{\xi}_j + \frac{1}{2} b_{ij} \xi_j \quad (6.46a)$$

$$Q_i = \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = \frac{1}{2} b_{ij} \dot{\xi}_j - k_{ij} \xi_j \quad (6.46b)$$

y las ecuaciones de Lagrange resultan ser:

$$m_{ij} \ddot{\xi}_j + b_{ij} \dot{\xi}_j + k_{ij} \xi_j = 0 \quad (6.47)$$

Por lo general, no existe ninguna transformación de coordenadas que pueda llevar simultáneamente las matrices \mathbf{M} , \mathbf{b} y \mathbf{K} a forma diagonal y el tratamiento de las ecuaciones (6.47) conduce a un *problema de autovalores generalizado*. Usando la sustitución de d'Alembert, se llega a la *ecuación secular*:

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} - i\omega \mathbf{b} + \mathbf{K}) = 0 \quad (6.48)$$

cuyos autovalores son las frecuencias propias de oscilación del sistema. No es difícil probar que la ecuación secular es función sólo de ω^2 y por lo tanto que sus raíces son reales (que corresponden a frecuencias de oscilación estable alrededor del movimiento estacionario) o imaginarias puras (que indican inestabilidad).

6.3.2. Los asteroides troyanos

Entre las pocas soluciones exactas conocidas del problema restringido de los tres cuerpos (Sección 5.2.3), se encuentran las soluciones equiláteras (Sección 6.1.2). Éstas constituyen un movimiento estacionario. Las oscilaciones en torno de la configuración estacionaria son importantes, pues se encuentran realizadas en la Naturaleza en los *asteroides Troyanos*. Este grupo de asteroides se mueve en órbitas que pueden describirse, en primera aproximación, como soluciones equiláteras ligeramente perturbadas.

Consideremos el lagrangeano (5.29) en el entorno de las soluciones equiláteras (Figura 6.2). En los puntos de equilibrio L_4, L_5 se anulan $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ y $\ddot{\boldsymbol{\rho}}$; debemos, pues, estudiar pequeños apartamientos de los “puntos de Lagrange”

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_L + \boldsymbol{\xi}$$

Desarrollando el potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\boldsymbol{\rho}) = V(\boldsymbol{\rho}) - \frac{1}{2} \Omega^2 \boldsymbol{\rho}^2$ alrededor de los puntos de equilibrio, se halla la matriz de restitución:

$$\tilde{\mathbf{K}} = -\frac{3}{4} \Omega^2 \begin{pmatrix} 1 & s\sqrt{3}(\mu - \nu) \\ s\sqrt{3}(\mu - \nu) & 3 \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

en donde $s = \pm 1$, para los puntos de Lagrange L_4 y L_5 respectivamente. Esta matriz es definida negativa y representa un *máximo* del potencial efectivo. Sin

embargo, las soluciones equiláteras pueden ser estables para valores apropiados de ν .

Las ecuaciones de movimiento resultan, pues:

$$\ddot{\xi}_1 - 2\Omega\dot{\xi}_2 - \frac{3}{4}\Omega^2\xi_1 - s\frac{3\sqrt{3}}{4}(\mu - \nu)\Omega^2\xi_2 = 0 \quad (6.50a)$$

$$\ddot{\xi}_2 + 2\Omega\dot{\xi}_1 - s\frac{3\sqrt{3}}{4}(\mu - \nu)\Omega^2\xi_1 - \frac{9}{4}\Omega^2\xi_2 = 0 \quad (6.50b)$$

El determinante secular (6.48) de estas ecuaciones vale:

$$D = \omega^4 - \Omega^2\omega^2 + \frac{27}{4}\Omega^4\mu\nu \quad (6.51)$$

y tiene dos soluciones, que corresponden a los modos normales de oscilación:

$$\omega_+ = \frac{\Omega}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - 27\mu\nu}} \simeq \Omega\left(1 - \frac{27}{8}\mu\nu\right) \quad (6.52a)$$

$$\omega_- = \frac{\Omega}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - 27\mu\nu}} \simeq \Omega\sqrt{\frac{27}{4}\mu\nu} \quad (6.52b)$$

Las frecuencias (6.52) son reales (y representan un movimiento estable) si $1 - \frac{27}{4}\mu\nu \geq 0$ o, lo que es lo mismo

$$\nu \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \simeq \frac{1}{26} \quad (6.53)$$

Esta condición se cumple muy bien en el sistema Sol-Júpiter-Troyano, donde

$$\nu \simeq \frac{1}{1033} \quad (6.54)$$

El cociente de amplitudes de los autovectores puede hallarse de las ecuaciones de movimiento. El primer modo normal de oscilación tiene un cociente de amplitudes:

$$\frac{B}{A} = \frac{3\sqrt{3} + 8i}{7} + O(\nu)$$

Es mucho más interesante proyectar este cociente en las direcciones radial y tangencial:

$$A_\theta/B_\theta = \frac{4\sqrt{3}i + 8}{7} \quad (6.55a)$$

$$A_r/B_r = \frac{-2\sqrt{3} + 4i}{7} \quad (6.55b)$$

$$(A_r/B_r)/(A_\theta/B_\theta) = \frac{i}{2} \quad (6.55c)$$

El modo normal corresponde a una pequeña excentricidad de la órbita perturbada. El perihelio del asteroide sufre una precesión

$$\varpi \simeq \frac{8}{27\nu} \simeq 9,77^\circ/\text{siglo} \quad (6.56)$$

El segundo modo normal es una oscilación casi perpendicular al radio vector, llamada libración:

$$A_\theta/B_\theta = 2 + O(\sqrt{\nu}) \quad (6.57a)$$

$$A_r/B_r = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{27\nu}{4}} \quad (6.57b)$$

$$(A_r/B_r)/(A_\theta/B_\theta) = \frac{2}{3} i \sqrt{\frac{27\nu}{4}} \quad (6.57c)$$

Esta lenta oscilación del asteroide (su periodo es $T_{\text{lib}} \sim 150$ años) es la propiedad más interesante del movimiento.

Problemas 6.3

Problema 6.3.1.

Mostrar que la matriz \mathbf{b} no contribuye a la conservación de la energía.

Problema 6.3.2.

Estudiar las oscilaciones alrededor de una órbita circular en un potencial central $V(r)$. Probar que la frecuencia de oscilación es:

$$\omega^2 = \frac{V'' - 3V'/r_0}{m}$$

Problema 6.3.3.

Usando los resultados del problema anterior, hallar la precesión del perihelio producida por una perturbación δV en un potencial coulombiano.

Problema 6.3.4 (Péndulo cónico).

Estudiar las pequeñas oscilaciones de un péndulo esférico que se mueve formando un ángulo constante con la vertical.

Problema 6.3.5.

Estudiar las pequeñas oscilaciones de un trompo simétrico alrededor de la precesión regular.

Problema 6.3.6.

Estudiar las pequeñas oscilaciones del trompo simétrico que gira alrededor de la vertical.

N.º	Nombre	n ("/dia)	$\phi - \phi_J$ (°)
588	Aquiles	298	44
617	Patroclo	299	-63
624	Héctor	306	70
659	Néstor	296	74
884	Príamo	298	-82
911	Agamenón	305	69

Cuadro 6.1: Datos orbitales de los asteroides troyanos

Sugestión: Transformar las ecuaciones a coordenadas cartesianas x, y en el sistema S.

Problema 6.3.7.

Estudiar las perturbaciones al movimiento de los asteroides troyanos en coordenadas polares.

Problema 6.3.8.

Calcular la amplitud y fase de la libración para cada uno de los troyanos de la Tabla 6.1

6.4. Sistemas disipativos

Las fuerzas de rozamiento juegan un papel fundamental en los sistemas oscilantes, pues garantizan en muchos casos la aproximación al equilibrio: la energía de las oscilaciones se disipa, transformándose en calor, lo que da el nombre a estos sistemas. Aunque las fuerzas de roce no pueden tratarse en forma completa sin el auxilio de la termodinámica, pueden obtenerse muchos resultados interesantes para fuerzas de *roce viscoso*: lineales y proporcionales a la velocidad.

6.4.1. El tratamiento general

Las fuerzas de rozamiento viscoso no pueden deducirse de un principio variacional lagrangeano y requieren la formulación (4.39) del principio de mínima acción. En el caso de roce viscoso, las fuerzas tienen la forma:

$$\mathbf{F}_k = \mu_k \dot{\mathbf{r}}_k \tag{6.58}$$

en donde el coeficiente μ_k depende del cuerpo k y del medio en que se mueve. Por ejemplo, para una esfera de radio R en un medio de coeficiente de viscosidad η :

$$\mathbf{F} = 6\pi\eta R\dot{\mathbf{r}}$$

Podemos hallar las fuerzas generalizadas usando la ecuación (4.56):

$$Q_j = \sum_k \mu_k \dot{\mathbf{r}}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}$$

en donde debemos sustituir la expresión (4.44) de las velocidades en términos de las velocidades generalizadas:

$$Q_j = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i \sum_k \mu_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \quad (6.59)$$

Introduzcamos la matriz F , de elementos:

$$F_{ij} = \sum_k \mu_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \quad (6.60)$$

llamada *matriz de disipación* o *matriz de amortiguamiento*. Con ella, las ecuaciones de movimiento para un sistema cercano a un punto de equilibrio toman la forma:

$$M\ddot{\boldsymbol{\xi}} + F\dot{\boldsymbol{\xi}} + K\boldsymbol{\xi} = 0 \quad (6.61)$$

De su definición es obvio que la matriz F es simétrica $F^T = F$. Por otra parte, multiplicando la ecuación (6.61) por $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ y trabajando un poco se encuentra la ecuación de conservación de la energía total:

$$\frac{dE_{\text{mec}}}{dt} = -2\mathcal{F} \quad (6.62)$$

en donde la *función de disipación de Rayleigh* es igual a:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T F \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (6.63)$$

Puesto que la energía mecánica disipada se transforma en calor, la producción de entropía debe ser

$$\sigma = \frac{2}{T} \mathcal{F} \geq 0$$

y por lo tanto la matriz F debe ser definida positiva.

El tratamiento de las ecuaciones (6.61) es similar a los anteriores. Usando la sustitución de d'Alembert:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}e^{-i\omega t}$$

se llega a la ecuación secular:

$$\det(-\omega^2 M - i\omega F + K) = 0 \quad (6.64)$$

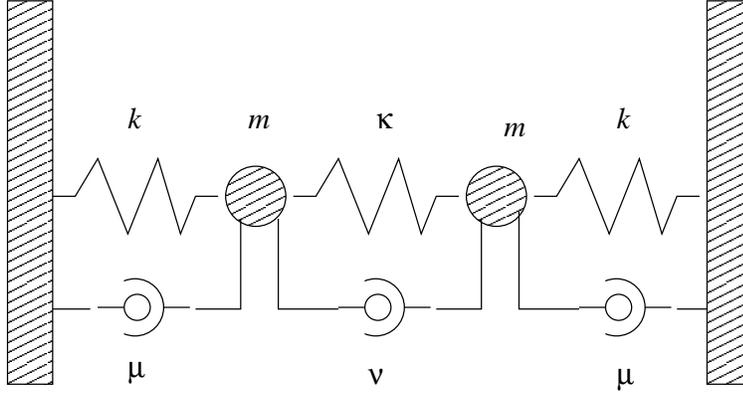


Figura 6.10: Ejemplo de oscilaciones disipativas

cuyas raíces son las frecuencias propias de oscilación. Estas frecuencias son complejas, con parte imaginaria negativa, y dan cuenta de la disipación del sistema.

Por lo general, no existe ninguna transformación general de coordenadas que permita llevar simultáneamente las tres matrices \mathbf{M} , \mathbf{F} y \mathbf{K} a forma diagonal. Solo en casos excepcionales es posible interpretar como un cambio de coordenadas los autovectores del problema generalizado de autovalores definido por las ecuaciones (6.61).

6.4.2. Un ejemplo sencillo

Retomemos el ejemplo de la Sección 6.2.3, pero ahora supongamos que los resortes tienen disipación (Figura 6.10). La función de Rayleigh del sistema es, en nuestro caso:

$$\mathcal{F}_S = \frac{1}{2}[\mu(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) + \nu(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2)^2] \quad (6.65)$$

y de ella deducimos la matriz de disipación:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mu + \nu & -\nu \\ -\nu & \mu + \nu \end{pmatrix} \quad (6.66)$$

Las condiciones para que esta matriz sea definida positiva son:

$$\mu \geq 0, \mu + 2\nu \geq 0 \quad (6.67)$$

Nuevamente, la simetría del sistema permite hallar una solución sencilla: sumando y restando las ecuaciones lineales, se hallan las ecuaciones seculares para las frecuencias de los modos de oscilación:

$$m\omega_+^2 + i\mu\omega_+ - k = 0 \quad (6.68a)$$

$$m\omega_-^2 + i(\mu + 2\nu)\omega_- - (k + 2\kappa) = 0 \quad (6.68b)$$

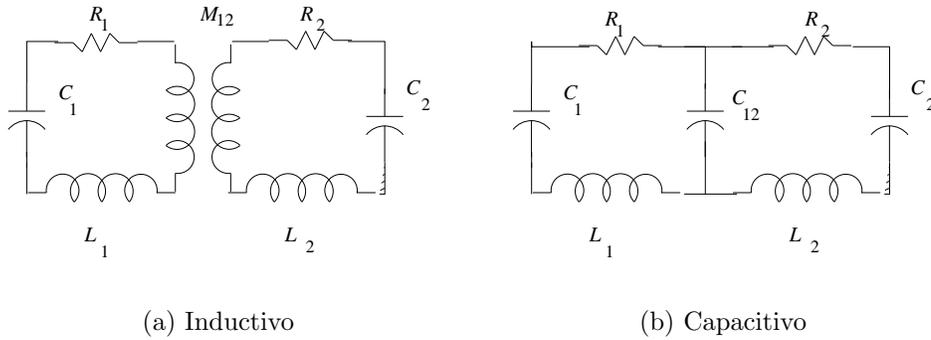


Figura 6.11: Circuitos oscilantes acoplados con disipación

Estas ecuaciones tienen el mismo aspecto que la que hemos resuelto en la Sección 2.1.1: sus soluciones tienen una parte imaginaria definida positiva si se cumplen las condiciones (6.67), que representa la disipación de energía del sistema.

En este caso particular, una sencilla transformación de coordenadas llevó las tres matrices a forma diagonal, pero eso en general no es posible; sólo la simetría del sistema ha permitido hacerlo.

Problemas 6.4

Problema 6.4.1.

Hallar los modos normales de oscilación de los circuitos acoplados de la Figura 6.11.

Problema 6.4.2.

Incluir los amortiguadores en el modelo de la suspensión de un automóvil. Suponer que existen amortiguadores lineales en cada una de los ejes (Figura 6.12)

Problema 6.4.3.

Mostrar que una pequeña fuerza disipativa *aparta* a los asteroides troyanos de la posición de equilibrio.

6.5. Sistemas forzados

Cuando una fuerza externa $\mathbf{F}(t)$ actúa sobre una de sus componentes, el sistema se llama *forzado*. Se trata de una generalización del sencillo oscilador forzado, que hemos tratado en la Sección 2.1.2. Las mismas ideas se aplican a todos los sistemas linealizados y vamos a examinarlas en esta sección.

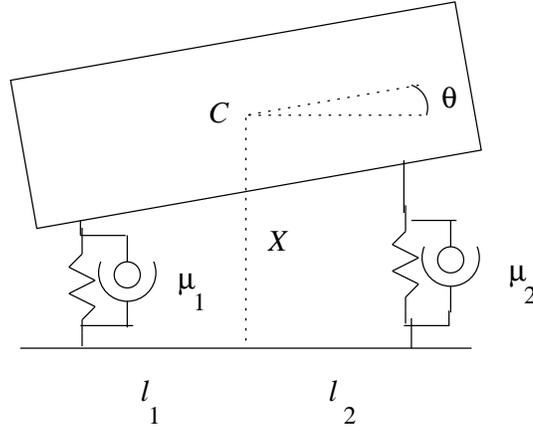


Figura 6.12: Modelo de suspensión de un automóvil, incluyendo amortiguación

6.5.1. Fuerzas externas en sistemas lineales

Sea $\mathbf{F}_a(t)$ un sistema de fuerzas externas que actúa sobre el sistema mecánico linealizado. Las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{F}\dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{F}(t) \quad (6.69)$$

en donde el segundo miembro representa una fuerza generalizada externa arbitraria, que no depende de las coordenadas $\boldsymbol{\xi}$.

La fuerza externa puede modelarse como superposición de distintas frecuencias usando la integral de Fourier (2.19). Para cada frecuencia, es necesario resolver la ecuación (6.69) con un segundo miembro sinusoidal $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_\omega e^{-i\omega t}$. La solución tiene la forma:

$$\boldsymbol{\xi}_e(t) = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{F}_\omega e^{-i\omega t} \quad (6.70a)$$

$$\mathbf{Z}(\omega) = (-\omega^2\mathbf{M} - i\omega\mathbf{F} + \mathbf{K})^{-1} \quad (6.70b)$$

en donde la matriz \mathbf{Z} se llama la *matriz de impedancia* o *matriz de transferencia* del sistema. La estructura de la solución particular (6.70) generaliza los resultados que obtuvimos para el oscilador armónico forzado (Sección 2.1.2): existe una resonancia para cada frecuencia propia ω_α del sistema. La absorción de energía es especialmente intensa en esas frecuencias y la amplitud de oscilación crece enormemente.

Por otra parte, es posible tratar la fuerza externa con el método de la función de Green (Sección 2.1.3). Para generalizarlo introduciremos la *matriz de Green* como la solución de la ecuación:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{G}} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{K}\mathbf{G} = \mathbb{I}\delta(t) \quad (6.71a)$$

con condiciones iniciales causales:

$$\mathbf{G}(t \leq 0) = 0 \quad (6.71b)$$

$$\dot{\mathbf{G}}(\epsilon) - \dot{\mathbf{G}}(-\epsilon) = \mathbf{M}^{-1}\mathbb{I} \quad (6.71c)$$

Es sencillo demostrar que una solución particular del sistema inhomogéneo (6.69) está dada por la convolución (Cf. Eq. (2.31)):

$$\xi_e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(t - \tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau \quad (6.72)$$

en donde el límite superior puede reemplazarse por t , dada la condición de causalidad.

Existe una conexión obvia entre la matriz de Green y la de impedancia: son (a menos de una constante) transformadas de Fourier una de la otra. En efecto es fácil demostrar que:

$$\mathbf{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{Z}(\omega) \quad (6.73)$$

en donde $\mathbf{G}(\omega)$ es la transformada de Fourier de la matriz de Green:

$$\mathbf{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{G}(t) e^{i\omega t} \quad (6.74)$$

Veremos que esta conexión tiene consecuencias importantes.

6.5.2. Causalidad y analiticidad

Examinemos brevemente las consecuencias del “Principio de Causalidad” (6.71b). Los resultados que siguen son sumamente generales y se aplican a la función de Green cualquier operador lineal \mathcal{L} que actúe sobre funciones de la variable t .

Impondremos a la función de Green la condición de causalidad:

$$G(t) = 0 \quad t \leq 0 \quad (6.75)$$

Llamaremos a cualquier función que satisface la condición (6.75) una *función causal*.

Además, la función de Green debe ser una función de cuadrado integrable, pues la energía total del sistema excitado debe ser finita para todo tiempo finito:

$$\int_0^T |G(t)|^2 dt < \infty \quad (6.76)$$

y en el caso disipativo debe valer cuando $T \rightarrow \infty$.

Examinemos ahora la transformada de Fourier de la función de Green:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{i\omega t} dt \quad (6.77)$$

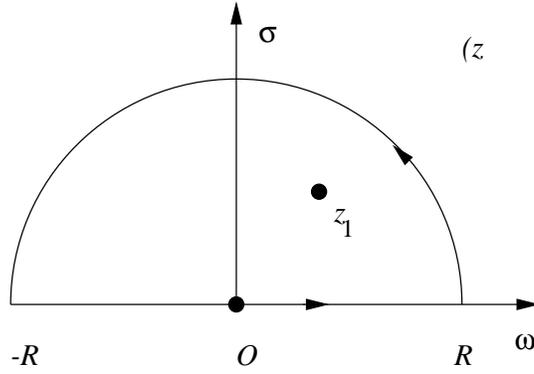


Figura 6.13: Camino de integración para antitransformada de Fourier

como función de la variable compleja $z = \omega + i\sigma$. Es fácil probar que $G(z)$ es analítica en el semiplano superior $\sigma > 0$:

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{i\omega t} e^{-\sigma t} dt \quad (6.78)$$

Esta última integral es convergente para todo $\sigma > 0$ debido a la acotación de $G(t)$ ¹; además $G(z)$ tiende uniformemente a cero cuando $\sigma \rightarrow +\infty$.

Ahora, probemos el resultado inverso: si $G(z)$ es analítica en un semiplano, el sistema es causal. Para ello, calculemos la transformada de Fourier inversa:

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega t} \quad (6.79)$$

por el método de residuos, completando el camino de integración real con un semicírculo adecuado de radio R , que haremos tender a infinito (Figura 6.13).

La contribución del semicírculo debe anularse cuando $R \rightarrow \infty$,² pero eso depende del argumento de la exponencial $e^{-izt} = e^{\sigma t} e^{-i\omega t}$. Si $t < 0$ es necesario trazar el semicírculo en el semiplano superior y

$$G(t) = \sum_{z_s} \text{Res } G(z_s) = 0 \quad (t < 0) \quad (6.80)$$

mientras que si $t > 0$, σ debe ser negativa y el semicírculo, trazado en el semiplano inferior, encierra las singularidades del integrando, dando un resultado no nulo.

Pasemos ahora a demostrar uno de las consecuencias más importantes de la condición de causalidad: la existencia de *relaciones de dispersión* entre la parte real e imaginaria de la función de Green. Para hacerlo, apliquemos el teorema de

¹Más aún, es convergente sobre el eje real $\sigma = 0$ si hay disipación.

²De otro modo, ¡no estaríamos calculando la integral (6.79)!

Cauchy a la función $G(z)/(z - z_1)$, sobre el camino de integración de la Figura 6.13. Puesto que $G(z)$ es analítica en el semiplano superior, tendremos:

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)}{\omega - z_1} dz \quad (6.81)$$

que expresa la extensión analítica de la función de Green al semiplano superior como funcional de su valor físico $G(\omega)$. Las relaciones de dispersión se encuentran pasando al límite $z_1 \rightarrow \omega_1$. Para hacerlo, usaremos la identidad:

$$\frac{1}{x - i\epsilon} = \text{Vp} \frac{1}{x} + i\pi\delta(x) \quad (6.82)$$

que vale en el sentido de las distribuciones. Una demostración sencilla de esta ecuación es la siguiente: multipliquemos por una función $f(x)$, integremos y separemos parte real e imaginaria de la distribución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - i\epsilon} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xf(x)}{x^2 + \epsilon^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon f(x)}{x^2 + \epsilon^2} dx$$

Sea $\eta \gg \epsilon$ un intervalo infinitesimal del eje real. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xf(x)}{x^2 + \epsilon^2} dx &= \int_{-\eta}^{\eta} \frac{xf(0)}{x^2 + \epsilon^2} dx + \int_{|x|>\eta} \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon f(x)}{x^2 + \epsilon^2} dx &= f(0) \int_{-\eta/\epsilon}^{\eta/\epsilon} \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} + \epsilon \int_{|x|>\eta} \frac{f(x)}{x^2} dx \\ &= \pi f(0) \end{aligned}$$

Sustituyendo (6.82) en (6.81) hallamos, después de álgebra sencilla, la ecuación:

$$G(\omega_1) = \frac{1}{\pi} \text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)}{\omega - \omega_1} d\omega \quad (6.83)$$

y, separando partes real e imaginaria, se obtienen las *relaciones de dispersión*:

$$\Re G(\omega_1) = \frac{1}{\pi} \text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im G(\omega)}{\omega - \omega_1} d\omega \quad (6.84a)$$

$$\Im G(\omega_1) = -\frac{1}{\pi} \text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re G(\omega)}{\omega - \omega_1} d\omega \quad (6.84b)$$

Estas ecuaciones expresan las partes real e imaginaria de $G(\omega)$, una en función de la otra. Sus consecuencias son importantes y generales: si la impedancia de un

sistema es función de la frecuencia, necesariamente existe absorción y viceversa. Como por la condición (6.76) y la igualdad de Parseval debe cumplirse

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega < \infty$$

concluimos que todo sistema lineal debe tener absorción.

También son importantes las relaciones de dispersión (6.84) experimentalmente. La parte imaginaria de $G(\omega)$ está conectada con fenómenos de absorción de energía y éstos son más fáciles de medir que los fenómenos de inducción, conectados con la parte real de $G(\omega)$. Es la absorción, pues, la que generalmente se mide y la parte real se calcula a través de las relaciones de dispersión.

Problemas 6.5

Problema 6.5.1. 1. Mostrar que las funciones de Green y de impedancia del oscilador amortiguado (Sección 2.1.2) están conectadas por la transformada de Fourier.

2. Comprobar que las partes real e imaginaria de $G(\omega)$ satisfacen relaciones de dispersión.

Problema 6.5.2. 1. Calcular la matriz de Green para el modelo sencillo de la Sección 6.4.2.

2. Calcular la matriz de impedancia para el mismo sistema.
3. Verificar que ambas están conectadas por la transformada de Fourier.

Problema 6.5.3.

En los circuitos de la Figura 6.7 se aplica una diferencia de potencial $V(t) = V_0 e^{-i\omega_e t}$ en el condensador C_1 . Mostrar que es posible elegir los valores de los parámetros de modo que no circule corriente por la inductancia L_2 .

Capítulo 7

La cuerda vibrante

Los métodos de la mecánica expuestos en los capítulos anteriores pueden aplicarse provechosamente a sistemas continuos: formados por material distribuido con densidad y presión continua. Ahora bien, tal como los sistemas disipativos que ya hemos tratado (Sección 6.4), no pueden tratarse solamente en el marco de la mecánica pues existe la posibilidad de que parte de la energía mecánica se transforme en calor, una forma no mecánica de la energía. Un tratamiento consistente de los sistemas continuos exige, pues, en general, la inclusión de fenómenos termodinámicos.

Existen, sin embargo, muchos sistemas que pueden tratarse provechosamente con los métodos lagrangeanos. Éstos incluyen no sólo sistemas vibrantes con baja disipación sino también los campos clásicos (electromagnético y gravitacional) y la ecuación de Schrödinger en Mecánica cuántica. Aquí nos limitaremos a ejemplificar el poder de estos métodos con un sistema muy sencillo: la cuerda vibrante y sus análogos.

7.1. La cadena de partículas

Es conveniente empezar el estudio de los sistemas continuos con el examen de sistemas discretos que “tiendan” en algún sentido a ser continuos¹. Nuestro método será aproximar una cuerda vibrante por una cadena de N partículas (“perlas”) engastadas en un hilo sometido a una tensión externa T (Figura 7.1). Nos proponemos estudiar pequeñas oscilaciones transversales de la cadena.

¹La mecánica de sistemas continuos no puede deducirse de la de sistemas discretos. Por el contrario, esta última puede deducirse de la primera, con hipótesis auxiliares adecuadas. El objeto de esta sección es establecer una conexión intuitiva entre ambos tipos de fenómenos

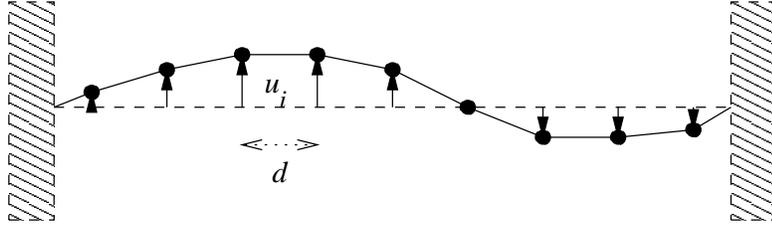


Figura 7.1: Cadena de partículas

7.1.1. Ecuaciones de movimiento

Construyamos el lagrangeano del sistema. Sea u_i el desplazamiento transversal de la i -ésima partícula de su posición de equilibrio. La energía cinética E_C del sistema² será, simplemente, la suma de las energías cinéticas de las partículas:

$$E_C = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^N \dot{u}_i^2 \quad (7.1)$$

La energía potencial proviene del trabajo necesario para estirar la cadena bajo la tensión T :

$$V = T \left[\sqrt{\frac{d^2}{4} + u_1^2} + \sum_{i=2}^{N-1} \sqrt{d^2 + (u_i - u_{i-1})^2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + u_N^2} - Nd \right] \quad (7.2)$$

expresión que, para desplazamientos pequeños de las partículas se reduce a

$$V = \frac{T}{d} \left[u_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{N-1} (u_i - u_{i-1})^2 + u_n^2 \right] \quad (7.3)$$

y finalmente, el largangeano para pequeñas oscilaciones de la cadena toma la forma:

$$L = E_C - V \quad (7.4)$$

$$= \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^N \dot{u}_i^2 - \frac{1}{2} \left[2u_1^2 + \sum_{i=2}^{N-1} (u_i - u_{i-1})^2 + 2u_n^2 \right] \quad (7.5)$$

De este lagrangeano podemos deducir las matrices de masa y de restitución del sistema. La primera es muy sencilla:

$$\mathbf{M} = m\mathbb{I} \quad (7.6)$$

²Lamentablemente, se usa tradicionalmente la letra T tanto para designar la energía cinética como la tensión del hilo. En esta sección, mal que nos pese, usaremos E_C para la primera.

pero la matriz de restitución es más compleja:

$$\mathbf{K} = \frac{T}{d} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

La primera y última fila de la matriz tienen una estructura diferente de las demás. Esto se debe a que representan la interacción de la primera y última partícula de la cadena con las paredes a las que está sujeta. Estas ecuaciones representan, pues, *condiciones de contorno*, que describen la interacción del sistema con su entorno. Veremos que es posible un elegante tratamiento del sistema, que separa las condiciones de contorno de las ecuaciones de movimiento.

7.1.2. Ondas

Encontremos, en primer lugar, los modos normales de oscilación del sistema. Como de costumbre, usamos una sustitución de d'Alembert:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}e^{-i\omega t} \quad (7.8)$$

para encontrar la ecuación de autovalores:

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{A} = 0 \quad (7.9)$$

que es conveniente escribir explícitamente en la forma:

$$\left(-m\omega^2 + 3\frac{T}{d}\right) A_1 - \frac{T}{d}A_2 = 0 \quad j = 1 \quad (7.10a)$$

$$-\frac{T}{d}A_{j-1} + \left(-m\omega^2 + 2\frac{T}{d}\right) A_j - \frac{T}{d}A_{j+1} = 0 \quad j = 2, \dots, N-1 \quad (7.10b)$$

$$-\frac{T}{d}A_{N-1} + \left(-m\omega^2 + 3\frac{T}{d}\right) A_N = 0 \quad j = N \quad (7.10c)$$

El sistema (7.10) es lineal homogéneo y tendrá soluciones distintas de la trivial si y sólo si el determinante de los coeficientes se anula. Este es un procedimiento engorroso para hallar las frecuencias de los modos normales en este caso. Es mucho más sencillo observar que el sistema (7.10) tiene sus coeficientes independientes del índice j y eso, a su vez, sugiere usar la sustitución de d'Alembert para resolverlo:

$$A_j = Ce^{iKj} \quad (7.11)$$

donde C y K son constantes arbitrarias.

Consideremos en primer lugar las ecuaciones (7.10b). Sustituyendo la forma (7.11) obtenemos la *relación de dispersión* para la cadena:

$$m\omega^2 = 4\frac{T}{d} \operatorname{sen}^2 \frac{K}{2} \quad (7.12)$$

Las ecuaciones (7.10a) y (7.10c) tienen una forma distinta de las anteriores y en general no se satisfarán con la sustitución anterior. Sin embargo, podemos lograrlo con un sencillo artificio. Imaginemos dos partículas ficticias (que llamaremos *partículas imágenes*), 0 y $N + 1$ colocadas respectivamente a izquierda y derecha de nuestra cadena, a distancia $d/2$ de las paredes. Con este artificio, las ecuaciones de movimiento para la primera y última partícula toman la forma de las ecuaciones centrales (7.10b):

$$\begin{aligned} -\frac{T}{d}A_0 + \left(-m\omega^2 + 2\frac{T}{d}\right)A_1 - \frac{T}{d}A_2 &= 0 \\ -\frac{T}{d}A_{N-1} + \left(-m\omega^2 + 2\frac{T}{d}\right)A_N - \frac{T}{d}A_{N+1} &= 0 \end{aligned}$$

y satisfarán la relación de dispersión (7.12).

Las amplitudes A_0 y A_{N+1} están a nuestra disposición y las elegiremos para obtener las ecuaciones correctas de movimiento, cosa que se logra si satisfacen:

$$A_0 = -A_1 \qquad A_{N+1} = -A_N \quad (7.13)$$

Las ecuaciones (7.13) son las *condiciones de contorno* para la cadena de partículas, que hemos separado limpiamente de las ecuaciones de movimiento con el “truco” de las partículas imagen. Antes de aplicarlas para hallar la solución de nuestro problema, examinemos el significado de la solución (7.11). Junto con la ecuación (7.8), los modos normales hallados hasta el momento representan *ondas progresivas*:

$$u_j = Ce^{i(kx_j - \omega t)}; \qquad x_j = \left(j - \frac{1}{2}\right)d, \qquad k = \frac{K}{d} \quad (7.14)$$

que se propagan con velocidad (de fase):

$$v_f = \frac{\omega}{k} = 2\sqrt{\frac{dT}{m}} \frac{\operatorname{sen} \frac{K}{2}}{K} \quad (7.15)$$

Otra solución posible son ondas que se propagan hacia la izquierda:

$$u_j = C'e^{-i(kx_j + \omega t)} \quad (7.16)$$

y la solución más general será una superposición de ambas.

7.1.3. Los modos normales

Al llegar a los extremos las ondas sufren reflexiones y es allí donde entran a jugar un papel esencial las condiciones de contorno (7.13). La primera de estas condiciones se satisfará si A_j es una función impar de la posición de las partículas x_j :

$$A_j = C \operatorname{sen} kx_j = C \operatorname{sen} K \left(j - \frac{1}{2} \right) \quad (7.17)$$

La segunda de estas condiciones exige que:

$$\operatorname{sen} K \left(N + \frac{1}{2} \right) = \operatorname{sen} K \left(N - \frac{1}{2} \right)$$

o también:

$$\operatorname{sen} NK = 0 \quad (7.18)$$

Ésta es la ecuación secular de la cadena de partículas. Para satisfacerla, sólo tenemos a nuestra disposición el parámetro K , que tomará los valores:

$$K = \frac{n}{N} \pi \quad (7.19)$$

De esta manera hallamos los modos normales de oscilación de la cadena de partículas:

$$A_j^{(n)} = C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x_j \quad (7.20)$$

(con $L = Nd$) y sus correspondientes frecuencias propias:

$$\omega_n = 2 \sqrt{\frac{T}{md}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2N} \quad (7.21)$$

La constante C_n se elige de manera que:

$$m \sum_j C_n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{L} x_j = 1$$

lo que se obtiene con:

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{Nm}} \quad (7.22)$$

De esta manera hemos hallado los modos normales de oscilación de la cadena. Cada uno de ellos representa una *onda estacionaria*, superposición de dos ondas viajeras en sentidos opuestos. Obsérvese que sólo existen N modos, pues para $n > N$ comienzan a repetirse los anteriores. La Figura 7.2 muestra los primeros modos normales de una cadena.

El movimiento general de la cadena se describe como una superposición de ondas estacionarias. Cada una de ellas oscila independientemente de las otras,

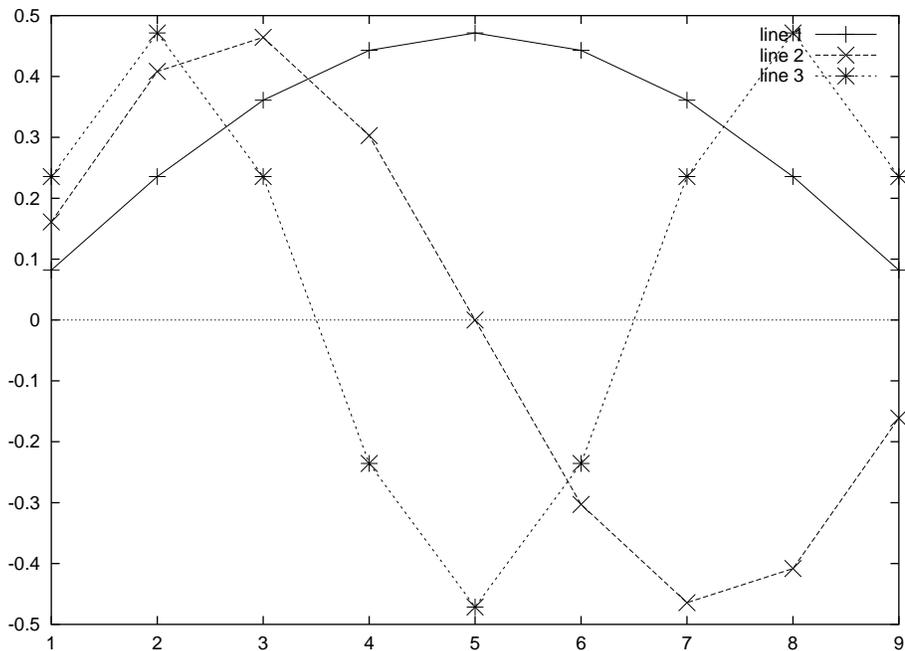


Figura 7.2: Primeros modos normales de una cadena de partículas

con una amplitud y fase determinada por las condiciones iniciales del problema. Las coordenadas normales de la cadena son:

$$Q_n = \sum_j A_j^{(n)} u_j \quad (7.23)$$

y representan las amplitudes de cada onda estacionaria.

Problemas 7.1

Problema 7.1.1.

Examinar los modos normales de oscilación de una cadena infinita de partículas.

Problema 7.1.2.

Examinar los modos normales de oscilación de una cadena cerrada de partículas.

Problema 7.1.3.

Una cadena está formada por partículas de dos masas diferentes: m y M . Hallar sus modos normales de oscilación.

7.2. La cuerda continua

La cuerda vibrante es, desde muchos puntos de vista, el más simple de los sistemas continuos. La mayor parte de los conceptos y las dificultades asociados

con el tratamiento de los sistemas continuos se presentan en la cuerda vibrante o en alguna de sus modificaciones.

7.2.1. El límite de la cadena de partículas

Examinemos ahora la cadena de partículas (Sección 7.1) como una aproximación a la cuerda continua³. Para mejorar la aproximación, debemos aumentar el número de partículas de la cadena, pero disminuyendo la masa de cada partícula de modo que la masa total de la nueva cadena sea constante. Con más precisión, debemos hacer:

$$N \rightarrow \infty, \quad Nd = L, \quad \frac{m}{d} = \mu \quad (7.24)$$

en donde L y μ son independientes de N .

De esta manera, los modos normales de la cuerda tienden a:

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{L\mu}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \quad (7.25)$$

y las correspondientes frecuencias propias a:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \frac{n\pi}{L} \quad (7.26)$$

Las ecuaciones de movimiento para la cuerda toman la forma de una ecuación diferencial a derivadas parciales:

$$\mu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (7.27)$$

pues

$$\frac{T}{d^2}(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) \simeq \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(d^2)$$

Observemos las principales características de nuestro pasaje (heurístico) al continuo: en primer lugar, el índice discreto j ha sido reemplazado por el “índice continuo” x ; en segundo lugar, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias ha sido reemplazado por una ecuación diferencial en derivadas parciales.

Una segunda diferencia importante es la aparición explícita de condiciones de contorno: mientras que éstas aparecían implícitamente, mezcladas con las ecuaciones de movimiento, en los sistemas discretos, aparecen explícitamente en los sistemas continuos. Así, por ejemplo, no es difícil probar que las condiciones de

³Recordemos que las consideraciones que siguen son heurísticas. El tratamiento correcto de la cuerda continua se verá en la Sección 7.4.

contorno de la cadena (7.13) (que separamos a propósito de las ecuaciones de movimiento) quedan reemplazadas por:

$$u(0, t) = 0 \qquad u(L, t) = 0 \qquad (7.28)$$

para cualquier t . Obviamente, estas condiciones significan que la cuerda está sujeta a los bordes.

Finalmente, usando un paso al límite adecuado, podemos hallar las energías cinética y potencial de la cuerda:

$$E_c = \int_0^L \mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \qquad (7.29a)$$

$$V = \int_0^L T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \qquad (7.29b)$$

que muestra una última característica del “paso al límite heurístico”: las sumas se transforman en integrales.

7.2.2. Separación de variables

Es interesante observar que el mismo procedimiento usado para resolver el problema general de pequeñas oscilaciones (Sección 6.2) dará la solución del problema de la cuerda continua. Proponiendo una sustitución de d’Alembert:

$$u(x, t) = A(x)e^{-i\omega t}$$

y sustituyendo en la ecuación de movimiento (7.27) se obtiene una ecuación diferencial para la función coeficiente $A(x)$:

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + k^2 A = 0 \qquad k^2 = \frac{\mu}{T} \omega^2 \qquad (7.30)$$

Esta ecuación es análoga al sistema de ecuaciones algebraicas (6.13). Sin embargo, (7.30) no contienen toda la información necesaria: hay que añadir las condiciones de contorno (7.28). La solución de (7.30) que se anula en el origen es:

$$A(x) = C \operatorname{sen} kx$$

mientras que la segunda de las condiciones de contorno (7.28) exige:

$$A(L) = 0 = \operatorname{sen} kL$$

y de esta ecuación hallamos los valores permitidos de k y de las frecuencias características:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \frac{n\pi}{L}$$

que son las mismas que las ecuaciones (7.25) y (7.26). Por analogía con la ecuación (6.13) diremos que la ecuación (7.30) junto con las condiciones de contorno (7.28) definen un problema de autovalores.

La solución más general posible de la ecuación de la cuerda se obtiene aplicando el principio de superposición:

$$u(x, t) = \Re \sum \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x Q_n(t) \quad (7.31)$$

en donde las coordenadas normales

$$Q_n(t) = Q_n e^{-i\omega_n t}$$

pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales. Estas últimas deben especificarse para cada punto de la cuerda en la forma:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ \dot{u}(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

en donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones suficientemente bien comportadas que describen la posición y velocidad inicial de la cuerda.

Sustituyendo en (7.31) obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= \Re \sum_n Q_n \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \\ g(x) &= \Re \sum_n (-i\omega_n) Q_n \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \end{aligned}$$

Para hallar las amplitudes complejas Q_n de las coordenadas normales se aplica la relación de ortogonalidad de seno:

$$\frac{2}{L} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{m\pi}{L} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx = \delta_{mn} \quad (7.32)$$

y se obtiene en forma inmediata:

$$\Re Q_n = \mu \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx \quad (7.33a)$$

$$\Im Q_n = -\frac{\mu}{\omega_n} \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx \quad (7.33b)$$

Estas ecuaciones resuelven totalmente el problema planteado y son la generalización natural de las que resuelven el problema de modos normales (Sección 6.2). Evidentemente, en el caso de una cuerda vibrante, los modos normales son los coeficientes de Fourier de la función $u(x, t)$.

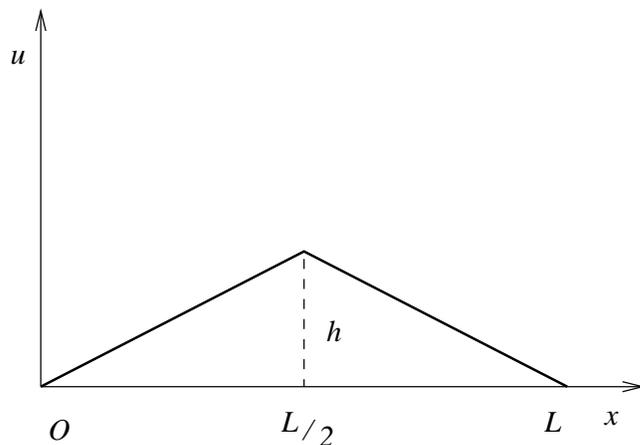


Figura 7.3: Condiciones iniciales para la cuerda vibrante

Examinemos, por ejemplo, la solución para una cuerda pulsada en la mitad (Figura 7.3). Las condiciones iniciales son:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x & 0 \leq x \leq L/2 \\ \frac{2h}{L}(L-x) & L/2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (7.34a)$$

$$g(x) = 0 \quad (7.34b)$$

Sustituyendo en (7.33) hallamos:

$$Q_n = \frac{8h}{(\pi n)^2} \sqrt{\mu} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \pi n \quad (7.35)$$

que se anula cuando n es par.

La Figura 7.4 muestra las oscilaciones de la cuerda correspondientes a este ejemplo. Las oscilaciones pueden descomponerse en la superposición de ondas que se reflejan en los bordes de la cuerda para dar lugar a la figura.

Una expresión para la energía total de la cuerda puede hallarse sustituyendo la solución genérica (7.31) en (7.29) y usando la relación de ortogonalidad (7.32):

$$E = E_C + V = \sum_n \frac{\pi^2 n^2 T}{4L \mu} |Q_n|^2 \quad (7.36)$$

que expresa la energía total concentrada en los modos.

Los modos normales de oscilación de la cuerda reciben el nombre de *armónicos*, proveniente de la teoría de instrumentos musicales. Los armónicos son responsables del *timbre* del sonido en un instrumento musical.

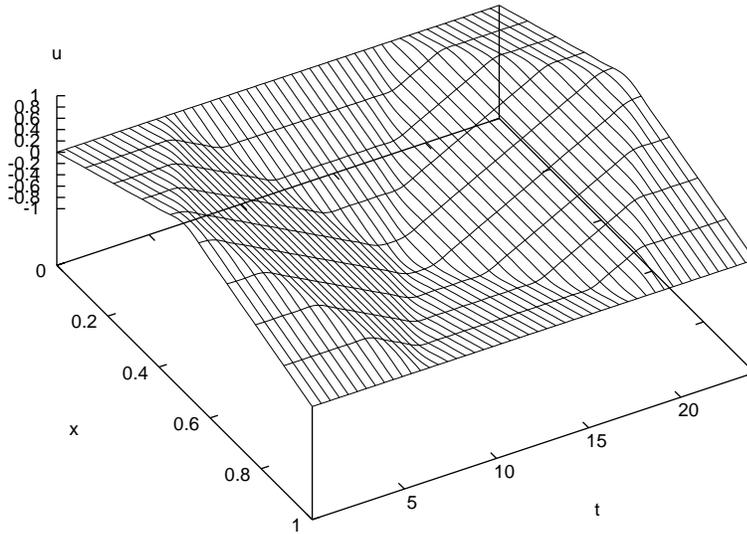


Figura 7.4: Oscilaciones de una cuerda pulsada en el centro.

7.2.3. El espacio de Hilbert

Es posible generalizar la interpretación geométrica de las coordenadas normales a los sistemas continuos (Sección 6.2). Para ello, se introduce un espacio de infinitas dimensiones que puede imaginarse (heurísticamente) como el límite del espacio de configuración cuando el número de grados de libertad tiende a infinito. En el problema de la cadena de partículas, a cada punto material de la cadena le corresponde una dimensión en el espacio de configuración. En el límite continuo, se obtiene un espacio de infinitas dimensiones, donde se mueve el punto representativo del sistema.

No todas las funciones son admisibles en este espacio: sólo aquellas que representan el movimiento de una cuerda con energía finita. De las ecuaciones (7.29) deducimos que las funciones deben ser de *cuadrado integrable*:

$$\int_0^L u^2 dx < \infty$$

es decir, la longitud del vector que representa $u(x, t)$ debe ser finita.

El espacio de funciones de cuadrado integrable L^2 es un ejemplo del *espacio de Hilbert* abstracto. Este último es un espacio vectorial \mathcal{H} , con las siguientes condiciones:

Normado: Está provisto de un producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < \infty$, entre cualquier par

de vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} .

Completitud: Es completo: toda sucesión de Cauchy de vectores \mathbf{u}_n tal que $|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_m| < \epsilon$; $n, m \rightarrow \infty$, tiene límite.

Separabilidad: Existe un conjunto numerable de vectores \mathbf{u}_n , que es denso en \mathcal{H} .

Otros ejemplos de espacios de Hilbert son los espacios euclídeos de un número finito de dimensiones y el espacio de sucesiones a_n de cuadrado sumable $\sum a_n^2 < \infty$.

Las coordenadas normales forman una base del espacio de Hilbert de la cuerda vibrante: todo vector de \mathcal{H} puede representarse como una combinación lineal de los Q_n . Las autofunciones $A_n(x)$ representan una transformación de coordenadas entre las “coordenadas de posición” y las coordenadas normales. Pasar a coordenadas normales es, pues, una “rotación” de ejes en el espacio de Hilbert.

7.2.4. Disipación y forzamiento

La energía en una cuerda vibrante se pierde por disipación que, en los instrumentos musicales, se debe fundamentalmente a la emisión de sonido. La disipación puede representarse, en muchos casos, con un término proporcional a la velocidad de la cuerda:

$$\mu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \mu \lambda \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (7.37)$$

ecuación que se conoce como la *ecuación del telegrafista*, que tiene importancia en la teoría de las líneas de transmisión electromagnética (Sección 7.2.5).

En la familia de los violines, el sonido se emite forzando la cuerda con un arco: el roce excita el modo buscado por el artista, que es el emitido por el instrumento. Este fenómeno puede comprenderse con el uso de la *función de Green* $G(x, x'; t)$ de la cuerda. Esta última se define como:

$$\mu \frac{\partial^2 G(x, x'; t)}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 G(x, x'; t)}{\partial x^2} = \delta(x - x') \delta(t) \quad (7.38)$$

y representa el movimiento originado por una excitación unidad aplicada en el punto x' cuando $t = 0$.

Podemos hallar la función de Green observando que:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega \quad (7.39)$$

y por lo tanto, buscaremos una solución de la ecuación (7.38) de la forma:

$$G(x, x'; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} G(x, x', \omega) d\omega \quad (7.40)$$

Por supuesto, (7.40) no es otra cosa que la transformada de Fourier de la función de Green, que debe ser una función analítica en el semiplano superior ω (Sección 6.5). Junto con las condiciones de contorno (7.28), la condición de causalidad determina completamente la función de Green de la cuerda. Sustituyendo (7.39) y (7.40) en (7.38) hallamos la ecuación:

$$T \frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} + \mu \omega^2 G(x, x') = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(x - x') \quad (7.41)$$

La solución de esta ecuación, con las condiciones de contorno (7.28), es la *función de Green espacial* del problema. Existen varias maneras de hallarla (Problema 7.2.4) pero aquí nos limitaremos a una sencilla y general: vamos a desarrollar la solución de (7.41) en los modos normales de vibración de la cuerda. Buequemos, pues, una solución en la forma:

$$G(x, x') = \sum_n G_n(x') \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} k_n x \quad (7.42)$$

que, sustituida en (7.41) da:

$$\sum_n (\omega^2 - \omega_n^2) G_n(x') \sqrt{2} L \operatorname{sen} k_n x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \delta(x - x') \quad (7.43)$$

Multiplicando por $\sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} k_m x$ e integrando, hallamos:

$$G_m(x') = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{\operatorname{sen} k_m x}{\omega^2 - \omega_n^2} \quad (7.44)$$

El denominador de esta última expresión no está todavía bien definido. Para garantizar que sea una función analítica en el semiplano superior, sumaremos a ω una parte imaginaria infinitesimal $i\epsilon$, de modo que los polos de la expresión estén en el semiplano inferior. Reuniendo todas las piezas, hallamos para la función de Green espacial la expresión:

$$G(x, x'; \omega) = -\frac{1}{2\pi\mu L} \sum_n \frac{\operatorname{sen} k_n x \operatorname{sen} k_n x'}{(\omega + i\epsilon)^2 - \omega_n^2} \quad (7.45)$$

Finalmente, es necesario calcular la intergral (7.40) para hallar la función de Green de la cuerda (Problema 7.2.5):

$$G(x, x', t) = \frac{1}{\mu} \sum_n \frac{1}{\omega_n} \operatorname{sen} k_n x \operatorname{sen} k_n x' \operatorname{sen} \omega_n t \Theta(t) \quad (7.46)$$

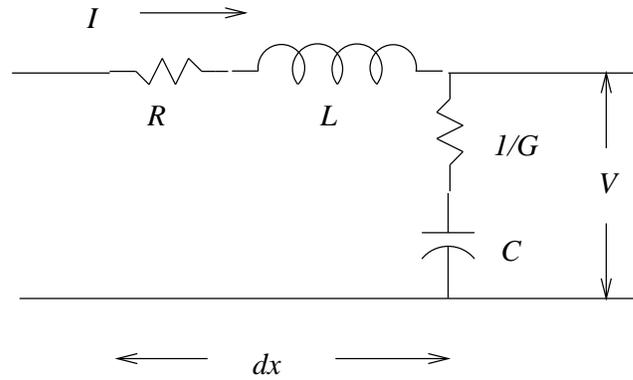


Figura 7.5: Circuito correspondiente a una línea de transmisión

7.2.5. Otros sistemas continuos

Existen muchos sistemas físicos que se comportan en forma análoga a una cuerda vibrante. Tal vez los más importantes sean las líneas de transmisión electromagnética, cuya importancia para las comunicaciones es obvia.

Consideremos, por ejemplo, una línea de transmisión a baja frecuencia (Figura 7.5). A lo largo de un intervalo dx , la diferencia de potencial variará:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} - RI \quad (7.47a)$$

mientras que la corriente filtrará entre los cables:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial V}{\partial t} - GV \quad (7.47b)$$

Eliminando V entre las ecuaciones (7.47) se llega a la *ecuación general del telegrafista*:

$$LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial I}{\partial t} + RGI = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \quad (7.48)$$

que generaliza la ecuación (7.37).

En la teoría de guías de onda, los modos de propagación satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \omega_C^2 E \quad (7.49)$$

que es análoga a la ecuación de una cuerda vibrante apoyada sobre un sustrato elástico (Problema 7.2.8).

Problemas 7.2

Problema 7.2.1 (Cuerda de guitarra).

En los instrumentos de “punteo”, como la guitarra o el arpa, la cuerda se excita

apartándola de su posición de equilibrio y soltándola. Examinar el caso general, en que la desviación de la cuerda $f(x)$ puede representarse como un triángulo de altura h en un punto a distancia l del origen.

Problema 7.2.2 (Cuerda de piano).

En los instrumentos de cuerda golpeada, como el piano, la vibración en la cuerda se excita golpeándola con un martillo que da a la cuerda una velocidad inicial $g(x)$ sin desviación inicial $f(x) = 0$. Hallar los armónicos de una cuerda de piano golpeada por un martillo infinitamente delgado en el punto $x = l$:

$$g(x) \propto \delta(x - l)$$

Problema 7.2.3 (Más sobre la cuerda de piano).

Hallar la distribución de armónicos en una cuerda de piano

1. golpeada con un martillo plano, de ancho $2h$:

$$g(x) = \begin{cases} v_0 & |x - l| \leq h \\ 0 & |x - l| > h \end{cases}$$

2. golpeada con un martillo cóncavo, rígido, de ancho $2h$:

$$g(x) = \begin{cases} v_0 \cos \frac{\pi(x-l)}{2h} & |x - l| \leq h \\ 0 & |x - l| > h \end{cases}$$

Problema 7.2.4.

Hallar una expresión finita para la función de Green espacial de la cuerda.

1. Hallar soluciones G_1 y G_2 de (7.41) que satisfagan las condiciones de contorno en los extremos.
2. Integrando la ecuación (7.41) en un entorno de x' , hallar la discontinuidad en la derivada de la función de Green.
3. Determinar los coeficientes arbitrarios de las soluciones G_1 y G_2 de modo que la función de Green espacial sea continua, con derivada discontinua.

Problema 7.2.5.

Calcular la integral (7.40).

Sugestión: Usar cálculo de residuos sobre un camino de integración adecuado.

Problema 7.2.6 (Cuerda de violín).

La acción del arco sobre una cuerda de violín puede representarse, en forma muy grosera, por la fuerza por unidad de longitud:

$$f(x, t) = \begin{cases} f_0 & |x - l| \leq h \\ & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & |x - l| > h \\ & t > \tau \end{cases}$$

Hallar la distribución de armónicos de la cuerda.

Problema 7.2.7 (Otro sobre la cuerda de piano).

Una cuerda de piano golpeada por un martillo flexible puede representarse por la fuerza:

$$f(x, t) = \begin{cases} f_0 \cos \frac{\pi(x-l)}{2h} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{\tau} & |x - l| \leq h \\ & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & |x - l| > h \\ & t > \tau \end{cases}$$

Problema 7.2.8 (Cuerda apoyada).

Una cuerda vibrante se encuentra apoyada sobre un sustrato elástico, con un coeficiente de restitución λ^2 . Hallar la ecuación de movimiento correspondiente.

7.3. Ondas

Uno de los fenómenos más interesantes en la mecánica de sistemas continuos es el movimiento en forma de *ondas*. En esta forma de movimiento no hay desplazamiento de masa pero sí de energía e impulso. Examinaremos este tipo de movimiento en esta sección y en la Sección 7.4 completaremos el análisis de energía e impulso.

7.3.1. La ecuación de la onda

La ecuación de movimiento de la cuerda vibrante puede escribirse, sencillamente, como la *ecuación de ondas*:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (7.50)$$

en donde $v^2 = T/\mu$ se llama la *velocidad de propagación*.

Es conveniente analizar esta ecuación en el caso idealizado de una cuerda infinita e incluir el efecto de las condiciones de contorno aplicando el principio de superposición.

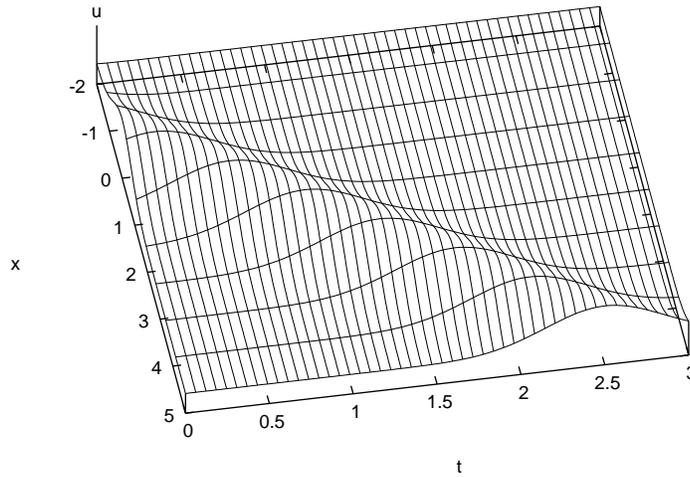


Figura 7.6: Solución típica de la ecuación de ondas

Es posible hallar la solución general de (7.50) con el sencillo cambio de variables:

$$\xi = x - vt \qquad \eta = x + vt$$

que reduce la ecuación de la onda a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

cuya solución general toma la forma:

$$u = F(\xi) + G(\eta) = F(x - vt) + G(x + vt) \qquad (7.51)$$

con F y G funciones arbitrarias. La ecuación (7.51) representa dos ondas que viajan hacia la derecha y hacia la izquierda respectivamente sin sufrir deformaciones (Figura 7.6).

Las funciones arbitrarias F y G pueden hallarse a partir de las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) = F(x) + G(x) \\ \dot{u}(x, 0) &= g(x) = v[-F'(x) + G'(x)] \end{aligned}$$

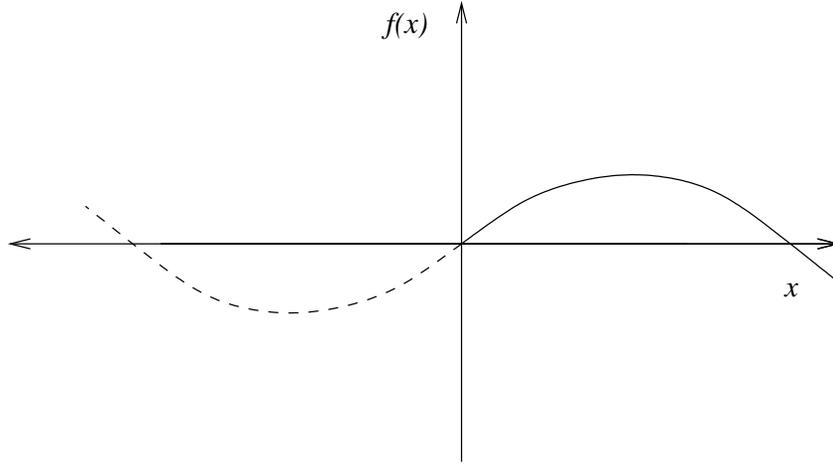


Figura 7.7: Reflexión de una onda en un extremo fijo

Esta última ecuación se integra inmediatamente, con el resultado:

$$-F(x) + G(x) = \frac{1}{v} \int_a^x g(x) dx$$

con a un punto de referencia arbitrario sobre el eje x . Finalmente deducimos:

$$2F(x) = f(x) - \frac{1}{v} \int_a^x g(x) dx$$

$$2G(x) = f(x) + \frac{1}{v} \int_a^x g(x) dx$$

Sustituyendo en (7.51) hallamos la *solución de d'Alembert* :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - vt) + f(x + vt)] + \frac{1}{v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(\xi) d\xi \quad (7.52)$$

Aunque la solución de d'Alembert es válida para una cuerda infinita, puede aprovecharse para resolver el problema de una cuerda finita. Comencemos considerando el problema más sencillo de una cuerda sujeta en un único extremo.

La condición de contorno correspondiente al extremo $x = 0$ fijo será $u(0, t) = 0$ o sea:

$$f(vt) + f(-vt) + \frac{2}{v} \int_{-vt}^{vt} g(\xi) d\xi$$

Esta condición puede satisfacerse idénticamente prolongando las condiciones iniciales $f(x)$ y $g(x)$ al semieje negativo como funciones impares (Figura 7.7). Esta "cuerda imagen" carece de significado físico, pero permite describir el movimiento de una cuerda atada en un extremo como la superposición de dos trenes de ondas con velocidades opuestas y que tienen un nodo permanente en el extremo.

Para la cuerda finita, es posible construir la solución exigiendo que $f(x)$ y $g(x)$ sean funciones impares y periódicas, de periodo $2L$. Con esas condiciones iniciales, el movimiento de la cuerda finita puede interpretarse como la superposición de dos trenes de onda que que viajan en direcciones opuestas y que interfieren de manera tal de formar nodos en los extremos de la cuerda.

7.3.2. Señales

Los modos normales de oscilación de una cuerda infinita pueden hallarse de la ecuación de movimiento usando la sustitución de d'Alembert:

$$u_{k,\omega} = A_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (7.53a)$$

en donde

$$k = \pm \frac{\omega}{v} \quad (7.53b)$$

es el *número de onda* y la cantidad

$$\phi = (kx - \omega t) \quad (7.53c)$$

se llama la *fase* de la onda.

Estos modos normales se llaman *ondas monocromáticas* y constituyen una base completa para describir cualquier onda que se propaga por la cuerda. En particular, las ondas de duración finita se llaman *señales* pues pueden usarse para transmitir información.

La Figura 7.8 muestra una típica señal en un sistema ondulatorio. Su amplitud es variable: a partir de un cierto instante crece lentamente hasta un máximo y luego decrece hasta anularse. En el lenguaje de radiocomunicaciones, la frecuencia central se llama la *portadora*, sobre la que se imprime la *modulación*. Las señales suelen llamarse también *paquetes de onda*.

Consideremos una señal que se mueve hacia la derecha⁴. Si llamamos $u(x, t)$ a la amplitud, podemos representarla con los modos normales de vibración:

$$u(x - vt) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega \quad (7.54)$$

La cantidad $U(\omega)$ se llama el *espectro de amplitud* de la señal y es en general una cantidad compleja. La cantidad $|U(\omega)|^2$ se llama el *espectro de potencia* de la señal y está conectado con la energía de la señal. El espectro típico de una señal se muestra en la Figura 7.9: está concentrado alrededor de la frecuencia de la portadora ω_0 . El intervalo $\Delta\omega$ en que $|U(\omega)|^2 \neq 0$ se llama el *ancho de banda* de la señal.

⁴Nos limitaremos a señales que se mueven en un sentido dado, ya que a ellas pertenecen los ejemplos interesantes en las aplicaciones.

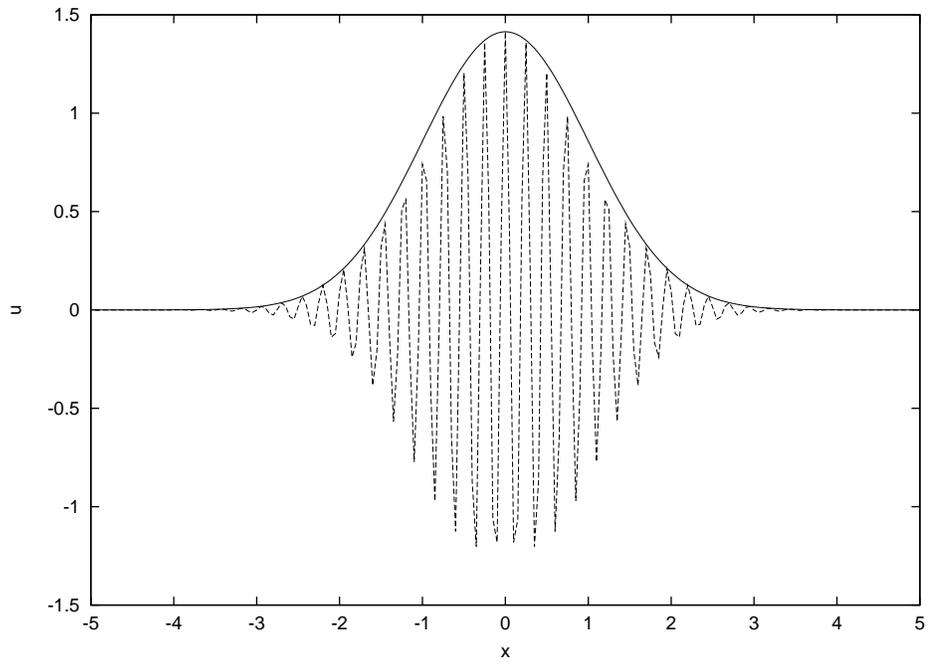


Figura 7.8: Ejemplo de señal

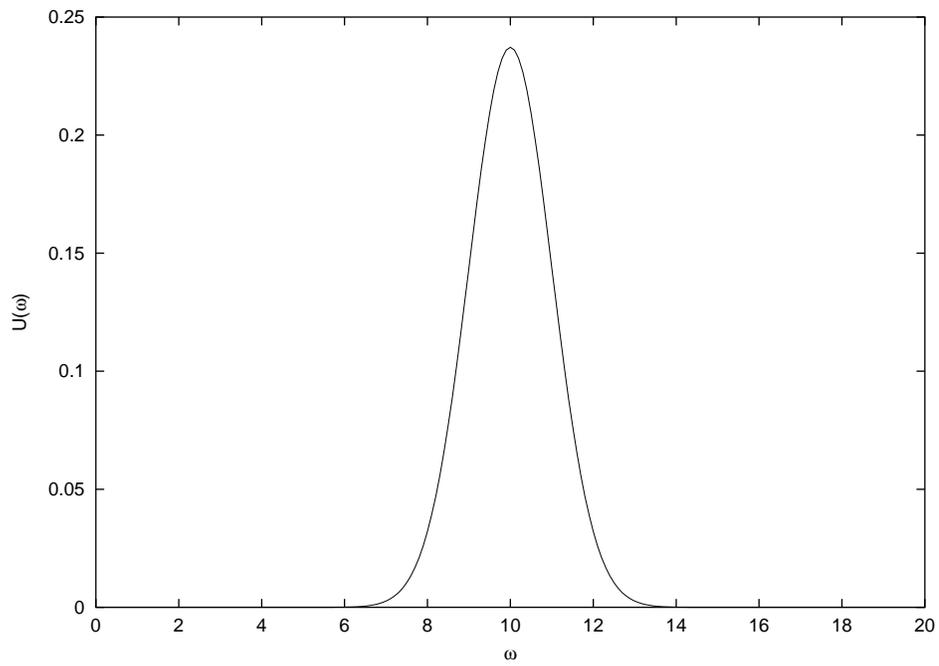


Figura 7.9: Espectro de frecuencias de una señal típica

7.3.3. Velocidades de propagación

Un sistema físico se llama *dispersivo* si la conexión entre el número de onda y la frecuencia no es lineal. Por ejemplo, en la ecuación del telegrafista (7.37) la *ecuación de dispersión* es:

$$v^2 k^2 = \omega^2 + i\lambda\omega$$

En un medio dispersivo, ya no es cierto que una solución de la ecuación de movimiento que se propaga hacia la derecha sea una función de $x - vt$. En general tendremos:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i[k(\omega)x - \omega t]} d\omega \quad (7.55)$$

Al no ser más una función de $x - vt$ el paquete de ondas se deforma: las ondas monocromáticas de distintas frecuencias se adelantan o atrasan respecto de la portadora y las relaciones de fase originales se alteran con el transcurso del tiempo.

En el caso particular en que el ancho de banda es pequeño y $k(\omega)$ varía lentamente cerca de ω_0 , es posible hacer un tratamiento general. En efecto, desarrollando en serie el número de onda alrededor de la frecuencia portadora:

$$k(\omega) = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_0 (\omega - \omega_0) + O[(\omega - \omega_0)^2]$$

y sustituyendo en (7.55) obtenemos la expresión:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \exp \left[i(k_0 x - \omega_0 t) + i \left(\frac{dk}{d\omega} \Big|_0 x - t \right) \right]$$

que puede escribirse en la forma más sencilla:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i(x/v_g - t)(\omega - \omega_0)} e^{i(x/v_f - t)\omega_0} \\ &= f(x - v_g t) e^{ik_0(x - v_f t)} \end{aligned} \quad (7.56)$$

La representación de la señal se ha factorizado: el segundo factor representa sencillamente la onda portadora mientras que el primero es la modulación de la misma. En esta aproximación, el paquete de ondas se propaga sin deformarse y el único efecto de la dispersión es que la portadora se propaga con una velocidad diferente de la modulación. La portadora se propaga con la *velocidad de fase*:

$$v_f = \frac{\omega_0}{k_0} \quad (7.57)$$

mientras que la amplitud se propaga con la *velocidad de grupo*:

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (7.58)$$

Cuando $v_f > v_g$ las crestas y nodos de la portadora se adelantan a la amplitud variable del paquete, pero de manera tal que esta última no se altere. En este caso se trata de *dispersión normal*; en caso contrario, de *dispersión anómala*. Por lo general, la energía del paquete de ondas está conectada con $|f(x - v_g t)|^2$ y por lo tanto, en las condiciones en que trabajamos, la velocidad de grupo es la velocidad con la que se transporta energía.

Problemas 7.3

Problema 7.3.1.

Una cuerda infinita se excita de la manera siguiente:

1.

$$f(x) = u_0 e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}$$

$$g(x) = 0$$

2.

$$f(x) = 0$$

$$g(x) = \begin{cases} v_0 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} u_0(1 - |x|/a) & x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} v_0 & |x| < b \\ 0 & |x| > b \end{cases}$$

Problema 7.3.2.

Calcular la energía total de una cuerda infinita en función de las condiciones iniciales $f(x)$ y $g(x)$.

Problema 7.3.3.

Resolver el problema de una cuerda finita de longitud L , pulsada en el punto a , usando la solución de d'Alembert.

Problema 7.3.4.

Lo mismo, para una cuerda de piano golpeada en un intervalo de ancho Δx centrado en el punto a .

Problema 7.3.5.

Hallar el espectro de las siguientes señales:

1.

$$u(0, t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ u_0 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

2.

$$u(0, t) = \frac{u_0}{1 + a^2 t^2}$$

3.

$$u(0, t) = u_0 e^{-\lambda t} \Theta(t)$$

4.

$$u(0, t) = u_0 e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}$$

Hallar también los correspondientes espectros de potencia.

Problema 7.3.6.

Calcular las ecuaciones de dispersión y las velocidades de propagación para los siguientes sistemas:

1. La ecuación del telegrafista generalizada (7.48).
2. La ecuación de la cuerda apoyada (7.49).

¿Es dispersión normal?

7.4. La formulación lagrangeana de la cuerda vibrante

Pasemos ahora a tratar la cuerda vibrante con la formulación lagrangeana. Se trata del sistema continuo más sencillo que puede tratarse con estos métodos que, a su vez, permiten generalizar con sencillez a problemas más complejos.

7.4.1. La densidad lagrangeana

Las energías cinética y potencial de la cuerda vibrante fueron calculadas ya en la Sección 7.2.1 (Ecs. (7.29)). Con ellas podemos calcular el lagrangeano de la cuerda vibrante en la forma:

$$L = \int_0^L \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (7.59)$$

La acción de la cuerda se obtiene, como siempre, integrando (7.59) entre los instantes inicial y final:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^L \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (7.60)$$

y el principio de mínima acción exige que la acción sea estacionaria ante una variación de la “trayectoria”. En este caso, la trayectoria se describe como una curva en el espacio de Hilbert correspondiente al sistema (Sección 7.2.3).

La técnica para construir las ecuaciones de movimiento es sistemas continuos es sumamente general y es conveniente trabajar con un sistema físico general, descrito por la acción:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V d^3x \mathcal{L}(\mathbf{r}, t) \quad (7.61)$$

en donde \mathcal{L} se llama la *densidad lagrangeana* del sistema. En el caso de la cuerda vibrante:

$$\mathcal{L} = \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \delta(y)\delta(z)$$

Para llevar a cabo la variación, debemos hacer alguna hipótesis sobre la estructura de la densidad lagrangeana. Supondremos que \mathcal{L} es una función de un campo ϕ y de sus derivadas espaciales $\partial_i\phi$ y temporales $\partial_t\phi$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_i\phi, \partial_t\phi) \quad (7.62)$$

Si esto se cumple, \mathcal{L} depende de las coordenadas y el tiempo sólo a través de el campo ϕ y sus derivadas. En el caso de la cuerda vibrante, $\phi(x, t) = u(x, t)$.

Hagamos ahora una variación del campo $\delta\phi(\mathbf{r}, t)$, bajo la cual la acción variará:

$$\delta S = \int_0^t dt \int_V d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi)} \delta\partial_i\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)} \delta\partial_t\phi \right) \quad (7.63)$$

En los dos últimos términos de (7.63) podemos “conmutar” la variación con la derivada:

$$\begin{aligned} \delta\partial_i\phi &= \partial_i\delta\phi \\ \delta\partial_t\phi &= \partial_t\delta\phi \end{aligned}$$

y es necesario después integrar por partes para eliminar las derivadas parciales. En la derivada temporal esto se hace de inmediato, imponiendo que las variaciones se anulan en el instante inicial y final:

$$\delta\phi(\mathbf{r}, 0) = \delta\phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (7.64)$$

Para las derivadas espaciales, esto es apenas más complicado. Usando la identidad vectorial:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}\varphi) = (\nabla \cdot \mathbf{A})\varphi + \mathbf{A} \cdot (\nabla\phi), \quad (7.65)$$

válida para un vector \mathbf{A} y un escalar φ cualesquiera, podemos reescribir (7.63) en la forma:

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_0^t dt \int_V d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \right) \delta \phi \\ & + \int_0^t dt \int_V d^3x \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \delta \phi \right) \end{aligned} \quad (7.66)$$

El último término de (7.66) es una divergencia y puede transformarse en una integral de superficie usando el teorema de Gauss:

$$\int_V d^3x \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \delta \phi \right) = \int_{\Sigma} d\sigma_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \delta \phi \right) \quad (7.67)$$

y esta última se anula si se imponen *condiciones de contorno* adecuadas al campo $\delta\phi$. Por ejemplo, la *condición de contorno de Dirichlet*:

$$\delta\phi|_{\Sigma} = 0$$

garantiza que este término se anule.

Finalmente, exigiendo que se anule la acción $\delta S = 0$, hallamos las *ecuaciones de Euler-Lagange para un campo*:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} = 0 \quad (7.68)$$

Aplicadas a la cuerda vibrante, la ecuación (7.68) se reduce a la ecuación de movimiento (7.27).

En nuestro análisis del principio de mínima acción, hemos considerado únicamente el caso de un campo escalar. En realidad, no hay ninguna dificultad para aplicarlo a objetos más complicados, como campos vectoriales o cantidades complejas.

7.4.2. Simetrías y leyes de conservación

El teorema de Noether, que conecta simetrías con leyes de conservación en sistemas lagrangeanos, adquiere toda su importancia en sistemas continuos. Esto se debe, fundamentalmente, a que los sistemas continuos tienen una variedad de simetrías mucho más rica que los sistemas de partículas. Como un ejemplo de las simetrías existentes en sistemas continuos, sin contraparte en sistemas discretos,

examinemos la *invarianza de medida*. Sea $\varphi(\mathbf{r}, t)$ un campo escalar complejo, cuya acción se escribe:

$$S_E = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V d^3x \left[\frac{1}{c^2} \dot{\varphi} \dot{\varphi}^* - \nabla \varphi \nabla \varphi^* - \mu^2 \varphi \varphi^* \right] \quad (7.69)$$

Este campo goza de una simetría sin analogía en sistemas de partículas. Si se hace la *transformación global de medida*:

$$\varphi' = e^{i\alpha} \varphi \quad (7.70)$$

la acción queda invariante. Este es un ejemplo muy sencillo de *simetría dinámica* (o también *simetría oculta*) del sistema.

Vamos a demostrar ahora una versión muy general del *teorema de Noether*: si la acción de un sistema continuo es invariante bajo una transformación de simetría, existen cantidades conservadas asociadas a dicha simetría.

Entre las transformaciones de simetría, están aquellas generadas por invarianzas bajo transformaciones de coordenadas y tiempo:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta \boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{r} + \delta \mathbf{V} t + \mathbf{a} = \mathbf{r} + \delta \mathbf{r} \quad (7.71a)$$

$$t' = t + \delta t \quad (7.71b)$$

Una transformación de simetría del campo tendrá una forma más general, que incluye el efecto de las transformaciones geométricas (7.71) y las simetrías internas:

$$\varphi'(\mathbf{r}', t') = \varphi(\mathbf{r}, t) + \Omega \varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi + \delta \varphi \quad (7.72)$$

en donde Ω es un operador que depende del campo y de la transformación. Por ejemplo, en el caso de una traslación de parámetro \mathbf{a} y de una transformación de medida:

$$\varphi'(\mathbf{r} + \mathbf{a}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla \varphi + i\alpha \varphi \quad (7.73a)$$

$$\Omega = \mathbf{a} \cdot \nabla + i\alpha \quad (7.73b)$$

A lo largo de la demostración, los términos de superficie juegan un papel fundamental. Su manejo, sin embargo, es pesado y para aligerarlo, escribamos la acción del campo en la forma:

$$S = \int_{\Delta t} dt \int_V d^3x \mathcal{L} = \int \Theta(\mathbf{r}, t) \mathcal{L} dt d^3x \quad (7.74)$$

en donde la última integral se extiende a todo el espacio. La cantidad $\Theta(\mathbf{r}, t)$ es la *función característica* de la región de integración:

$$\Theta(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 1 & t \in \Delta t \text{ y } \mathbf{r} \in V \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (7.75)$$

En lugar de trabajar con la función característica se puede introducir cualquier función que tienda a cero suavemente en el infinito y en algún lugar conveniente del cálculo hacerla tender a (7.75).

Bajo las transformaciones indicadas, la variación de la acción (7.74) será:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int [\Theta \delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \delta \Theta] dt d^3 x \\ &= \int dt d^3 x \left[\Theta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}} \delta \varphi_{,\mu} \right) + \mathcal{L} \delta x^\mu \Theta_{,\mu} \right]\end{aligned}\quad (7.76)$$

En esta ecuación hemos introducido la notación de Einstein para las derivadas parciales:

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

y las abreviaturas:

$$\delta x_\mu \Theta_{,\mu} = \delta t \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \delta \mathbf{r} \nabla \Theta$$

y similares.

Exijamos ahora que se satisfagan las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}} \delta \varphi_{,\mu} &= \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}} \delta \varphi_{,\mu} \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}} \delta \varphi \right)\end{aligned}\quad (7.77)$$

Integrando por partes el último término de (7.76), encontramos para la variación de la acción:

$$\delta S = \int dt d^3 x \Theta \partial_\mu \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}} \right) \delta \varphi - \mathcal{L} \delta x_\mu \right]\quad (7.78)$$

Ahora bien, si hay una simetría la variación δS debe anularse cualquiera sea la región de integración y por lo tanto:

$$\partial_\mu \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}} \right) \delta \varphi - \mathcal{L} \delta x_\mu \right] = 0\quad (7.79)$$

La cantidad entre corchetes se llama una *tetracorriente conservada*⁵ y las

⁵El lector habrá adivinado, a estas horas, que el autor está haciendo trampa: La notación tetradimensional que estamos usando es aquí un recurso auxiliar para simplificar la demostración. El teorema de Noether adquiere toda su simplicidad y generalidad en un contexto relativista, donde la notación adquiere el valor de álgebra tensorial en el espacio de Minkowski.

cantidades “temporal” y “espacial”:

$$\rho_Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi - \mathcal{L} \delta t \quad (7.80a)$$

$$\mathbf{j}_Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \varphi} \delta \varphi - \mathcal{L} \delta \mathbf{r} \quad (7.80b)$$

se llaman la *densidad de carga* y *densidad de corriente* conservadas⁶. Con ellas, la ley de conservación toma la forma:

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_Q = 0 \quad (7.81)$$

Para demostrar que (7.81) representa una ley de conservación, integremos miembro a miembro dicha ecuación:

$$\int_V d^3x \frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{j}_Q = 0$$

e introduzcamos la *carga conservada*:

$$Q = \int_V d^3x \rho_Q \quad (7.82)$$

En el segundo miembro apliquemos el teorema de Gauss:

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{j}_Q = \int_{\Sigma} d\sigma \cdot \mathbf{j}_Q = J_Q \quad (7.83)$$

en donde J_Q es el *flujo de Q* a través de la superficie Σ de V . Así obtenemos la forma integral de la ley de conservación:

$$\frac{dQ}{dt} = -J_Q \quad (7.84)$$

Examinemos algunos ejemplos importantes de leyes de conservación:

Energía: La invarianza bajo traslaciones temporales proporciona la ley de conservación de la energía. La densidad conservada es, en este caso la densidad de energía:

$$e = \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} \quad (7.85)$$

⁶Estas cantidades contienen el parámetro infinitesimal del grupo de Lie. Las densidades finitas lo eliminan.

Impulso: La invarianza bajo traslaciones infinitesimales proporciona la cantidad:

$$\mathbb{T} \cdot \mathbf{a} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \varphi} \times \nabla \varphi - \mathbb{I} \mathcal{L} \right] \cdot \mathbf{a} \quad (7.86a)$$

en donde \mathbb{T} se llama el *tensor de impulso* del sistema. Las correspondientes densidades de carga conservadas están dadas por:

$$\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \nabla \varphi \cdot \mathbf{a} \quad (7.86b)$$

Carga eléctrica: La invarianza bajo transformaciones de medida proporciona las cantidades conservadas:

$$\rho_Q = \varphi^* \varphi \quad (7.87a)$$

$$\mathbf{j}_Q = i(\varphi \nabla \varphi^* - \varphi^* \nabla \varphi) \quad (7.87b)$$

que son proporcionales a las densidades de carga y de corriente eléctrica. La similitud de esta cantidad con la corriente de probabilidad de la ecuación de Schrödinger no es una coincidencia: ambas tienen el mismo origen.

Problemas 7.4

Problema 7.4.1.

Hallar el lagrangeano para la ecuación de la onda en tres dimensiones.

Problema 7.4.2.

Deducir las ecuaciones de Euler para un fluido ideal incompresible:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

en donde \mathbf{v} es la velocidad de un elemento del fluido, ρ su densidad constante y p la presión. La condición de incompresibilidad actúa como un vínculo holonomo sobre las variaciones:

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

¿Qué significado tiene el multiplicador de Lagrange?

Problema 7.4.3.

Determinar las corrientes de impulso y energía para la cuerda vibrante.

Problema 7.4.4.

Sea e la densidad de energía y j_e la correspondiente densidad de corriente. Se denomina *velocidad de transporte de energía* a la cantidad:

$$v_e = \frac{j_e}{e} \quad (7.88)$$

Probar que coincide, en condiciones adecuadas, con la velocidad de grupo.

7.5. Cuerdas inhomogéneas

El formalismo lagrangeano permite planear con sencillez algunos problemas bastante complicados. En esta sección, como ejemplo de su uso, vamos a examinar el comportamiento de cuerdas con tensión y densidad variables.

7.5.1. Tensión y densidad variables

Como ejemplo de la aplicación del método lagrangeano a sistemas continuos, examinemos el caso de cuerdas con tensión o densidad variables. En ese caso, la densidad lagrangeana de la cuerda tomará la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\mu(x, t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - T(x, t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (7.89)$$

en donde hemos eliminado las referencias a las otras coordenadas. La ecuación de movimiento que se obtiene de este lagrangeano es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (7.90)$$

y es, obviamente, mucho más complicada que la ecuación de las ondas (7.50). La ecuación puede simplificarse en el caso en que los parámetros no dependen del tiempo:

$$\mu(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (7.91)$$

cuya solución puede buscarse con la sustitución de d'Alembert y el principio de supersosición. La ecuación espacial conduce, por lo general, a funciones especiales.

Pueden hallarse, sin embargo, soluciones en términos de funciones elementales cuando la densidad de la cuerda es seccionalmente constante; es decir, cuando está formada por trozos de distintas cuerdas pegados entre sí. Por ejemplo, cuando hay dos cuerdas unidas en el origen:

$$\mu(x) = \mu_0 \Theta(-x) + \mu_1 \Theta(x) \quad (7.92)$$

Integrando la ecuación de movimiento en el entorno de $x = 0$, hallamos la *condición de unión* en el origen:

$$\left. \frac{\partial u(x - \epsilon, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u(x + \epsilon, t)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (7.93a)$$

que unida a la condición de continuidad:

$$u(-\epsilon, t) = u(\epsilon, t) \quad (7.93b)$$

permiten hallar la solución general del problema como la unión de soluciones seccionales.

Otro caso particular interesante es el de la *cuerda cargada*: una cuerda en la que hay masas insertadas a la misma. El problema se reduce al de una cuerda con densidad inhomogénea de la forma:

$$\mu(x) = \mu_0 + \sum_i m_i \delta(x - x_i)$$

Supongamos, por sencillez, que la cuerda está cargada 'solo en el origen con una partícula de masa M . La ecuación de movimiento toma la forma:

$$[\mu_0 + M\delta(x)] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Integrando en el entorno del origen, hallamos la "condición de unión" entre los dos segmentos de cuerda:

$$M \frac{d^2 u(0, t)}{dt^2} = T \left[\left(\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \right)_- - \left(\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \right)_+ \right] \quad (7.94a)$$

que junto con la condición de continuidad:

$$u(-\epsilon, t) = u(\epsilon, t) \quad (7.94b)$$

desciben completamente el problema.

7.5.2. Los modos normales

Examinemos en general los modos normales de oscilación de una cuerda inhomogénea. Realizando una sustitución de d'Alembert, hallamos la *ecuación espacial de la cuerda inhomogénea*:

$$\frac{d}{dx} \left[T(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + \omega^2 \rho(x) u(x) = 0 \quad (7.95)$$

Las soluciones de esta ecuación, con las condiciones de contorno adecuadas, son los modos normales de la cuerda inhomogénea. Mostraremos que, en condiciones muy generales, las soluciones de (7.95) satisfacen relaciones de ortogonalidad. Para hacerlo, consideremos dos soluciones de la ecuación, u_1 y u_2 , que satisfacen condiciones de contorno adecuadas en los extremos de la cuerda a y b , con distintas frecuencias propias ω_1 y ω_2 :

$$\frac{d}{dx} \left[T(x) \frac{du_1(x)}{dx} \right] + \omega_1^2 \rho(x) u_1(x) = 0 \quad (7.96a)$$

$$\frac{d}{dx} \left[T(x) \frac{du_2(x)}{dx} \right] + \omega_2^2 \rho(x) u_2(x) = 0 \quad (7.96b)$$

Multipliquemos la primera de las ecuaciones (7.96) por $u_2(x)$, la segunda por $u_1(x)$ y restemos:

$$u_2(x) \frac{d}{dx} \left[T(x) \frac{du_1(x)}{dx} \right] - u_1(x) \frac{d}{dx} \left[T(x) \frac{du_2(x)}{dx} \right] = (\omega_2^2 - \omega_1^2) \rho(x) u_1(x) u_2(x) \quad (7.97)$$

El primer miembro de esta ecuación puede escribirse:

$$u_2(x) \frac{d}{dx} \left[T(x) \frac{du_1(x)}{dx} \right] - u_1(x) \frac{d}{dx} \left[T(x) \frac{du_2(x)}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[u_2(x) T(x) \frac{du_1(x)}{dx} - u_1(x) T(x) \frac{du_2(x)}{dx} \right]$$

Sustituyendo en (7.97) e integrando hallamos:

$$\left[u_2(x) T(x) \frac{du_1(x)}{dx} - u_1(x) T(x) \frac{du_2(x)}{dx} \right]_a^b = (\omega_2^2 - \omega_1^2) \int_a^b \rho(x) u_1(x) u_2(x) dx \quad (7.98)$$

Ahora bien, si las condiciones de contorno en los extremos de la cuerda son adecuadas, el primer miembro se anula idénticamente. Ejemplos de estas condiciones de contorno son:

$$u(a) = 0 \quad \text{Extremos sujetos} \quad (7.99a)$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_a = 0 \quad \text{Extremos libres} \quad (7.99b)$$

Hallamos así la *condición de ortogonalidad*:

$$\int_a^b \rho(x) u_1(x) u_2(x) dx = 0$$

Los modos propios de oscilación de una cuerda inhomogénea son ortogonales con respecto de la función de masa $\rho(x)$. Si normalizamos adecuadamente los modos normales, hallamos:

$$\int_a^b \rho(x) u_\alpha(x) u_\beta(x) dx = \delta_{\alpha\beta} \quad (7.100)$$

que generaliza la condición (6.23) para sistemas de partículas.

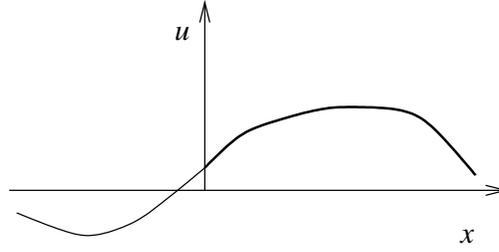


Figura 7.10: Dos cuerdas unidas en el origen

7.5.3. Reflexión y transmisión de ondas

Propongámonos estudiar el siguiente problema: a lo largo de un par de cuerdas unidas en el origen, con densidad (7.92), viaja inicialmente una perturbación desde $x = -\infty$ hacia la derecha. Cuando la perturbación llegue al origen, una parte $\mathbb{T}E_0$ de la energía será transmitida a la segunda cuerda y la otra $\mathbb{R}E_0 = (1 - \mathbb{T})E_0$ será reflejada. Se trata de hallar los coeficientes de reflexión \mathbb{R} y de transmisión \mathbb{T} del sistema.

Bastará con estudiar ondas monocromáticas. Sean:

$$u_I = A_I e^{i(k_0 x - \omega t)} \quad (7.101a)$$

$$u_R = A_R e^{-i(k_0 x + \omega t)} \quad (7.101b)$$

$$u_T = A_T e^{i(k_1 x - \omega t)} \quad (7.101c)$$

que se llaman las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente. En estas ecuaciones:

$$k_0 = \omega \sqrt{\frac{\mu_0}{T}} = \frac{\omega}{v_0} \quad (7.102a)$$

$$k_1 = \omega \sqrt{\frac{\mu_1}{T}} = \frac{\omega}{v_1} \quad (7.102b)$$

Las ondas monocromáticas (7.101) deben satisfacer las condiciones de unión (7.93) y esto conduce a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} A_I + A_R &= A_T \\ k_0 (A_I - A_R) &= k_1 A_T \end{aligned}$$

que permiten determinar las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida en función de la amplitud incidente:

$$A_T = \frac{2k_0}{k_0 + k_1} A_I \quad (7.103a)$$

$$A_R = \frac{k_0 - k_1}{k_0 + k_1} A_I \quad (7.103b)$$

Las soluciones seccionales que hemos hallado son modos normales de la cuerda compuesta, con las condición de contorno “onda incidente desde la izquierda” u “onda saliente hacia la derecha”. Cualquier solución más complicada con las mismas condiciones de contorno puede hallarse como supersposición de los mismos.

Para estudiar la distribución de energía, definimos la densidad de energía de la cuerda en la forma:

$$e(x, t) = \frac{1}{2} \left[\mu(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (7.104)$$

La energía promediada en el tiempo de una onda monocromática resulta ser:

$$e = T |A|^2 k^2$$

Definimos los coeficientes de transmisión y reflexión en la forma:

$$R = \frac{e_R}{e_I} = \frac{|A_R|}{|A_I|} \quad (7.105a)$$

$$T = \frac{e_T}{e_I} = \frac{k_1^2 |A_T|}{k_0^2 |A_I|} \quad (7.105b)$$

y obtenemos para nuestro caso:

$$R = \frac{(k_0 - k_1)^2}{(k_0 + k_1)^2} = \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_0}}\right)^2}{\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_0}}\right)^2} \quad (7.106a)$$

$$T = \frac{4k_0k_1}{(k_0 + k_1)^2} = \frac{4\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_0}}}{\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_0}}\right)^2} \quad (7.106b)$$

Los coeficientes R y T dependen únicamente del cociente de densidades de ambas cuerdas Examinemos dos casos particulares:

1. Si la segunda cuerda tiene densidad infinita, se comportará como un soporte rígido; $k_1 \rightarrow \infty$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} T &= 0 & R &= 1 \\ A_T &= 0 & A_R &= -A_I \end{aligned}$$

que es el caso de reflexión que ya estudiamos.

2. Si la segunda cuerda no existe, $\mu_1 = 0, k_1 = 0$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} T &= 0 & R &= 1 \\ A_T &= 0 & A_R &= A_I \end{aligned}$$

que son las condiciones de contorno para una cuerda con un extremo libre.

La Figura 7.11 muestra el coeficiente de transmisión en función de $x = \mu_1/\mu_0$

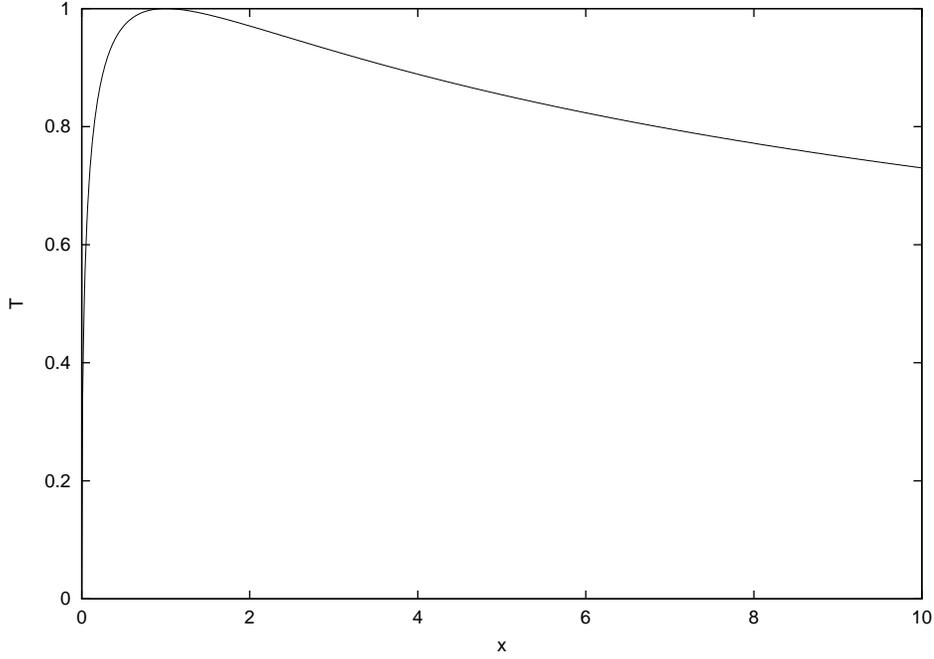


Figura 7.11: Coeficiente de transmisión T en función de $x = \mu_1/\mu_0$.

7.5.4. Resonancia

Como un segundo problema interesante en una cuerda inhomogénea, consideremos una cuerda infinita cargada en el origen con una masa M , unida a un resorte de constante de restitución K Figura 7.12. El sistema debe satisfacer la ecuación de la cuerda vibrante fuera del origen, con las condiciones de unión:

$$u(-\epsilon, t) = u(\epsilon, t) \quad (7.107a)$$

$$M \frac{d^2 u(0, t)}{dt^2} + K u(0, t) = T \left[\frac{\partial u(\epsilon, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(\epsilon, t)}{\partial x} \right] \quad (7.107b)$$

Determinemos, en primer lugar, los coeficientes de reflexión y transmisión del sistema. Las ondas incidente, reflejada y transmitida (7.101) deben satisfacer las condiciones de unión (7.107). Sustituyendo, hallamos:

$$A_I + A_R = A_T \quad (7.108a)$$

$$M(\omega_0^2 - \omega^2)A_T = -i\lambda\omega(A_I - A_R - A_T) \quad (7.108b)$$

en donde hemos introducido las abreviaturas:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{M} \quad (7.109a)$$

$$\lambda = \frac{\mu}{M}v \quad (7.109b)$$

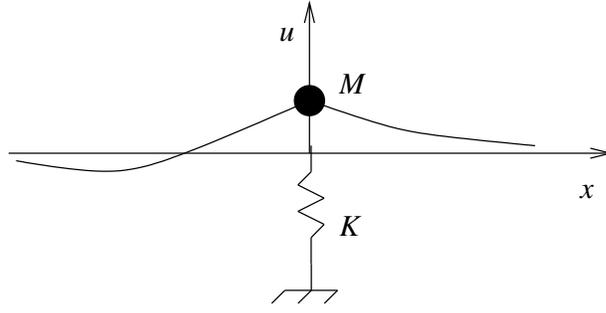


Figura 7.12: Cuerda cargada con un oscilador armónico

De estas ecuaciones deducimos fácilmente:

$$A_T = \frac{2i\lambda\omega}{\omega^2 + 2i\lambda\omega - \omega_0^2} \quad (7.110a)$$

$$A_R = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2 + 2i\lambda\omega - \omega_0^2} \quad (7.110b)$$

Estas amplitudes son complejas e introducen factores de fase en las ondas transmitidas y reflejadas. Los coeficientes de transmisión y reflexión, por otra parte, son los módulos cuadrados de las amplitudes:

$$R = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2} \quad (7.111a)$$

$$T = \frac{4\lambda^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2} \quad (7.111b)$$

Cuando la frecuencia de la onda incidente coincide con la del oscilador, el sistema entra en resonancia: toda la energía incidente es transmitida y el oscilador se halla en fase con la onda incidente. Fuera de la resonancia, en cambio, la mayor parte de la energía se refleja (Figura 7.13).

Las figuras muestran un gran parecido al comportamiento de la amplitud estacionaria de un oscilador forzado con disipación, aunque el sistema presente es lagrangeano. De hecho, es fácil ver que la cuerda proporciona un mecanismo de disipación para el oscilador. En efecto, consideremos otra vez el sistema, pero con la *condición de onda saliente* $A_I = 0$. En este caso, la primera ecuación (7.108) es trivial, mientras que la segunda proporciona una ecuación para determinar la frecuencia de la sustitución de d'Alembert:

$$\omega^2 + 2i\lambda\omega - \omega_0^2 = 0 \quad (7.112)$$

que corresponde a la frecuencia propia del oscilador atado a la cuerda. Las soluciones de esta ecuación son complejas, con parte imaginaria $i\lambda$ y representan el

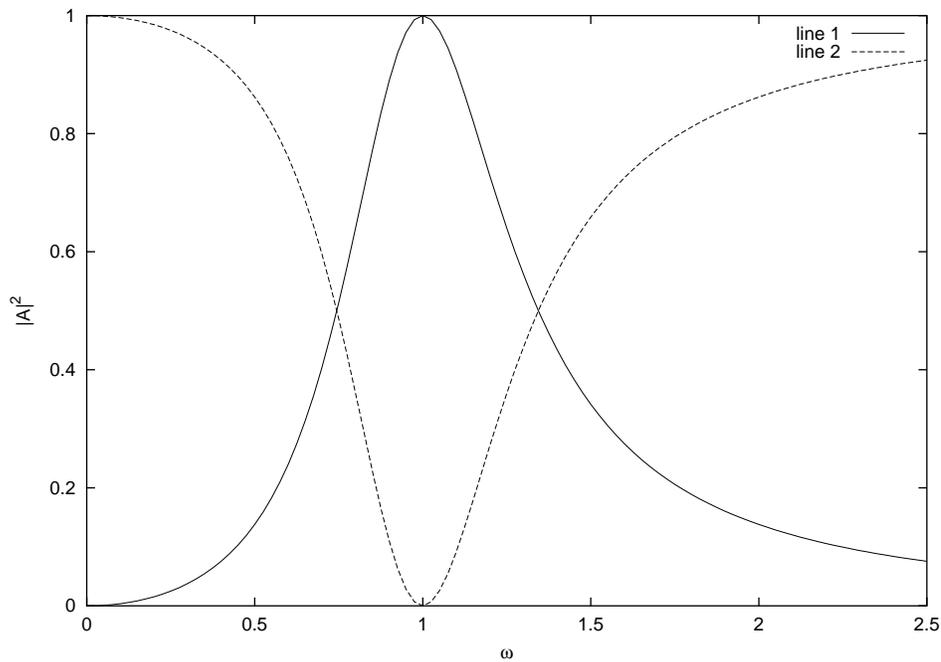


Figura 7.13: Coeficientes de transmisión y reflexión para una cuerda cargada con un oscilador

amortiguamiento del oscilador por emisión de ondas salientes en la cuerda. De esta manera, el problema estudiado en esta sección constituye un modelo sencillo del mecanismo de disipación.

Problemas 7.5

Problema 7.5.1 (Cuerda colgada).

Una cuerda uniforme de longitud L cuelga del techo bajo la acción de su propio peso.

1. Hallar la tensión en cualquier punto de la cuerda.
2. Hallar la ecuación de movimiento de la cuerda y separar variables con una sustitución de d'Alembert.
3. Determinar las condiciones de contorno en los extremos.
4. Mediante un cambio de variables adecuado reducir la ecuación diferencial en x a la de Bessel de orden cero:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0$$

5. Determinar los primeros modos de oscilación de la cuerda.

Problema 7.5.2.

Un extremo de una cuerda uniforme de longitud L está unida a una barra vertical que gira con velocidad angular Ω_0 . Se desprecia el efecto de la gravedad sobre la cuerda.

1. Proceder como en el Problema 7.5.1 para determinar la ecuación diferencial de la cuerda y sus condiciones de contorno.
2. Mediante un cambio de variables adecuado reducirla a la ecuación de Legendre:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \nu(\nu + 1)y = 0$$

3. Determinar el parámetro ν de modo que la solución satisfaga las condiciones de contorno.

Problema 7.5.3.

Una cuerda sometida a una tensión uniforme T y con densidad variable $\rho = \rho_0 \frac{a^2}{x^2}$ está tendida entre los puntos a y b , fija a los mismos.

1. Hallar la ecuación diferencial espacial para la cuerda.
2. Usar la sustitución $u = x^\alpha$ para resolverla.
3. Hallar los primeros modos normales de oscilación y sus correspondientes frecuencias.

Problema 7.5.4.

Una cuerda uniforme de longitud L , atada en sus extremos, se carga con una masa M en el punto medio. Determinar las frecuencias propias de oscilación de la cuerda.

Problema 7.5.5.

Un segmento de cuerda de longitud L y densidad μ se encuentra atado en sus extremos a sendas cuerdas semiinfinitas de densidad μ_0 ; todo sometido a una tensión T . Hallar los coeficientes de transmisión y reflexión del sistema.

Problema 7.5.6.

Una cuerda infinita está cargada con una masa M situada en el origen. Hallar los coeficientes de transmisión y reflexión del sistema.

Problema 7.5.7.

En el Problema 7.5.6, la masa M se une a un resorte de coeficiente de restitución k . Hallar los coeficientes de reflexión y transmisión del sistema.

Problema 7.5.8.

La masa del Problema 7.5.7 se aparta inicialmente de su posición de equilibrio, con la cuerda en reposo. Probar que el movimiento del resorte se amortigua exponencialmente con el tiempo.

Capítulo 8

La formulación hamiltoniana

La formulación lagrangeana de la mecánica (Capítulo 4) posee la importante propiedad de ser covariante bajo transformaciones generales de coordenadas: las ecuaciones de Lagrange conservan su forma bajo dichas transformaciones. El uso de coordenadas generalizadas q_i la pone de manifiesto en forma explícita. Sin embargo, esta generalidad no es suficiente para muchas aplicaciones: la imposibilidad de interpretar geoméricamente la transformación lineal que resuelve el problema de oscilaciones alrededor de un movimiento estacionario (Sección 6.3) es un síntoma.

Los impulsos generalizados desempeñan un papel importante en la Mecánica: para cada simetría de un sistema mecánico existe un impulso generalizado que se conserva. Estas leyes de conservación, a su vez, simplifican la formulación de problemas mecánicos. Este importante papel de los impulsos, junto con la conveniencia de generalizar las transformaciones generales de coordenadas, sugieren una formulación que trate coordenadas e impulsos en forma equivalente: la *formulación hamiltoniana*.

8.1. Las ecuaciones de Hamilton

El desarrollo de ecuaciones de movimiento simétricas en coordenadas e impulsos generalizados, exige la introducción de algunas herramientas matemáticas particulares: las transformaciones de Legendre y el espacio de las fases.

8.1.1. Transformaciones de Legendre

Las velocidades generalizadas \dot{q}_i y los impulsos generalizados p_i forman un conjunto redundante de variables y es necesario eliminar unas en función de las otras. Para hacerlo, examinemos la interpretación geométrica de los impulsos generalizados.

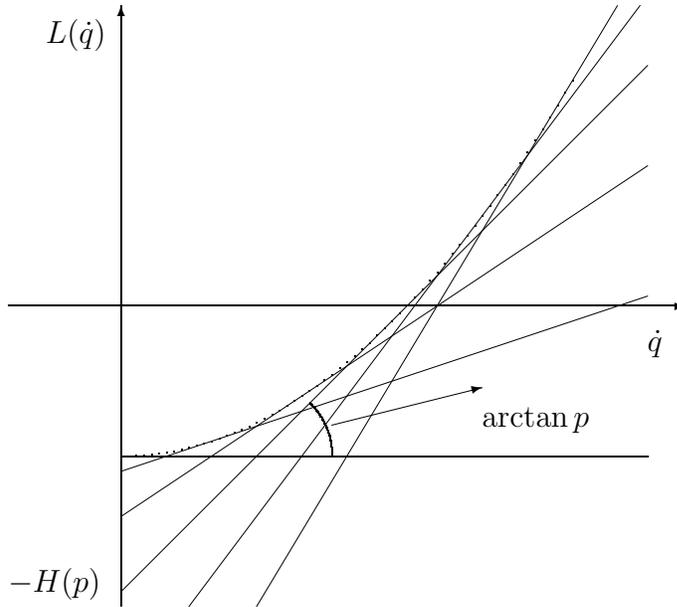


Figura 8.1: Esquema de la transformación de Legendre en 1 dimensión

Examinemos primero el caso de un grado de libertad. Como (Sección 4.2.3) los impulsos generalizados se definen por la ecuación (4.52):

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

el impulso generalizado es la pendiente del lagrangeano como función de la velocidad generalizada \dot{q} (Figura 8.1). La recta tangente a la curva en un punto $\langle \dot{q}_0, L(\dot{q}_0) \rangle$ tiene la ecuación:

$$L - L(\dot{q}_0) = p(\dot{q} - \dot{q}_0)$$

y por lo tanto, la ordenada al origen de la recta tangente no es otra cosa que menos el hamiltoniano:

$$H(p) = p\dot{q}_0 - L(\dot{q}_0) \quad (8.1)$$

La idea de la formulación hamiltoniana es describir la curva $\langle \dot{q}, L(\dot{q}) \rangle$ como la envolvente de un haz de rectas tangentes a la misma, y este haz queda completamente determinado si se conoce la ordenada al origen $-H(p)$ para cada p . Es fácil probar, en este caso, que el hamiltoniano es sólo función de p :

$$dH = dp \dot{q} + p d\dot{q} - \frac{dL}{d\dot{q}} d\dot{q} = \dot{q} dp$$

La sencilla transformación que acabamos de analizar es un ejemplo de una *transformación de Legendre*. Dada una función de n variables x_i , $f(x_1, \dots, x_n)$,

definimos las *variables conjugadas* como:

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (8.2)$$

La función:

$$F(X_1, \dots, X_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^n X_i x_i \quad (8.3)$$

es la *transformada de Legendre* de f y se demuestra con sencillez que es sólo función de las variables conjugadas. En realidad, no es necesario transformar todas las variables: la transformación de Legendre

$$G(X_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - X_1 x_1$$

construye una nueva función que reemplaza a la variable x_1 por la X_1 .

Es interesante estudiar el significado geométrico de la transformación de Legendre. El hiperplano tangente a la función $f(x_1, \dots, x_n)$ en el punto $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ está definido por la ecuación

$$\sum_{i=1}^n \Xi_i \xi_i = \xi_{n+1} \quad (8.4a)$$

en donde

$$\xi_i = (x_i - x_i^{(0)}) \quad \Xi_i = f_{,i}(x_j^{(0)}) \quad (8.4b)$$

Es un espacio vectorial de dimensión n , que se llama el *espacio tangente* E_T a la función.

Las cantidades Ξ_i , en general, se llaman las *coordenadas plückerianas* del hiperplano tangente¹. El conjunto de las coordenadas plückerianas forman otro espacio vectorial de la misma dimensión, llamado el *espacio dual* E_T^* . Obviamente, E_T^* es el espacio de todas las funcionales lineales, que a cada vector de E_T le asignan un número real y cualquier funcional lineal puede escribirse como un producto escalar. El vector (más precisamente, el *covector*) Ξ pertenece al espacio dual del espacio tangente que recibe (¡obviamente!) el nombre de *espacio cotangente*. La transformación de Legendre, en fin, reemplaza las coordenadas x_i de la función por las coordenadas del espacio cotangente.

Las transformaciones de Legendre juegan un papel importante no sólo en mecánica sino también en termostática. Por ejemplo, la definición de la entalpía libre de una sustancia:

$$F(V, T) = U(V, S) - TS + pV$$

es una transformación de Legendre entre el espacio (V, S) de magnitudes extensivas y el cotangente (p, T) de magnitudes intensivas.

¹Estrictamente, las Ξ son proporcionales a las coordenadas plückerianas, ya que éstas se definen normalizando el término independiente de la ecuación (8.4) a la unidad

8.1.2. Ecuaciones de Hamilton

Examinemos la estructura del hamiltoniano de algún sistema dinámico:

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (8.5)$$

Esta expresión es, a menos de un signo, una transformación de Legendre que conecta el espacio de configuración tangente con el correspondiente espacio co-tangente. Diferenciando (8.5):

$$dH = \sum_i \left(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \right)$$

Si ahora usamos la definición de impulso generalizado (4.52) y las ecuaciones de Lagrange, la expresión anterior se transforma en:

$$dH = \sum_{i=1}^f (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (8.6)$$

que prueba que H es realmente función de (q, p) .

Como por otra parte debe cumplirse:

$$dH = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (8.7)$$

deducimos comparando (8.7) con (8.6) las *ecuaciones de Hamilton* o también *ecuaciones canónicas*:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (8.8a)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (8.8b)$$

que son un conjunto de $2f$ ecuaciones diferenciales de primer orden, con $2f$ incógnitas $q_i(t)$ y $p_i(t)$. Las variables conjugadas en las ecuaciones (8.8) se llaman *conjugadas canónicas*.

También deducimos que:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (8.9)$$

y esta ecuación está conectada con la conservación de la energía. En efecto, la variación temporal del hamiltoniano puede hallarse de (8.7) insertando (8.8):

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (8.10)$$

y si el lagrangeano no depende explícitamente del tiempo, esta ecuación implica la conservación de la energía.

Es posible deducir las ecuaciones de Hamilton del principio de mínima acción. Para ello, sustituyamos el lagrangeano L por su expresión:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) dt \quad (8.11)$$

Para llevar a cabo la variación, exigiremos que la trayectoria pase por los puntos inicial y final, lo que implica las condiciones de contorno:

$$\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$$

pero no se impone ninguna condición sobre los impulsos. Aplicando las variaciones hallamos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left[\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right]$$

Integrando por partes el segundo término hallamos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left[\delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right] \quad (8.12)$$

y como las variaciones δp_i y δq_i son independientes, hallamos otra vez (8.8).

Es posible escribir las ecuaciones canónicas en forma muy compacta si se cambia ligeramente la notación. Introduzcamos el *vector de estado* ξ , de dimensión $2f$, con componentes:

$$\begin{aligned} \xi_k &= q_k & k &= 1, \dots, f \\ \xi_k &= p_{k-f} & k &= f+1, \dots, 2f \end{aligned} \quad (8.13)$$

y la matriz fundamental \mathbb{J} , con elementos:

$$\mathbb{J}_{ij} = \delta_{i+f,j} - \delta_{i,j+f} = \begin{cases} 1 & i+f=j \\ -1 & i=j+f \\ 0 & \text{los demás} \end{cases} \quad (8.14)$$

Las ecuaciones canónicas toman la forma muy compacta:

$$\dot{\xi} = \mathbb{J} \frac{\partial H}{\partial \xi} \quad (8.15)$$

Esta elegante formulación adquirirá relevancia en la geometría del espacio de las fases.

De nuestra deducción se deduce que las ecuaciones de Hamilton son equivalentes a las ecuaciones de Lagrange. Sin embargo, esta afirmación debe tomarse

con algo de sal. Las ecuaciones de Hamilton (8.8) requieren que el hamiltoniano esté expresado explícitamente en función de los impulsos generalizados p_i . Esto requiere que las ecuaciones

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad (8.16)$$

puedan invertirse para expresar las velocidades generalizadas \dot{q}_i como función de los impulsos. Por el teorema de la función implícita, la condición para que esto sea posible es que la matriz jacobiana:

$$J_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (8.17)$$

sea invertible. Cuando el determinante de la matriz jacobiana se anula, el lagrangiano se llama *singular* y como los impulsos no son funcionalmente independientes, existen vínculos entre coordenadas e impulsos de la forma:

$$f_\alpha(q, p) = 0$$

En estos casos, es posible desarrollar la teoría hamiltoniana, a costa de un esfuerzo considerable. Sin embargo, este esfuerzo es necesario pues la mecánica hamiltoniana es análoga a la mecánica cuántica (Véase Sección 8.5).

8.1.3. El espacio de las fases

Las ecuaciones (8.15) sugieren una interpretación geométrica muy interesante: el punto representativo del sistema dinámico, descrito por el vector ξ se mueve en un espacio de $2f$ dimensiones, cuyos puntos representan sus posibles estados. Este espacio se llama el *espacio de fases* del sistema, y generaliza la noción del espacio de estados que se introdujo en la Sección 2.3.

Consideremos, por ejemplo, el espacio de las fases para un oscilador armónico, con hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (8.18)$$

Este espacio es, naturalmente, bidimensional. La conservación de la energía restringe la trayectoria del sistema a la *superficie de energía*:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

que es una elipse de semiejes (Figura 8.2):

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad b = \sqrt{2mE}$$

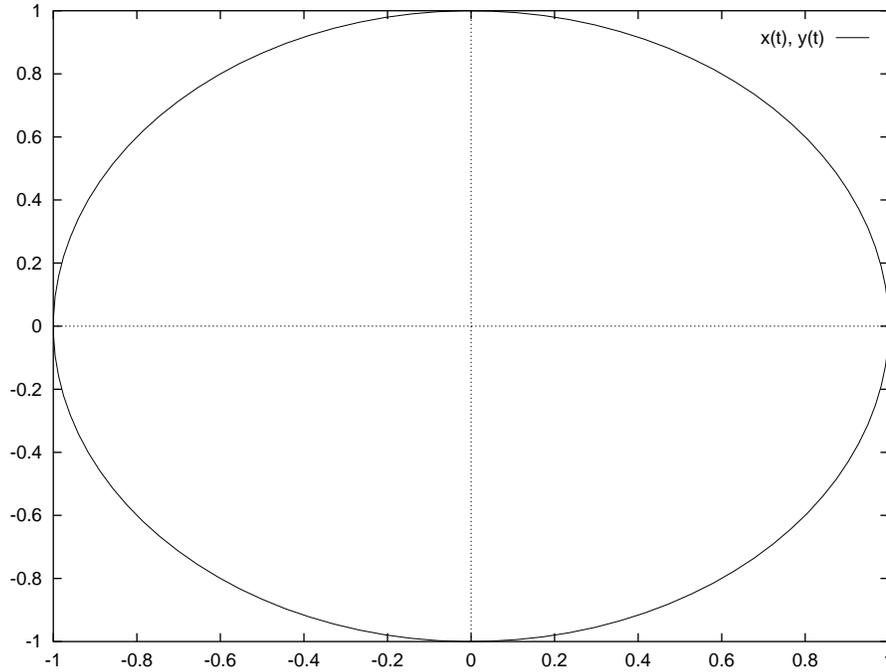


Figura 8.2: Espacio de fases de un oscilador armónico. El plano X, P es el espacio de fase mientras que la elipse representa la superficie de energía

El punto representativo del sistema se mueve con velocidad angular constante sobre la trayectoria:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$p = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \phi)$$

y de este modo hemos hallado una descripción puramente geométrica del movimiento.

Consideraciones análogas vanen para el movimiento unidimensional en general: la ley de conservación de la energía determina la trayectoria física, que será una curva cerrada si el movimiento es finito o abierta si no está acotado.

En general, para cualquier sistema hamiltoniano, la ley de conservación (8.10) restringe el movimiento del punto físico a la hipersuperficie:

$$H(q, p) = E$$

Otras leyes de conservación, tal como la del impulso angular, introducen restricciones adicionales, que pueden ayudar a visualizar el comportamiento del sistema. Por ejemplo, el espacio de las fases del movimiento central en el plano es tetradiimensional (p_r, L, r, ϕ) , pero la ley de conservación del impulso angular fuerza al

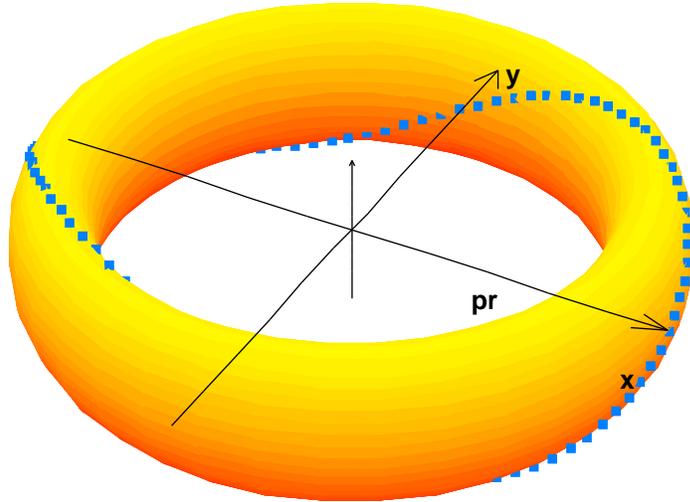


Figura 8.3: Espacio de fases reducido para el movimiento central. El movimiento se realiza sobre un toro correspondiente a la superficie de energía.

sistema a moverse en una variedad tridimensional $L = \text{Cte}$. Más aún, la conservación de la energía restringe el movimiento a la superficie bidimensional $H = E$, en donde:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (8.19)$$

Como ϕ es una variable cíclica, esta superficie es un toro centrado en el origen (Figura 8.3).

La trayectoria de un punto físico yace sobre esta superficie. Si la partícula está ligada, la trayectoria física es una hélice que se enrosca en el toro. Veremos más adelante, que este resultado se generaliza a sistemas integrables.

Esta representación geométrica tiene varias ventajas: propiedades generales del movimiento se traducen en propiedades geométricas de la trayectoria física. En particular, la trayectoria de un sistema en el espacio de las fases no puede cortarse a sí misma. En efecto, cada punto del espacio de las fases representa completamente el estado del sistema y determina una única trayectoria posterior. La trayectoria, pues, no puede cortarse a sí misma, aunque puede arrollarse en forma muy compacta.

8.1.4. Mapas

La representación visual del espacio de las fases cuando no existe una ley de conservación es mucho más compleja. Una posibilidad es proyectar el espacio tetradimensional sobre distintos planos tridimensionales. Otra posibilidad, mucho

más interesante, es utilizar *mapas* para obtener “fotografías” del movimiento en instantes seleccionados. El mapa estroboscópico, que ya hemos visto en la Sección 2.5.1, es una de las posibilidades. De hecho, las figuras 2.14 y 2.15 muestran imágenes del espacio de las fases de sistemas hamiltonianos unidimensionales conservativo y forzados respectivamente.

Es posible generalizar la idea del mapa estroboscópico (Sección 2.5.1) a los sistemas hamiltonianos. Esta generalización, que proporciona una descripción precisa del sistema, se conoce como el *mapa de Poincaré*.

Consideremos el movimiento de un sistema con $f = 2$. Elijamos un acontecimiento particular: por ejemplo, que la coordenada $q_1 = 0$, cuando $\text{sg } p_1 > 0$. En estas condiciones, los valores de p_2 y q_2 determinan un punto en el plano (q_2, p_2) que representa completamente el estado del sistema. En efecto, con la elección arbitraria:

$$\begin{aligned} q_1 &= 0 \\ \text{sg } p_1 &> 0 \\ H(p_1, 0, p_2, q_2) &= E \end{aligned}$$

De esta última ecuación se puede despejar un valor único valor de p_1 , usando la condición sobre su signo. De este modo, hemos comprobado que el mapa de Poincaré representa “fotografías” completas del estado del sistema a intervalos irregulares Δt_i .

Se presentan tres casos interesantes:

1. El punto se repite al cabo de un intervalo T : en este caso, se trata de una *órbita periódica* de periodo T .
2. Las posiciones sucesivas del punto llenan poco a poco una curva cerrada. En ese caso, se trata de una *órbita cuasiperiódica* y la curva es la sección de un toro por el plano (q_1, p_1) .
3. Las posiciones sucesivas del punto llenan un área más o menos difusa del plano (q_2, p_2) . Se trata de una *órbita caótica* que cruza repetidamente el plano.

Problemas 8.1

Problema 8.1.1.

Hallar el hamiltoniano de los siguientes sistemas de un grado de libertad:

1. El oscilador anarmónico.
2. El péndulo simple.
3. El péndulo cicloidal.

Problema 8.1.2.

Hallar el hamiltoniano de los siguientes sistemas con dos grados de libertad:

1. El péndulo doble.
2. El péndulo esférico.

Problema 8.1.3.

Hallar el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton para:

1. Partícula en un campo central.
2. Trompo simétrico.

Problema 8.1.4.

Discutir el retrato de fases de los siguientes sistemas:

1. Péndulo simple.
2. Partícula en el potencial

$$V = -\frac{V_0}{\cosh^2 ax}$$

3. Partícula en un potencial de doble mínimo:

$$V = V_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2$$

Problema 8.1.5.

Discutir el espacio de fases de los siguientes sistemas con leyes de conservación:

1. El péndulo doble.
2. El trompo simétrico.

8.2. Transformaciones canónicas

Las ecuaciones de Lagrange (Sección 4.2) son covariantes bajo transformaciones generales de coordenadas y en esa propiedad radica gran parte de su valor conceptual: las ecuaciones describen las leyes de la mecánica independientemente de la forma de representar el marco de referencia. Una propiedad análoga vale para las ecuaciones de Hamilton (8.8): son covariantes bajo un conjunto de transformaciones muy general del espacio de las fases: las *transformaciones canónicas*.

8.2.1. La función generatriz

Definiremos las transformaciones canónicas como el conjunto de cambios de coordenadas en el espacio de las fases:

$$Q_i = Q_i(q, p, t) \quad (8.20a)$$

$$P_i = P_i(q, p, t) \quad (8.20b)$$

tales que dejan covariantes a las ecuaciones de Hamilton (8.8). Con más precisión, de (8.20) debemos obtener:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad (8.21a)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (8.21b)$$

en donde K es el nuevo hamiltoniano.

No todos los cambios de variables en el espacio de las fases tienen esta propiedad y es necesario caracterizar las transformaciones canónicas. Observemos que el principio de mínima acción (8.11) debe tomar la forma:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_i P_i \dot{Q}_i - K \right) dt \quad (8.22)$$

Pero las ecuaciones (8.8) y (8.21) serán equivalentes si los integrandos de (8.11) y (8.22) difieren en una derivada total respecto del tiempo:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt} \quad (8.23)$$

La función F_1 se llama *función generatriz* de la transformación canónica, pues de ella se deduce la transformación de coordenadas. En efecto, escribiendo (8.23) en la forma:

$$dF_1 = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i + (K - H)dt \quad (8.24)$$

se deduce que F_1 puede elegirse siempre como función de las coordenadas originales q y de las transformadas Q , y que los impulsos y el hamiltoniano se deducen de:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad (8.25a)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad (8.25b)$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (8.25c)$$

De estas ecuaciones es posible hallar Q y P en función de q y p . Vemos también que el hamiltoniano no se modifica (salvo por la sustitución de coordenadas) si la transformación es independiente del tiempo.

8.2.2. Otras formas de la función generatriz

La función generatriz $F_1(q, Q)$ no es la única forma posible para una función generatriz. Existen, en realidad, muchas formas posibles de las mismas, que se pueden hallar mediante transformaciones de Legendre apropiadas. Llamaremos $F_2(q, P)$ a la forma de la función generatriz que depende de coordenadas originales e impulsos transformados. Podemos hallarla fácilmente a partir de F_1 mediante una transformación de Legendre:

$$F_2(q, P) = F_1(q, Q) + \sum_i Q_i P_i \quad (8.26)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} dF_2 &= dF_1 + \sum_i (Q_i dP_i + P_i dQ_i) \\ &= \sum_i p_i dq_i + \sum_i Q_i dP_i + (K - H) dt \end{aligned}$$

Por lo tanto, $F_2(q, P, t)$ es una función generatriz con variables independientes q_i, P_i , que satisface:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad (8.27a)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad (8.27b)$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (8.27c)$$

Mediante transformaciones de Legendre adecuadas, es posible construir otras formas “standard” de las funciones generatrices: $F_3(p, Q)$ y $F_4(p, P)$.

Sin embargo, la mayor parte de las transformaciones canónicas que aparecen en la práctica se usan para simplificar alguno de los pares de variables canónicas, o tal vez unos pocos, dejando inalterado el resto. No es difícil ver que el número de funciones generatrices de este tipo es muchísimo mayor que el de los cuatro prototipos canónicos.

8.2.3. Ejemplos sencillos

Examinemos ejemplos sencillos de transformaciones canónicas, construyendo sus funciones generatrices.

Transformaciones canónicas elementales

La transformación canónica de función generatriz

$$F_2 = \sum_i q_i P_i \quad (8.28)$$

se llama la *transformación canónica unidad*, que no altera coordenadas e impulsos, como puede verificarse usando (8.27).

Más interesante es la transformación canónica de función generatriz:

$$F_1 = \sum_i q_i Q_i \quad (8.29)$$

que intercambia coordenadas e impulsos:

$$P_i = q_i \quad Q_i = -p_i \quad (8.30)$$

y sugiere que en la formulación hamiltoniana no existe distinción alguna entre coordenadas e impulsos generalizados: cualquier elemento de un par de variables conjugadas puede llamarse “coordenada” o “impulso” y justifica el uso de la notación simpléctica ξ para el conjunto de variables (q, p) .

Transformaciones de coordenadas

Las transformaciones de coordenadas (o transformaciones puntuales) son un caso particular de las transformaciones canónicas, con una función generatriz:

$$F_2 = \sum_i f_i(q) P_i \quad (8.31)$$

como puede verificarse fácilmente usando (8.27). Las transformaciones canónicas son, pues, una generalización de las transformaciones de coordenadas al espacio de las fases.

Aplicación al oscilador armónico

Construyamos una transformación canónica que conduce a una solución muy sencilla del problema del oscilador armónico. Escribamos su hamiltoniano (8.18) en la forma:

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2) \quad (8.32)$$

Las trayectorias de energía constante del oscilador armónico son elipses en el espacio de las fases. Esto sugiere simplificar el problema buscando una transformación canónica a “coordenadas polares” en el espacio de las fases:

$$q = \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} f(P) \cos Q \quad (8.33a)$$

$$p = -\sqrt{2m} f(P) \operatorname{sen} Q \quad (8.33b)$$

La función $f(P)$ es desconocida y hay que determinarla para completar la transformación canónica. Sustituyendo, sin embargo en (8.32) hallamos:

$$K = [f(P)]^2 \quad (8.34)$$

y por lo tanto, si las ecuaciones (8.33) describen una transformación canónica, f^2 es el hamiltoniano del sistema, Q es cíclica y P representa una cantidad conservada.

Para determinar la transformación canónica, eliminemos $f(P)$ entre las ecuaciones (8.33):

$$f(P) = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}} \frac{q}{\cos Q}$$

y por lo tanto:

$$p = -m\omega q \tan Q \quad (8.35)$$

Busquemos ahora una función generatriz $F_1(q, Q)$. Si existe, debe cumplirse:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = -m\omega q \tan Q \quad (8.36)$$

y por lo tanto

$$F_1(q, Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \tan Q + q(Q) \quad (8.37)$$

Esta ecuación nos proporciona infinitas transformaciones canónicas eligiendo diferentes funciones Q . La más simple se obtiene con $g(Q) = 0$. De ella se obtiene inmediatamente:

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{2} \frac{m\omega q^2}{\cos^2 Q} = \frac{p^2}{2m\omega} + \frac{1}{2}m\omega q^2$$

y comparando con (8.33a) hallamos:

$$K = \omega P = H(P) \quad (8.38)$$

La Figura 8.4 muestra el efecto de la transformación sobre el espacio de fases. La ecuación de movimiento para Q es:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega$$

y por lo tanto:

$$Q = \omega t + \phi \quad (8.39)$$

Las ecuaciones (8.39), (8.38) y (8.33) proporcionan una solución del problema del oscilador armónico. Para hallarla solo se han utilizado integraciones elementales y se muestra así el poder de las transformaciones canónicas para simplificar problemas mecánicos.

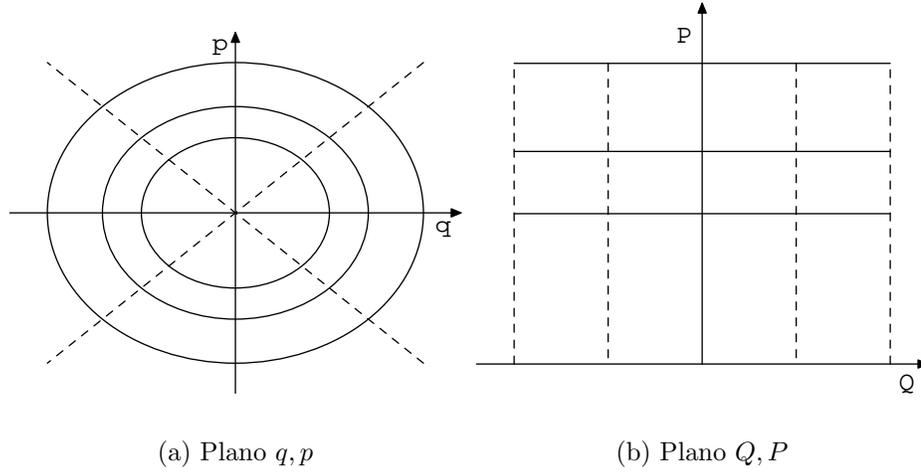


Figura 8.4: Ejemplo de transformación canónica. Las curvas $Q = C$ y $P = C$ son rectas por el origen y elipses respectivamente en el plano q, p .

8.2.4. Estructura simpléctica

Caracterizemos ahora a las transformaciones canónicas por las estructuras geométricas que deja invariantes. Hemos definido una transformación canónica como aquella que deja invariantes las ecuaciones de Hamilton (Cf. Sección 8.2.1). Escribamos estas últimas en la forma (8.15):

$$\dot{\xi} = \mathbb{J} \frac{\partial H}{\partial \xi}$$

Limitémonos, por simplicidad, al caso en que las transformaciones canónicas son independientes del tiempo. Esta toma, en la nueva notación, la forma:

$$\eta = \mathbf{F}(\xi) \tag{8.40}$$

Bajo esta transformación, las ecuaciones de Hamilton deben transformarse en:

$$\dot{\eta} = \mathbb{J} \frac{\partial H}{\partial \eta} \tag{8.41}$$

Sea ahora \mathbf{M} la matriz jacobiana de la transformación, con elementos:

$$M_{ij} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j}$$

Entonces, aplicando la regla de la cadena:

$$\dot{\eta} = \mathbf{M} \dot{\xi} = \mathbf{M} \mathbb{J} \frac{\partial H}{\partial \xi} = \mathbf{M} \mathbb{J} \mathbf{M}^\top \frac{\partial H}{\partial \eta} \tag{8.42}$$

Comparando con (8.41) deducimos que la condición para que la transformación sea canónica es que se conserve la matriz fundamental \mathbb{J} :

$$\mathbf{M}\mathbb{J}\mathbf{M}^T = \mathbb{J} \quad (8.43)$$

Hemos visto (Sección 1.1.3) que el programa de Erlangen clasificó las geometrías a través de sus invarianzas. La geometría que admite a \mathbb{J} como invariante fundamental se llama *geometría simpléctica*, el grupo de transformaciones característico es el *grupo simpléctico*, de matrices que satisfacen la ecuación (8.43). La cantidad

$$[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}] = \boldsymbol{\xi}\mathbb{J}\boldsymbol{\eta} \quad (8.44)$$

llamada *producto simpléctico*, es también invariante bajo transformaciones simplécticas.

De este modo, el espacio de las fases está provisto de una estructura geométrica particular: la estructura simpléctica. Esta última generaliza la estructura métrica, característica del espacio de configuración (4.48).

8.2.5. Invariantes integrales

Uno de los resultados más importantes de la formulación hamiltoniana de la mecánica es la existencia de *invariantes integrales*: cantidades de origen geométrico que son invariantes bajo transformaciones canónicas generales. La existencia de estos invariantes es consecuencia de la estructura simpléctica del espacio de las fases.

Integremos la ecuación (8.24) a lo largo de una curva cerrada en el espacio de las fases, a tiempo constante. En ese caso, el último término no contribuye y el primer miembro es una diferencial exacta, de modo que se anula. Obtenemos entonces:

$$\oint_C \sum_i p_i dq_i = \oint_{\hat{C}} \sum_i P_i dQ_i \quad (8.45)$$

donde las integrales se extienden a lo largo de una curva C en el espacio de las fases y de su imagen \hat{C} bajo la transformación. La integral

$$I_R^1(C) = \oint_C \sum_i p_i dq_i \quad (8.46)$$

se llama un *invariante integral relativo*. No es difícil mostrar que puede escribirse en la forma:

$$I_R^1(C) = \frac{1}{2} \oint_C \sum_i (p_i dq_i - q_i dp_i) = \frac{1}{2} \oint_C [\boldsymbol{\xi}, d\boldsymbol{\xi}] \quad (8.47)$$

que exhibe explícitamente la estructura simpléctica asociada al invariante.

Apliquemos ahora la generalización del teorema de Stokes a un espacio n -dimensional. Sea \mathbf{X} un vector en \mathbb{R}^n ; entonces vale:

$$\oint_C \sum_i X_i dx_i = \iint_S \sum_{ij} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j \quad (8.48)$$

en donde S es una superficie de contorno C . Aplicando este teorema a (8.45) obtenemos:

$$\iint_S \sum_i dq_i dp_i = \iint_{\hat{S}} \sum_i dQ_i dP_i \quad (8.49)$$

en donde las integrales se extienden a la superficie S y a su imagen \hat{S} . La cantidad

$$I^1(S) = \iint_S \sum_i dq_i dp_i \quad (8.50)$$

se llama un *invariante integral absoluto* o *invariante integral de Poincaré*. Nuevamente, puede escribirse:

$$I^1(S) = \iint_S [d\xi, d\xi] \quad (8.51)$$

Es sorprendente la existencia de estos invariantes, debido a la gran generalidad de las transformaciones canónicas. Más aún, existe un conjunto de invariantes integrales de orden cada vez más alto, I^2, I^3, \dots hasta llegar al invariante:

$$\iint \dots \iint dq_1 dp_1 \dots dq_f dp_f$$

que no es otra cosa que el volumen en el espacio de las fases.

Es posible generalizar los resultados anteriores para transformaciones canónicas dependientes del tiempo. Examinemos un caso particular importante. Sea un sistema de un grado de libertad $f = 1$ y examinemos la transformación generada por las soluciones de las ecuaciones de Hamilton (8.8). Se trata de una familia de transformaciones en el plano (q, p) que dependen del parámetro t :

$$Q(t) = Q(q_0, p_0, t) \quad (8.52a)$$

$$P(t) = P(q_0, p_0, t) \quad (8.52b)$$

en donde q_0, p_0 son las coordenadas cuando $t = 0$. Para cada una de las posiciones iniciales, las ecuaciones (8.52) describen una curva en el espacio de las fases (q, p) que representa una trayectoria posible del sistema. Este conjunto de curvas se llama el *flujo hamiltoniano*. Podemos interpretar el flujo hamiltoniano imaginando un conjunto de infinitas copias del sistema original, cada una de ellas con una condición inicial q_0, p_0 distinta. Este conjunto de sistemas evoluciona en el tiempo en forma similar a la de un fluido, redistribuyéndose en el espacio de las fases de acuerdo con las ecuaciones de movimiento.

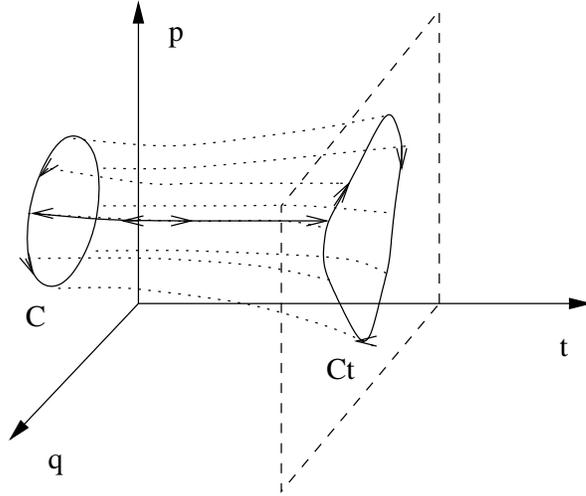


Figura 8.5: Demostración del Teorema de Liouville

Consideremos ahora un área inicial S en el espacio de las fases, rodeada por una curva C . Podemos representar su evolución en el tiempo como un tubo en el espacio tridimensional (q, p, t) , terminado por dos “tapas” en los instantes $t = 0$ y $t = t_f$ (Figura 8.5). La integral:

$$I_R^0 = \oint_D (pdq - H dt)$$

se extiende sobre las curvas formadas por las tapas y una cualquiera de las líneas de flujo (es decir, las trayectorias posibles). Usando el teorema de Stokes, esta integral puede escribirse en la forma:

$$I_R^0 = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \left[\left(-\frac{\partial H}{\partial q} - \dot{p} \right) dqdt + \left(-\frac{\partial H}{\partial p} + \dot{q} \right) dpdt \right] = 0 \quad (8.53)$$

en donde Σ es la superficie lateral del tubo de flujo.

Deducimos, pues que:

$$\oint_{C(t=0)} pdq = \oint_{C(t=t_f)} pdq \quad (8.54)$$

que es el *teorema de Liouville* para sistemas de un grado de libertad. Este importante teorema, que se generaliza para sistemas de varios grados de libertad, es importante en los fundamentos de la Mecánica Estadística.

8.2.6. Oscilaciones alrededor de un movimiento estacionario

Las transformaciones canónicas constituyen una poderosa generalización de las transformaciones de coordenadas, capaz de enfrentar problemas más complejos que las anteriores. Por ejemplo, las transformaciones de coordenadas no son capaces de resolver el problema de las oscilaciones alrededor de un movimiento estacionario (Sección 6.3). Mostraremos aquí que este problema puede enfrentarse como una transformación canónica a una generalización de las coordenadas normales.

Consideremos el lagrangeano de pequeños apartamientos x_i alrededor de un movimiento estacionario (6.45):

$$L = \frac{1}{2} \left[m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j + g_{ij} x_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} k_{ij} x_i x_j \right] \quad (8.55)$$

o, en forma matricial:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} \mathbf{G} \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{x} \mathbf{K} \mathbf{x} \quad (8.56)$$

Construiremos ahora el hamiltoniano del sistema. Por definición, los impulsos canónicos:

$$\mathbf{p} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G} \mathbf{x} \quad (8.57)$$

y las velocidades se expresan en la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{G} \mathbf{x}) \quad (8.58)$$

El hamiltoniano será:

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p} \mathbf{x} - L \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{G} \mathbf{x}) \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{G} \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{x} \mathbf{K} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (8.59)$$

Introduzcamos la notación simpléctica en el hamiltoniano (8.59): $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Para ello, definimos la matriz antisimétrica $\mathbf{B} = \mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}$. El hamiltoniano H toma la forma:

$$H = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \mathbf{H} \boldsymbol{\xi} \quad (8.60)$$

en donde la matriz \mathbf{H} tiene la forma:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{K} \end{pmatrix} \quad (8.61)$$

Las ecuaciones de Hamilton toman la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbb{J} \mathbf{H} \boldsymbol{\xi} \quad (8.62)$$

y su solución puede buscarse con una sustitución de d'Alembert:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 e^{-i\omega t}$$

que conduce a la ecuación de autovalores:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\xi}_0 = i\omega\mathbb{J}\boldsymbol{\xi}_0 \quad (8.63)$$

Busquemos ahora una transformación canónica lineal que simplifique las ecuaciones de Hamilton (8.62):

$$\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{M}\boldsymbol{\xi}$$

que sustituida en las ecuaciones de Hamilton las lleva a la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Xi}} &= \mathbf{M}\mathbb{J}\mathbf{H}\mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\Xi} \\ &= \mathbb{J}\mathbf{M}\mathbf{H}\mathbf{M}^{-1} \end{aligned} \quad (8.64)$$

Elijamos la transformación \mathbf{M} para llevar \mathbf{H} a la forma diagonal:

$$\mathbb{J}\mathbf{M}\mathbf{H}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{D}$$

Sustituyendo en (8.64) hallamos:

$$\dot{\boldsymbol{\Xi}} = \mathbf{D}\boldsymbol{\Xi}$$

y comparando con (8.63) hallamos:

$$D_k = i\omega_k \quad (8.65)$$

Si ahora transformamos el hamiltoniano (8.60) encontramos la forma sencilla:

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Xi}\mathbb{J}\mathbf{D}\boldsymbol{\Xi} = \sum_k i\omega_k Q_k P_k \quad (8.66)$$

En esta forma, es evidente que las variables Q, P son complejas. Una transformación canónica de función generatriz F_2 apropiada lleva el hamiltoniano a la forma (Cf. Problema 8.2.3):

$$H = \frac{1}{2} \sum_k (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) \quad (8.67)$$

que corresponde a un conjunto de osciladores armónicos desacoplados.

Problemas 8.2

Problema 8.2.1.

Una “rotación” en el espacio de las fases:

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\operatorname{sen} \lambda \\ \operatorname{sen} \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

es canónica.

Problema 8.2.2.

La forma más general de una transformación canónica a “coordenadas polares” en el espacio de las fases tiene la forma:

$$\begin{aligned} q &= af(P) \operatorname{sen} Q \\ p &= bf(P) \cos Q \end{aligned}$$

Buscar una función generatriz del tipo F_1 para esta transformación.

Problema 8.2.3.

La transformación canónica de función generatriz

$$F_2 = qP - \frac{P^2 - 2m^2\omega^2q^2}{4im\omega}$$

genera una transformación canónica compleja.

1. Hallar las funciones de transformación.
2. Aplicarla al oscilador armónico de frecuencia ω

Problema 8.2.4.

El hamiltoniano de un sistema tiene la forma:

$$H = \frac{1}{2} \left(q^4 p^2 + \frac{1}{q^2} \right)$$

1. Hallar las ecuaciones de movimiento del sistema.
2. Hallar una transformación canónica que reduzca H a la forma del oscilador armónico.
3. Probar que las soluciones halladas en la parte 2 satisfacen las ecuaciones de movimiento del sistema.

Problema 8.2.5.

La sustitución:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt}$$

no altera las ecuaciones de Lagrange. Sin embargo, existe una transformación canónica que corresponde a esta sustitución. Hallar una función generatriz F_2 para esa transformación canónica.

Problema 8.2.6.

Probar que una transformación canónica en sistemas con un grado de libertad $f = 1$ conserva áreas en el plano (q, p) .

Problema 8.2.7.

Un mapa de Poincaré para un sistema con $f = 2$ conserva áreas.

Problema 8.2.8.

Hallar la transformación canónica que diagonaliza el hamiltoniano en el caso de oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio.

Problema 8.2.9.

Hallar las transformaciones M para los siguientes sistemas que oscilan alrededor de un movimiento estacionario:

1. El problema restringido de tres cuerpos, alrededor de L_4 o L_5 .
2. Una órbita circular en el potencial newtoniano.
3. Precesión regular de un trompo.

8.3. Corchetes de Poisson

Las transformaciones canónicas tienen la propiedad de grupo: la composición de dos transformaciones canónicas es otra transformación canónica. Esto puede verificarse observando que la composición de dos transformaciones canónicas conserva los invariantes integrales de Poincaré. Esto abre la posibilidad de estudiar transformaciones canónicas infinitesimales, cuya composición genere transformaciones canónicas finitas. La existencia de transformaciones infinitesimales genera en el espacio de las fases otra estructura geométrica: los corchetes de Poisson.

8.3.1. Transformaciones canónicas infinitesimales

Una transformación canónica infinitesimal está generada por una función generatriz próxima a la identidad:

$$F_2 = \sum_i q_i P_i + \epsilon G(q, P) \quad (8.68)$$

en donde ϵ es un parámetro infinitesimal y $G(q, P)$ se llama el *generador infinitesimal* de la transformación.

Utilizando las ecuaciones (8.27) se encuentra:

$$p_i = P_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial q_i}$$

$$Q_i = q_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial P_i}$$

o, despreciando cantidades de segundo orden en ϵ :

$$Q_i = q_i + \epsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial p_i} \quad (8.69a)$$

$$P_i = p_i - \epsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial q_i} \quad (8.69b)$$

que, finalmente, puede escribirse económicamente en forma simpléctica:

$$\Xi = \xi + \epsilon \mathbb{J} \frac{\partial G}{\partial \xi} \quad (8.70)$$

Una transformación canónica finita puede obtenerse componiendo transformaciones canónicas infinitesimales. En particular, si $\epsilon = d\lambda$ la ecuación (8.70) puede escribirse en la forma:

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = \mathbb{J} \frac{\partial G}{\partial \xi} \quad (8.71)$$

Comparando esta ecuación diferencial con las ecuaciones de Hamilton (8.15) vemos que el movimiento de un sistema mecánico puede interpretarse como una transformación canónica cuyo generador infinitesimal es el hamiltoniano del sistema. Este hermoso resultado sugiere otra solución al problema de la integración de las ecuaciones de movimiento: hallar una transformación canónica que “congele” el movimiento del sistema.

8.3.2. Corchetes de Poisson

Examinemos ahora el efecto de una transformación canónica infinitesimal de generador G sobre una función F de coordenadas e impulsos. Desarrollemos la función de las coordenadas transformadas Q, P alrededor de las coordenadas originales:

$$F(Q, P) = F(q, p) + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

y sustituyendo (8.69):

$$F(Q, P) = F(q, p) + \epsilon \{F, G\} \quad (8.72)$$

en donde hemos introducido el *corchete de Poisson* de dos funciones:

$$\{F, G\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \quad (8.73)$$

o, finalmente, si usamos la notación simpléctica:

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial \xi}^\top \mathbb{J} \frac{\partial G}{\partial \xi} \quad (8.74)$$

que es una expresión muy compacta del corchete de Poisson.

Una aplicación inmediata de los corchetes de Poisson es escribir en forma elegante las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad (8.75a)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad (8.75b)$$

También se puede expresar la variación temporal de una función arbitraria de las coordenadas e impulsos usando (8.72):

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (8.76)$$

En particular, una magnitud conservada (o *constante del movimiento*) tiene un corchete de Poisson nulo con el hamiltoniano:

$$\{F, H\} = 0 \quad (8.77)$$

que es una expresión muy simple de una ley de conservación.

8.3.3. Propiedades de los corchetes de Poisson

Los ejemplos anteriores muestran que los corchetes de Poisson juegan un papel muy importante en la formulación hamiltoniana y es conveniente estudiar sus principales propiedades.

De la definición (8.72) se deduce inmediatamente que los corchetes de Poisson son *antisimétricos*:

$$\{F, G\} = -\{G, F\} \quad (8.78)$$

Además, de las propiedades de la derivación deducimos son *lineales* en el primer (segundo) argumento y satisfacen la *identidad de Leibnitz*:

$$\{aF_1 + bF_2, G\} = a\{F_1, G\} + b\{F_2, G\} \quad (8.79a)$$

$$\{F_1F_2, G\} = F_1\{F_2, G\} + \{F_1, G\}F_2 \quad (8.79b)$$

Estas dos ecuaciones muestran que el corchete de Poisson es un operador de diferenciación sobre el espacio de fases.

Finalmente, los corchetes de Poisson satisfacen la *identidad de Jacobi*:

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0 \quad (8.80)$$

Para demostrarla, escribamos el corchete de Poisson como un operador diferencial:

$$\begin{aligned}\{F, H\} &= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_k \alpha_k \frac{\partial H}{\partial \xi_k} \\ \{G, H\} &= \sum_k \beta_k \frac{\partial H}{\partial \xi_k}\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\{F, \{G, H\}\} - \{G, \{F, H\}\} = \sum_i \left(U_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + V_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

pues las derivadas segundas de H se cancelan idénticamente. Las funciones U_i, V_i sólo dependen de F, G y pueden determinarse con sencillez eligiendo valores particulares de H . Eligiendo $H = p_i$:

$$\begin{aligned}U_i &= \{F, \{G, p_i\}\} - \{G, \{F, p_i\}\} \\ &= \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial q_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_i}, G \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_i} \{F, G\}\end{aligned}$$

y de la misma manera:

$$V_i = -\frac{\partial}{\partial p_i} \{F, G\}$$

Con estos resultados, se completa la demostración de la identidad de Jacobi.

Los corchetes de Poisson entre dos variables simplécticas se llaman los *corchetes de Poisson fundamentales*:

$$\{\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}\} = \mathbb{J} \quad (8.81)$$

o, en forma explícita:

$$\{q_i, p_j\} = 0 \quad (8.82a)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0 \quad (8.82b)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (8.82c)$$

La propiedad más importante de los corchetes de Poisson es su invarianza bajo transformaciones canónicas. Para probarla, consideremos el corchete de Poisson, calculado con las coordenadas simplécticas $\boldsymbol{\xi} = (q_i, p_i)$:

$$\{F, G\}_\xi = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\xi}}^\top \mathbb{J} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (8.83)$$

en donde hemos escrito explícitamente el símbolo de transposición. Pero:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \eta} &= M^\top \frac{\partial G}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= M^\top \frac{\partial F}{\partial \xi}\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\{F, G\}_\eta = \frac{\partial F^\top}{\partial \xi} M J M^\top \frac{\partial G}{\partial \xi} = \{F, G\}_\xi \quad (8.84)$$

Este importante resultado muestra que los corchetes de Poisson pueden calcularse en cualquier sistema de coordenadas: el más conveniente para cada aplicación.

Problemas 8.3

Problema 8.3.1.

Calcular los corchetes de Poisson entre coordenadas e impulsos para el oscilador armónico, en las coordenadas (q, p) y en las coordenadas (Q, P) . Mostrar explícitamente que son invariantes.

Problema 8.3.2.

Probar que la componente z del impulso angular es una constante de movimiento en:

1. El problema del movimiento central.
2. El cuerpo rígido simétrico.

Problema 8.3.3.

Hallar explícitamente la función generatriz de la transformación canónica cuyo generador infinitesimal es el hamiltoniano para los siguientes problemas:

1. La caída de los cuerpos.
2. El oscilador armónico.

Problema 8.3.4.

Completar la demostración de las propiedades (8.79), (8.80) y (8.83) de los corchetes de Poisson

8.4. Simetrías y leyes de conservación

La conexión entre simetrías y leyes de conservación, que ya examinamos en la Sección 4.3, tiene su formulación más elegante dentro del formalismo hamiltoniano. La clave de esta conexión es la ecuación (8.77), que muestra la condición para que una función sea una constante del movimiento.

8.4.1. Simetrías de un sistema hamiltoniano

Sea ahora una transformación de simetría en un sistema lagrangeano (Sección 4.3.1). La transformación infinitesimal de parámetro $d\alpha$ es una transformación canónica infinitesimal de función generatriz:

$$F_2 = \sum_i P_i \left(q_i + \frac{dq_i}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} d\alpha \right) \quad (8.85)$$

y con generador infinitesimal:

$$G(q, p) = \sum_i p_i \frac{dq_i}{d\alpha} \quad (8.86)$$

La variación del hamiltoniano bajo esta transformación es igual a:

$$\delta H = \{H, G(q, p)\} = \frac{d}{dt} \sum_i p_i \frac{dq_i}{d\alpha} = 0 \quad (8.87)$$

por la ecuación (4.70). Hemos demostrado, pues, que una transformación infinitesimal de simetría deja invariante el hamiltoniano. Como por otra parte las constantes de movimiento tienen corchete nulo con el hamiltoniano, deducimos que los generadores de simetría son constantes de movimiento.

Esto origina una importante generalización de la noción de simetría: ésta será toda transformación infinitesimal que deje invariante el hamiltoniano del sistema. El correspondiente generador infinitesimal será una cantidad conservada.

Si F y G son dos constantes del movimiento, su corchete de Poisson es también constante del movimiento, pues, por la identidad de Jacobi:

$$\{\{F, G\}, H\} = \{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0$$

Esto permite, a veces, hallar nuevas constantes del movimiento a partir de otras conocidas, aunque muchas veces el corchete de Poisson sólo proporciona alguna función de las anteriores.

Un ejemplo sencillo lo proporciona el impulso angular del sistema. Por sencillez, limitémonos al caso de una partícula. Las componentes

$$L_x = xp_y - yp_x \quad (8.88a)$$

$$L_y = yp_z - zp_y \quad (8.88b)$$

son constantes del movimiento en presencia de fuerzas centrales. Su corchete de Poisson debe serlo también y hallamos

$$\{L_x, L_y\} = L_z \quad (8.88c)$$

que también es constante del movimiento.

Diremos que dos constantes de movimiento están en *involución* si su corchete de Poisson se anula. En ese caso, las constantes de movimiento se llaman *integrales primeras*.

Sea ahora un sistema hamiltoniano con f grados de libertad, que posea f integrales primeras en involución. Siempre es posible numerar las integrales de modo que $F_1 = H$. Sean

$$P_i = F_i(q, p) \quad (8.89)$$

los valores conservados de esas integrales primeras. Cada una de estas ecuaciones representa una hipersuperficie en el espacio de las fases; y el movimiento sólo puede producirse en la intersección de estas superficies. Las ecuaciones (8.89) permiten, en principio, despejar los impulsos p_i como función de q, P :

$$p_i = f_i(q, P)$$

y la cantidad

$$d\Phi = p_i dq_i$$

es un diferencial total exacto. En efecto, la derivada parcial de la función F sobre la superficie σ definida por las ecuaciones (8.89) es:

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \right|_{\sigma} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j} + \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_j}$$

El corchete de Poisson sobre la superficie σ vale, pues:

$$\{F_l, F_m\} + \sum_j \sum_k \frac{\partial F_l}{\partial p_j} \frac{\partial F_m}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_j}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_j} \right) = 0$$

y de esta ecuación se deduce la condición de integrabilidad:

$$\frac{\partial p_j}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_j} \quad (8.90)$$

La integral de (8.89) es, pues, una función generatriz del tipo F_2 para una transformación canónica que hace constantes los impulsos generalizados P_i y las correspondientes velocidades generalizadas.

Este *teorema de integrabilidad de Liouville*, cuya demostración acabamos de bosquejar, muestra que si un sistema f grados de libertad posee f constantes de movimiento F_i en involución se puede hallar una solución del sistema mediante cuadraturas.

8.4.2. Álgebras de Lie

Las simetrías, sin embargo, no proporcionan muchas integrales de movimiento en involución. Esto se debe a que los grupos de transformaciones muchas veces no son conmutativos.

Un ejemplo sencillo lo proporcionan las componentes del impulso angular (8.88). Se observa que L_x, L_y, L_z no pueden elegirse como variables canónicas simultáneamente pues no satisfacen las relaciones (8.82). Este resultado se debe a la falta de conmutatividad de las rotaciones. En efecto, si $F(q, p)$ es una función cualquiera de las variables canónicas, su variación al realizar rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes x e y será $\{L_y, \{L_x, F\}, m\}$ mientras que si las rotaciones se aplican en orden inverso el cambio será $\{L_x, \{L_y, F\}, .\}$. La diferencia de ambas variaciones es:

$$\{L_y, \{L_x, F\}\} - \{L_x, \{L_y, F\}\} = \{\{L_x, L_y\}, F\} = \{L_z, F\} \quad (8.91)$$

que no se anula debido a la falta de conmutatividad del grupo. Así pues, aunque la composición de rotaciones infinitesimales es conmutativa (Sección 5.1.3), su acción sobre una función del espacio de las fases no lo es. Este resultado es válido para cualquier grupo de transformaciones.

Hemos mencionado que un grupo continuo de transformaciones puede construirse a partir de subgrupos uniparamétricos. Sean X_i los generadores infinitesimales de las transformaciones correspondientes. El cambio en una función $F(q, p, \alpha_i)$ generado por una transformación infinitesimal es:

$$\frac{dF}{d\alpha_i} = \{F, X_i\} \quad (8.92)$$

que es una ecuación diferencial para la modificación de la función bajo la acción del subgrupo.

Una transformación infinitesimal cualquiera X puede escribirse siempre como combinación lineal de los generadores básicos X_i :

$$X = \sum_i a_i X_i$$

Por otra parte, la composición de dos subgrupos uniparamétricos distintos debe generar otra transformación del grupo. Con una demostración similar a la de la ecuación (8.91), el corchete de Poisson de dos generadores infinitesimales debe ser una combinación lineal de otros generadores infinitesimales:

$$\{X_i, X_j\} = \sum_k c_{ij}^k X_k \quad (8.93)$$

donde las constantes c_{ij}^k son características del grupo y se llaman las *constantes de estructura* del mismo. El espacio vectorial de los generadores infinitesimales X_i , provistos de la ley de composición (8.93) se llama un *álgebra de Lie*. La teoría de los grupos de Lie muestra que dadas las constantes de estructura, es posible reconstruir en forma única las transformaciones finitas del grupo. En el caso de simetría, los elementos del álgebra X_i son un conjunto de constantes del movimiento (que por lo general no están en involución) asociadas a la simetría.

Es posible hallar una solución muy elegante para ecuación diferencial (8.92) usando los corchetes de Poisson. En efecto, sea α_i^0 el valor inicial del parámetro. Usando (8.92) hallamos las derivadas sucesivas de F con respecto de α_i :

$$\begin{aligned}\frac{dF}{d\alpha_i} \Big|_{\alpha_i=\alpha_i^0} &= \{F, X_i\}_{\alpha_i^0} \\ \frac{d^2 F}{d\alpha_i^2} \Big|_{\alpha_i=\alpha_i^0} &= \left\{ \frac{dF}{d\alpha_i}, X_i \right\}_{\alpha_i^0} \\ &= \{ \{F, X_i\}, X_i \}_{\alpha_i^0} \\ &\dots\end{aligned}$$

y la correspondiente transformación para $\Delta\alpha_i$ finito se encuentra con la serie de Taylor:

$$F(q, p, \alpha_i^0 + \Delta\alpha_i) = F(q, p, \alpha_i^0) + \Delta\alpha_i \{F, X_i\}_{\alpha_i^0} + \frac{1}{2}(\Delta\alpha_i)^2 \{ \{F, X_i\}, X_i \}_{\alpha_i^0} + \dots \quad (8.94)$$

La expresión (8.94) se llama la *transformada de Lie* de la función F por el generador infinitesimal H . Obviamente, generaliza la noción de transformación infinitesimal a valores finitos del parámetro α .

Como caso particular, para la evolución temporal:

$$F(q, p, t) = F(q, p, t_0) + (t - t_0) \{F, H\}_0 + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \{ \{F, H\}, H \}_0 + \dots \quad (8.95)$$

que expresa una solución formal de las ecuaciones de movimiento.

Existe una manera muy elegante de expresar estas soluciones. Introduciendo el *operador de Liouville*:

$$\mathcal{L}F = \{F, H\} \quad (8.96)$$

y entonces (8.95) se escribe:

$$F(q, p, t) = e^{(t-t_0)\mathcal{L}}F(q, p, t_0) \quad (8.97)$$

El valor práctico de las soluciones (8.95) o (8.97) depende de la rapidez de la convergencia de la serie.

Problemas 8.4

Problema 8.4.1.

Mostrar que las constantes de estructura del grupo de rotaciones son

$$C_{ij}^K = \epsilon_{ijk}$$

Problema 8.4.2.

Calcular los corchetes de Poisson del generador L_z :

1. Con una función escalar $F(q, p)$
2. Con una función vectorial $\mathbf{V}(q, p)$.

Comparar con los resultados de una transformación infinitesimal alrededor del eje z .

Problema 8.4.3.

Un sistema de dos grados de libertad tiene el hamiltoniano:

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2$$

Probar que

$$F_1 = \frac{p_1 - a q_1}{q_2}$$

$$F_2 = q_1 q_2$$

son constantes del movimiento.

¿Hay otras constantes algebraicamente independientes? ¿Puede construirse alguna a partir de la identidad de Jacobi?

Problema 8.4.4.

La *red de Toda* es un sistema unidimensional definido por el hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + e^{-(q_1 - q_3)} + e^{-(q_2 - q_1)} + e^{-(q_3 - q_2)} - 3$$

1. Mostrar que la “coordenada de centro de masa”

$$Q = q_1 + q_2 + q_3$$

es una constante del movimiento.

2. Mostrar que existe una transformación de coordenadas (similar a la transformación de Jacobi (6.41)) que transforma el hamiltoniano al sistema CM:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{24} \left[e^{2y+2\sqrt{3}x} + e^{2y-2\sqrt{3}x} + e^{-4y} \right] - \frac{1}{8}$$

3. Probar que en el límite de pequeños q, p el hamiltoniano reducido toma la forma:

$$H \simeq \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2)$$

4. Probar que existe la siguiente constante de movimiento:

$$F(q, p) = 8p_x(p_x^2 - 3p_y^2) + (p_x + \sqrt{3}p_y)e^{2y-2\sqrt{3}x} + (p_x - \sqrt{3}p_y)e^{2y+2\sqrt{3}x} - 2p_x e^{-4y}$$

5. Probar que en el límite de pequeños q, p la constante F toma la forma:

$$F(q, p) \simeq 12(y p_x - x p_y)$$

Y es una generalización no trivial del impulso angular.

8.5. Sistemas hamiltonianos singulares

Hemos visto que una condición necesaria para el desarrollo de la formulación hamiltoniana es que las ecuaciones (8.16) sean invertibles. Esto requiere, a su vez, que la matriz jacobiana (8.17) también sea invertible. Cuando ésto no ocurre, diremos que el lagrangeano es *singular*. Por ejemplo, en el lagrangeano

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 - \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) \quad (8.98)$$

la “energía cinética” es el cuadrado de la resta de las velocidades generalizadas y los impulsos canónicos son

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = -\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones no son invertibles, obviamente, y pueden expresarse como la *condición de vínculo*

$$\phi(p, q) = p_1 + p_2 = 0 \quad (8.99)$$

Los lagrangeanos singulares describen, pues, un tipo especial de sistemas vinculados. La singularidad está conectada con algún tipo de simetría del sistema. En el ejemplo anterior la simetría es la invariancia del sistema bajo la transformación

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1 + f(t) & Q_1 &= q_1 \\ P_2 &= p_2 + f(t) & Q_2 &= q_2 \end{aligned}$$

con $f(t)$ una función arbitraria del tiempo. Esta transformación es canónica, con función generatriz

$$F_2 = \sum_i q_i (P_i - f) \quad (8.100)$$

El estado del sistema (8.98) no está completamente caracterizado por las variables canónicas. En realidad todos los puntos del espacio de las fases alcanzables con la transformación canónica (8.100) deben considerarse equivalentes. Ésto es análogo a las *transformaciones de medida* en electromagnetismo

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f \quad (8.101)$$

Las cantidades físicas (los campos electromagnéticos) son invariantes bajo dichas transformaciones.

8.5.1. Método de Dirac

Cuando el lagrangeano es singular, los impulsos canónicos p_i no son independientes y en general existirán un conjunto de M relaciones que ligan los impulsos y las coordenadas entre sí, llamados los *vínculos primarios*

$$\phi_\alpha(p, q) = 0 \quad (8.102)$$

Advirtamos que estas relaciones no son triviales y se satisfacen sólo cuando p_i se deduce de las ecuaciones (8.16). Dirac llamó *igualdades débiles* a las que se satisfacen de esta manera, indicándolas con la notación:

$$\phi_\alpha(p, q) \approx 0 \quad (8.103)$$

Los vínculos primarios (8.102) definen una hipersuperficie en el espacio de las fases con una dimensión $d < 2f$ donde se efectúa el movimiento del sistema.

Aún con lagrangeanos singulares puede definirse un hamiltoniano, el *hamiltoniano canónico* a través de la transformación de Legendre (8.5). Sin embargo, como los impulsos canónicos no son independientes, la dependencia de $H(p, q)$ con los impulsos es arbitraria fuera de la hipersuperficie definida por los vínculos primarios (8.102). Podemos aprovechar esta propiedad para extender el hamiltoniano canónico a todo el espacio de las fases introduciendo un conjunto de multiplicadores de Lagrange λ_α :

$$H_{ef} = H_c + \lambda_\alpha(p, q)\phi_\alpha(p, q) \approx H_c \quad (8.104)$$

Usando las ecuaciones de movimiento en la forma (8.75) hallamos las ecuaciones débiles

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &\approx \{q_i, H\} + \lambda_\alpha \{q_i, \phi_\alpha\} \\ \dot{p}_i &\approx \{p_i, H\} + \lambda_\alpha \{p_i, \phi_\alpha\} \end{aligned}$$

Inpongamos ahora la *condición de consistencia* (8.76)

$$\dot{\phi}_\alpha(p, q) = \{\phi_\alpha(p, q), H_{ef}\} = 0 \quad (8.105)$$

que conduce a las igualdades débiles

$$\{\phi_\alpha, H_c\} + \lambda_\beta \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} \approx 0 \quad (8.106)$$

Estas condiciones de consistencia pueden dar lugar a varios casos:

1. La igualdad $\phi_\alpha = 0$ puede satisfacerse idénticamente como igualdad fuerte (es decir, en todo el espacio de las fases). En ese caso estamos en presencia de una ley de conservación y se ha obtenido una integral primera del sistema.

2. Se pueden obtener nuevas ecuaciones de vínculo independientes de las λ_α

$$\varphi(p, q) \approx \{\phi, H_c\}$$

que se llaman *vínculos secundarios*. La diferencia con los primarios es que para hallarlos se debieron usar las ecuaciones de movimiento del sistema. Esta diferencia no es muy importante y desde ahora en adelante usaremos la notación ϕ_α para todos los vínculos independientes, primarios o secundarios.

3. Finalmente, se pueden obtener ecuaciones en donde las λ_α figuran explícitamente, en la forma

$$\{\phi_\alpha, H_c\}|_{\phi=0} + \lambda_\beta \{\phi_\alpha, \phi_\beta\}|_{\phi=0} = 0 \quad (8.107)$$

Este sistema de ecuaciones determina, en principio, los multiplicadores de Lagrange λ . Sin embargo, la matriz $\mathbf{F} = \{\phi_\alpha, \phi_\beta\}|_{\phi=0}$ es por lo general singular y tiene una base de soluciones \mathbf{V}

$$\mathbf{V}\mathbf{F} = 0$$

Si llamamos Λ_α a las soluciones de la inhomogénea, la solución general para los multiplicadores de Lagrange λ es

$$\lambda_\alpha = \Lambda_\alpha + v_\beta(t)V_{\beta\alpha} \quad (8.108)$$

en donde las funciones $v(t)$ son arbitrarias.

Después de las operaciones anteriores, hemos obtenido una expresión explícita para el hamiltoniano efectivo

$$H_{ef} = H_c + \Lambda_\alpha \phi_\alpha + v_\alpha \tilde{\phi}_\alpha \quad (8.109)$$

en donde $\tilde{\phi}_\alpha = V_{\beta\alpha} \phi_\beta$.

8.5.2. Magnitudes de primera y segunda clase

La arbitrariedad de las funciones $v_\alpha(t)$ es análoga a la invarianza de calibrado del campo electromagnético: las cantidades físicamente interesantes son aquellas independientes de la elección del calibrado. En forma similar, las magnitudes físicamente interesantes en un sistema definido por un lagrangeano singular son aquellas independientes de la arbitrariedad de las v_α .

Llamaremos a R una *función de primera clase* a una función que tiene corchete de Poisson nulo con todos los vínculos

$$\{R, \phi_\alpha\} \approx 0 \quad (8.110)$$

En particular, el hamiltoniano es una función de primera clase. Éstas forman un álgebra: un sistema cerrado respecto de las combinaciones lineales y de los corchetes de Poisson. Los *vínculos de primera clase* son los que satisfacen

$$\begin{aligned}\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} &\approx 0 \\ &= c_{\alpha\beta}^\kappa \phi_\kappa\end{aligned}\quad (8.111)$$

Si las cantidades $c_{\alpha\beta}^\kappa$ son constantes, las ecuaciones (8.111) forman un álgebra de Lie. Pero por otra parte, los vínculos generan transformaciones canónicas infinitesimales

$$\delta g = \{g, \phi_\alpha\} \quad (8.112)$$

que no afectan el estado del sistema y son análogas a las transformaciones de medida. Las cantidades de primera clase no cambian bajo las transformaciones (8.112) son análogas a los invariantes de medida.

Por otra parte, las *magnitudes de segunda clase* tienen algún corchete de Poisson no nulo con los vínculos. En particular, los *vínculos de segunda clase* satisfacen relaciones de conmutación no triviales:

$$\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} = C_{\alpha\beta} \quad (8.113)$$

Los vínculos de segunda clase no son análogos a invariantes de medida, pero veremos que es posible usando la ecuación (8.113) eliminarlos mediante una transformación canónica.

Para ello, observemos que la matriz $C_{\alpha\beta}$ es antisimétrica. Además debe ser invertible, pues si no lo fuera existiría una combinación lineal de vínculos de segunda clase $\chi^a = \sum_a u_a \chi_a$ que sería de primera clase. Recíprocamente, si la matriz no es singular, el conjunto de vínculos es necesariamente de segunda clase. Como consecuencia, el número de vínculos de segunda clase es necesariamente par.

Introduzcamos ahora en primer lugar las variables modificadas

$$F' = F - \{F, \phi_\alpha\} C^{-1}_{\alpha\beta} \phi_\beta \quad (8.114)$$

que tienen corchete de Piosson nulo con los vínculos

$$\{A', \phi_\gamma\} = \{A, \phi_\gamma\} - \{A, \phi_\gamma\} C^{-1}_{\alpha\beta} C_{\beta\gamma} = 0$$

Introduzcamos ahora la cantidad:

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \phi_\alpha\} C^{-1}_{\alpha\beta} \{\phi_\beta, B\} \quad (8.115)$$

que se llama *corchete de Dirac* y tiene propiedades análogas a (8.78), (8.79) y (8.80).

$$\{F, G\}^* = -\{G, F\}^* \quad (8.116a)$$

$$\{aF_1 + bF_2, G\}^* = a\{F_1, G\}^* + b\{F_2, G\}^* \quad (8.116b)$$

$$\{F_1 F_2, G\}^* = F_1 \{F_2, G\}^* + \{F_1, G\}^* F_2 \quad (8.116c)$$

$$\{F, \{G, H\}^*\}^* + \{G, \{H, F\}^*\}^* + \{H, \{F, G\}^*\}^* = 0 \quad (8.116d)$$

Pero además tienen las propiedades adicionales

$$\{A, \phi_\alpha\}^* = 0 \quad (8.117a)$$

$$\{A, C\}^* \approx \{A, C\} \quad (8.117b)$$

$$\{\{A, B\}^*, C\}^* \approx \{\{A, B\}, C\} \quad (8.117c)$$

En las dos últimas ecuaciones, A y B son de primera clase y C es arbitrario.

Ahora bien, como la ecuación de movimiento para cualquier variable dinámica $F(p, q)$ tiene la forma

$$\dot{F} = \{F, H_{ef}\}$$

usando las ecuaciones (8.117) se puede escribir como

$$\dot{F} \approx \{F, H_{ef}\} \quad (8.118)$$

Es posible, pues, eliminar los vínculos de segunda clase trabajando con las variables dinámicas A' , de la ecuación (8.114) y usando los corchetes de Dirac en lugar de los de Poisson. Ésto es equivalente a hacer una transformación canónica al subespacio definido por el conjunto de ecuaciones $\phi_\alpha^{(2)} = 0$.

8.5.3. Condiciones subsidiarias

Mostraremos ahora que es posible encontrar un subespacio del espacio de las fases en donde se satisfacen las ecuaciones canónicas. Éste va a ser el espacio físico del sistema. El método de construcción (de gran importancia en Mecánica Cuántica) se debe a Faddeev y Popov y lleva su nombre. En la sección anterior hemos visto que es posible hacer lo cuando existen sólo vínculos de segunda clase. La presencia de vínculos de primera clase hace más difícil su construcción. En esta sección mostraremos cómo hacerlo. Sea entonces

$$H_{ef} = H_c + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \phi_{\alpha} \quad (8.119)$$

el lagrangeano efectivo en donde la suma corre sobre J vínculos de primera clase y $2K$ de segunda clase.

Ahora bien, como para cualquier función de primera clase vale la ecuación (8.110), en el subespacio físico f es una constante sobre cada una de las trayectorias generadas por el “hamiltoniano adicional” con vínculos de primera clase $\Delta H = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \phi_{\alpha}$

$$\dot{q}_i = \{q_i, \Delta H\} \quad (8.120a)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, \Delta H\} \quad (8.120b)$$

Para definir el espacio físico y definir todas las cantidades de primera clase basta pues elegir una “hipersuperficie” en el espacio de las fases que corte todas

las trayectorias (8.120). Sean pues $\chi_\alpha(p, q)$ un conjunto de J funciones tales que la matriz

$$\mathbb{S}_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \phi_\beta\} \quad (8.121)$$

no sea singular. Si ésto se cumple, las χ_α no serán funciones de primera clase y definen una sección del espacio de las fases que corta en un punto a cada trayectoria generada por (8.120). Las χ_α se llaman *condiciones subsidiarias*; son similares a vínculos, pero a diferencia de éstos, generados por la singularidad del hamiltoniano, son *arbitrarias*, restringidas únicamente por la condición de no singularidad de (8.121).

Las condiciones de consistencia para las condiciones subsidiarias son

$$\{\chi_\alpha, H\} + \lambda_\beta \{\chi_\alpha, \phi_\beta\} = 0 \quad (8.122)$$

que ahora pueden invertirse para determinar todos los multiplicadores de Lagrange. Así pues, sobre el subespacio físico definido por los vínculos y las condiciones subsidiarias, los multiplicadores de Lagrange quedan completamente determinados y con ellos el hamiltoniano efectivo H_{ef} . Podemos ahora formar un nuevo hamiltoniano efectivo:

$$H^* = H_c + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \psi_{\alpha} \quad (8.123)$$

en donde la suma corre sobre todos los vínculos y las condiciones subsidiarias.

La dimensión del subespacio físico (que coincide con el número de grados de libertad físicos f) es igual a

$$2f = 2n - 2K - J - J = 2(n - K - J) = 2(n - m) \quad (8.124)$$

Una vez fijadas las condiciones subsidiarias, podemos proceder como en el caso lagrangeano, introduciendo un conjunto de $2f$ variables canónicas q^*, p^* tales que:

$$q_i = q_i(q^*, p^*) \quad (8.125a)$$

$$p_i = p_i(q^*, p^*) \quad (8.125b)$$

$$\{q_i^*, p_j^*\} = \delta_{ij} \quad (8.125c)$$

$$\{q_i^*, q_j^*\} = \{p_i^*, p_j^*\} = 0 \quad (8.125d)$$

$$\psi_{\alpha} [q(q^*, p^*), p(q^*, p^*)] \equiv 0 \quad (8.125e)$$

Las variables q^*, p^* son una *representación paramétrica* del espacio de las condiciones de vínculo y las condiciones subsidiarias y describen el subespacio físico. Puesto que las nuevas variables son canónicas tendremos:

$$H^*(q^*, p^*) = H(q^*, p^*) \quad (8.126a)$$

$$\dot{p}_i^* = \frac{\partial H^*}{\partial q_i^*} \quad (8.126b)$$

$$\dot{q}_i^* = \frac{\partial H^*}{\partial p_i^*} \quad (8.126c)$$

Estas ecuaciones describen el movimiento en el subespacio físico.

8.5.4. Ejemplos

No es fácil construir ejemplos no triviales de lagrangeanos singulares sencillos con un número finito de grados de libertad: los ejemplos más interesantes pertenecen a teorías de campo con invarianza de medida.

Energía cinética singular

Examinemos el ejemplo (8.98), que sólo contiene vínculos de segunda clase. El único vínculo es (8.99). Tratemos de construir el hamiltoniano efectivo. Usando el vínculo (8.99) y la identidad

$$\dot{q}_1 - \dot{q}_2 = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$$

hallamos el hamiltoniano canónico

$$\begin{aligned} H_c &= p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - \frac{1}{8}(p_1 - p_2)^2 + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) \\ &= \frac{1}{8}(p_1 - p_2)^2 + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) \end{aligned}$$

de donde deducimos el hamiltoniano efectivo

$$H_{ef} = \frac{1}{8}(p_1 - p_2)^2 + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \lambda(p_1 + p_2) \quad (8.127)$$

Apliquemos ahora la condición de consistencia

$$\{\phi, H_{ef}\} = \frac{1}{2} \{q_1^2 + q_2^2, (p_1 + p_2)\} = q_1 + q_2 = 0 \quad (8.128)$$

Esta cantidad no depende de λ y es por lo tanto un vínculo secundario ϕ' .

$$\begin{aligned} \{\phi', H_{ef}\} &= \left\{ \frac{1}{8}(p_1 - p_2)^2, q_1 + q_2 \right\} + \lambda \{p_1 + p_2, q_1 + q_2\} \\ &= \lambda \{p_1 + p_2, q_1 + q_2\} \\ &= 2\lambda = 0 \end{aligned}$$

De esta manera se determina λ que en este caso se anula idénticamente. Por otra parte, los vínculos ϕ y ϕ' son de segunda clase pues

$$\{\phi, \phi'\} = 2 \quad (8.129)$$

De este modo ϕ' actúa como una condición subsidiaria. Finalmente, hagamos la transformación canónica de Faddeev-Popov con la función generatriz

$$F_2 = \tilde{p} \left(\frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}} \right) + p^* \left(\frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2}} \right) \quad (8.130)$$

hallamos el hamiltoniano físico

$$H^* = \frac{1}{4}p^{*2} + \frac{1}{2}q^{*2} \quad (8.131)$$

El sistema describe un oscilador armónico en la variable *relativa* con el vínculo (8.128).

Un sistema de medida

El siguiente ejemplo (sumamente artificial) trata de imitar la invarianza de gauge del electromagnetismo con un número pequeño de grados de libertad. Sean $q_1 \dots q_4$ variables que describen un sistema con lagrangeano singular

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 - q_2 + q_4)^2 + \frac{1}{2}(\dot{q}_3 + q_2 - q_4)^2 \quad (8.132)$$

Este lagrangeano es invariante bajo la “transformación de medida de segunda especie”

$$q'_1 = q_1 + f_2(t) - f_4(t) \quad (8.133a)$$

$$q'_3 = q_3 + f_4(t) - f_2(t) \quad (8.133b)$$

$$q'_2 = q_2 + \dot{f}_2 \quad (8.133c)$$

$$q'_4 = q_4 + \dot{f}_4 \quad (8.133d)$$

en donde las funciones f_2, f_4 son arbitrarias. El lagrangeano es singular, pues los impulsos canónicos son

$$p_1 = \dot{q}_1 - (q_2 - q_4) \quad (8.134a)$$

$$p_3 = \dot{q}_3 + (q_2 - q_4) \quad (8.134b)$$

$$p_2 = p_4 = 0 \quad (8.134c)$$

Las dos últimas ecuaciones son condiciones de vínculo, con interpretación sencilla: los correspondientes grados de libertad carecen de energía cinética.

El hamiltoniano efectivo resulta

$$H_{ef} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_3^2) + (p_1 - p_3)(q_2 - q_4) + \lambda_2 p_2 + \lambda_4 p_4 \quad (8.135)$$

Las condiciones de consistencia son

$$\{p_2, H_{ef}\} = -(p_1 - p_3) \approx 0$$

$$\{p_4, H_{ef}\} = +(p_1 - p_3) \approx 0$$

Se obtiene un único vínculo secundario cuya condición de consistencia es

$$\{(p_1 - p_3), H_{ef}\} \equiv 0$$

Ésta es una ley de conservación. No hemos hallado ninguna condición para determinar los λ y el movimiento está indeterminado. Ésto se origina, por supuesto, en la “invarianza de medida” del lagrangeano (8.132). Es necesario, pues, imponer condiciones subsidiarias. Un conjunto aceptable, en este caso en que los vínculos dependen sólo de los impulsos es

$$\chi_2 = q_2 = 0 \quad (8.136a)$$

$$\chi_4 = q_4 = 0 \quad (8.136b)$$

$$\chi_D = q_1 - q_3 = 0 \quad (8.136c)$$

Estas condiciones son análogas a la medida de Coulomb.

En este caso tan simple se pueden elegir las variables físicas y no físicas en forma muy obvia

$$\tilde{q}_{2,4} = q_{2,4} \quad \tilde{q}_D = q_1 - q_3 \quad (8.137)$$

$$\tilde{p}_{2,4} = p_{2,4} \quad \tilde{p}_D = p_1 - p_3 \quad (8.138)$$

$$q^* = q_1 + q_3 \quad p^* = p_1 + p_3 \quad (8.139)$$

Es fácil verificar que el espacio físico corresponde a una “partícula libre”.

Capítulo 9

La Teoría de Hamilton-Jacobi

Hemos mencionado en varias oportunidades que la formulación hamiltoniana de la mecánica sugiere la posibilidad de resolver el problema general del movimiento mediante una transformación canónica apropiada, que “congele” el movimiento del sistema. La teoría de Hamilton-Jacobi, basada sobre dicha idea, resuelve en principio el problema general del movimiento en sistemas hamiltonianos. Examinaremos aquí la teoría y sus limitaciones.

9.1. La ecuación de Hamilton-Jacobi

Propongámonos hallar una transformación canónica que congele el movimiento del sistema; es decir, una transformación en la que tanto las coordenadas como los impulsos canónicos sean constantes. Podemos lograrlo si exigimos que el hamiltoniano transformado sea independiente de las coordenadas, pues en ese caso:

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad \therefore P_i = \text{Cte.} \quad (9.1a)$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \quad \therefore Q_i = \text{Cte.} \quad (9.1b)$$

Veamos un procedimiento general de construcción.

9.1.1. El teorema de Jacobi

Sea S la función generatriz de la transformación, que elegiremos del tipo F_2 :

$$F_2 = S(q, P, t) \quad (9.2)$$

Sustituyendo en la ecuación de transformación para el hamiltoniano (8.27):

$$K = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

hallamos la *ecuación de Hamilton-Jacobi*:

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (9.3)$$

Ésta es una ecuación diferencial en derivadas parciales, no lineal, en las $f + 1$ variables q_i, t . Una solución de (9.3) proporciona una función de transformación a un sistema de coordenadas en el espacio de las fases donde la solución de las ecuaciones de Hamilton es trivial. No es necesario hallar la solución general, sin embargo, sino la llamada *solución completa*:

$$S = S(q_1 \dots q_f, \alpha_1 \dots \alpha_f, t) + \alpha_{f+1} \quad (9.4)$$

que depende de $f + 1$ constantes de integración independientes. Una solución de esta forma se llama la *función principal* de Hamilton. Como S figura en la ecuación de Hamilton-Jacobi sólo bajo el operador de diferenciación, una de las constantes arbitrarias es aditiva e irrelevante. Las otras f constantes no triviales se pueden identificar con los nuevos impulsos:

$$P_i = \alpha_i \quad (9.5)$$

y de las ecuaciones de transformación (8.27):

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} \quad (9.6a)$$

$$Q_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (9.6b)$$

Las ecuaciones (9.6) son un sistema no lineal de ecuaciones que puede invertirse (si su jacobiano no se anula) para hallar las coordenadas e impulsos originales en función del tiempo:

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t) \quad (9.7a)$$

$$p_i = p_i(\alpha, \beta, t) \quad (9.7b)$$

y las $2f$ constantes α, β pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales.

Así, la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi proporciona un método muy poderoso para hallar el movimiento de un sistema mecánico hamiltoniano, siempre que sea posible hallar una solución completa.

Examinemos el significado de la función principal de Hamilton S . Derivando con respecto del tiempo y aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} \\ &= \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$S = \int L dt + \alpha_{f+1} \quad (9.8)$$

es la acción del sistema expresada como función de las coordenadas del punto final. La integral (9.8) se calcula a lo largo de la trayectoria verdadera del sistema.

9.1.2. El oscilador armónico

La ecuación de Hamilton-Jacobi puede resolverse a veces por el *método de separación de variables*. Un ejemplo muy sencillo lo proporciona el oscilador armónico. Escribiendo su hamiltoniano en la forma:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

la ecuación de Hamilton-Jacobi toma la forma:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (9.9)$$

Observemos que la derivada con respecto del tiempo aparece aislada en el segundo miembro. Esto sugiere ensayar una solución en la forma:

$$S(x, t) = T(t) + W(x) \quad (9.10)$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = -\frac{dT}{dt}$$

El primer miembro es sólo función de x ; el segundo, sólo de t y para que la ecuación pueda satisfacerse para x, t arbitrarios, ambos deben ser iguales a una constante:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \alpha \quad (9.11a)$$

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha \quad (9.11b)$$

De estas ecuaciones hallamos:

$$T = -\alpha t \quad (9.12a)$$

$$W = \sqrt{2m} \int \sqrt{\alpha - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2} dx \quad (9.12b)$$

Esta última integral puede calcularse analíticamente, pero no es necesario hacerlo, pues sólo necesitaremos las derivadas parciales de W respecto de x y de

la constante α . Finalmente encontramos la función principal de Hamilton para el oscilador armónico:

$$S = -\alpha t + \sqrt{2m} \int \sqrt{\alpha - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2} dx \quad (9.13)$$

Siguiendo con el procedimiento, identificamos α con el nuevo impulso y la nueva coordenada es la constante β :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= \beta = -t + \sqrt{2m} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}} \\ &= -t + \frac{1}{\omega} \arccos \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}} x \end{aligned} \quad (9.14)$$

De esta última ecuación despejamos x en función de t :

$$x = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \cos \omega(t + \beta) \quad (9.15)$$

que es la solución conocida del oscilador armónico. En las nuevas coordenadas canónicas, el impulso generalizado es la energía y la coordenada canónica es proporcional a la fase $\omega\beta = \phi$. La transformación canónica que hemos determinado es similar a la “transformación a coordenadas polares” estudiada en la Sección 8.2.3.

En todos los sistemas conservativos el tiempo puede separarse de las coordenadas ensayando una sustitución de la forma:

$$S = -Et + W(q_i, \alpha_i) \quad (9.16)$$

que conduce a la ecuación diferencial:

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = E \quad (9.17)$$

La función W se llama la *función característica de Hamilton*. Genera una transformación canónica tal que el nuevo hamiltoniano es sólo función del momento $P_1 = E$:

$$K = E(\alpha_i) = P_1 \quad (9.18)$$

y por lo tanto $Q_1 = t + \beta_1$.

9.1.3. El problema de Képler

El movimiento en un campo central es otro ejemplo en que puede resolverse la ecuación de Hamilton-Jacobi en forma general. El caso particular del problema de Képler (Sección 3.2) es importante por su aplicación a la mecánica celeste.

El hamiltoniano de una partícula en un campo central tiene la forma, en coordenadas esféricas:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r) \quad (9.19)$$

que conduce a la correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \right] + V(r) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (9.20)$$

Puesto que se trata de un problema independiente del tiempo, busquemos una solución en la forma (9.16). Obtenemos así la ecuación para la función característica de Hamilton:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \right] + V(r) = \alpha_1 = E \quad (9.21)$$

Nuevamente, esta ecuación puede resolverse por separación de variables. Busquemos una solución en la forma:

$$W = R(r) + \Theta(\theta) + \Phi(\phi)$$

que sustituida en (9.21) proporciona las ecuaciones

$$\frac{d\Phi}{d\phi} = \alpha_3 = L_z \quad (9.22a)$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} = \alpha_2^2 = L^2 \quad (9.22b)$$

$$\left(\frac{dR}{dr} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} + 2mV(r) = 2m\alpha_1 = 2mE \quad (9.22c)$$

Así se halla la función principal de Hamilton para el movimiento en un campo central:

$$S = -Et - L_z \phi + \int \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}} d\theta + \int \sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2} - 2mV(r)} dr \quad (9.23)$$

Ésta es una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi, que depende de las tres constantes arbitrarias E, L, L_z . Es posible dar una interpretación geométrica a estas constantes de integración. Una vez elegido el sistema de coordenadas, las constantes de integración tienen una interpretación sencilla (Figura

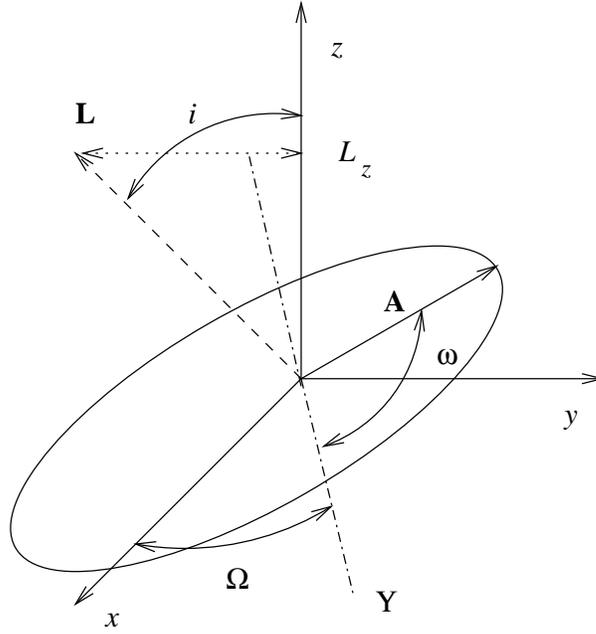


Figura 9.1: Elementos de la órbita en el espacio

9.1). En primer lugar, el ángulo entre el eje z y el impulso angular es la *inclinación* de la órbita i . Además, hemos mostrado en la Sección 3.2 que el eje mayor de la órbita es una función de la energía total (3.26) y la excentricidad es una función de la energía y el impulso angular (3.25).

La interpretación de las otras constantes requiere aplicar el teorema de Jacobi. En primer lugar, derivando con respecto de L_z hallamos:

$$\phi + \int \frac{1}{\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}}} \cdot \frac{L_z}{\sin^2 \theta} \cdot d\theta = \phi_0 \quad (9.24)$$

El ángulo ϕ_0 puede elegirse igual a la intersección del plano de la órbita con el plano xy : la línea de los nodos (Sección 5.1). El cálculo directo de la integral en (9.24) es sencillo pero tedioso.

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}} \\ &= L \int \sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 i} \frac{d\theta}{\sin \theta} \\ &= -L \int \sqrt{\sin^2 i - \cos^2 \theta} \frac{d \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \\ &= -L \sin^2 i \int \frac{\cos^2 \psi d\psi}{1 - \sin^2 i \sin^2 \psi} \end{aligned} \quad (9.25)$$

En esta última ecuación hicimos el cambio de variables

$$\cos \theta = \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \psi \quad (9.26)$$

que es sencillo interpretar aplican resultados conocidos de trigonometría esférica. Si llamamos ψ al ángulo que forma el planeta con la línea de los nodos, a lo largo del plano de la órbita, las relaciones entre elementos del triángulo esférico de Figura 9.2 se escriben:

$$\tan(\phi - \Omega) = \tan \psi \cos i \quad (9.27a)$$

$$\cos \theta = \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} i \quad (9.27b)$$

que permiten, en principio, expresar las coordenadas angulares (θ, ϕ) en función de la *longitud* del planeta ψ .

Finalmente, la integral (9.25) puede calcularse con sencillez:

$$\begin{aligned} I &= -L\psi + L \cos i \arctan(\cos i \tan \psi) \\ &= -L\psi + L_z(\phi - \Omega) \end{aligned} \quad (9.28)$$

en donde hemos usado (9.27) para simplificar la integral.

Finalmente, sustituyendo (9.28) en en las ecuaciones (9.24) y (9.23), se encuentra la expresión

$$S = -Et - L_z\Omega - L\psi + \int \sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2} - 2mV(r)} dr \quad (9.29)$$

El impulso canónico conjugado de ψ es el impulso angular total L :

$$L = \frac{\partial S}{\partial \psi} \quad (9.30)$$

Derivando con respecto de L , hallamos la ecuación de la órbita (Sección 3.1.4):

$$\psi - \int \frac{L}{\sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2} - 2mV(r)}} \frac{dr}{r^2} = \psi_0 \quad (9.31)$$

En general, las relaciones anteriores entre ángulos son válidas para cualquier movimiento central. En el caso particular del problema de Képler la solución puede completarse como sigue. Si se elige el límite inferior de integración como la menor de las raíces del polinomio $2mE - \frac{L^2}{r^2} - 2m\frac{\alpha}{r}$, el ángulo ψ_0 corresponde a la dirección del *periastro* en el plano de la órbita, llamado *argumento de periastro* y denotado ω . Una catidad más conveniente para trabajar es la *longitud de periastro*

$$\varpi = \omega + \Omega \quad (9.32)$$

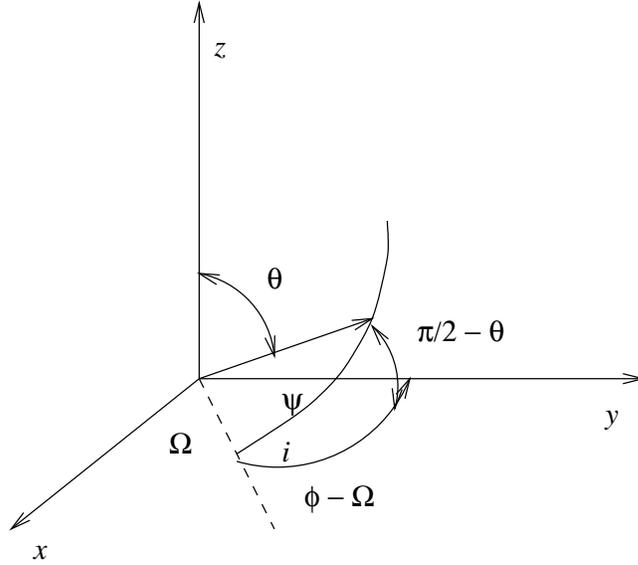


Figura 9.2: Relaciones entre ángulos en el problema espacial de Kepler

Introduciendo la *anomalía verdadera*

$$w = \psi - \omega \quad (9.33)$$

la ecuación de la órbita se lleva a la forma resuelta en la Sección 3.2.

Finalmente, la integración se completa derivando (9.29) con respecto de E :

$$-t + \int_{r_0}^r \frac{m dr}{\sqrt{2mE + 2m\frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{r^2}}} = -t_0 \quad (9.34)$$

Aquí t_0 se llama el *instante de pasaje por el perihelio* y es la última constante de integración. La ecuación (9.34) se ha integrado en la Sección 3.2, usando la anomalía excéntrica u como parámetro auxiliar. La frecuencia de revolución kepleriana suele llamarse *movimiento medio* del sistema:

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (9.35)$$

y los ángulos

$$M = n(t - t_0) \quad (9.36a)$$

$$l = nt \quad (9.36b)$$

la *anomalía media* y *longitud media* respectivamente.

Problemas 9.1

- Problema 9.1.1.** 1. Resolver el problema de la caída de los cuerpos usando la ecuación de Hamilton-Jacobi.
2. Mostrar directamente que $S(z, t; z_0, t_0)$ es igual a la acción evaluada a lo largo de la trayectoria real del sistema.

Los siguientes problemas deben resolverse usando la ecuación de Hamilton-Jacobi:

Problema 9.1.2.

Partícula en el potencial

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2 ax}$$

Problema 9.1.3.

Tiro en el vacío.

Problema 9.1.4.

Oscilador armónico bidimensional isótropo.

Problema 9.1.5.

Cuerpo simétrico libre de fuerzas.

Problema 9.1.6.

Un oscilador armónico se encuentra sometido a una fuerza externa $f(t)$. Si su lagrangeano es

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 - xf(t)$$

resolver el problema y hallar la acción en función de las coordenadas.

9.2. Variables ángulo-acción

El poder de la formulación hamiltoniana de la mecánica puede verse cuando se eligen variables apropiadas para el análisis de problemas específicos. Las variables canónicas introducidas en la sección anterior (α_i, β_i) son de gran utilidad en el caso general, pero no son las únicas variables posibles. Por ejemplo, haciendo el cambio de variables:

$$\gamma_i = \gamma_i(\alpha) = P'_i \tag{9.37}$$

se encuentra otro conjunto de variables, tales que la solución del problema es especialmente sencilla. Por lo general, el hamiltoniano no se anulará, en este caso, pero será sólo función de las variables γ :

$$H = H(\gamma)$$

En este caso particular, las soluciones del problema toman una forma muy sencilla:

$$\dot{P}'_i = 0 \qquad P'_i = \gamma_i \qquad (9.38a)$$

$$\dot{Q}'_i = \frac{\partial H(\gamma)}{\partial \gamma_i} = \omega_i \qquad Q'_i = \omega_i t + \beta_i \qquad (9.38b)$$

Para el problema particular de movimiento periódico, existe otro conjunto de variables especialmente adecuado: las *variables ángulo-acción*.

9.2.1. El caso unidimensional

Ante todo, observemos que hay dos tipos de movimiento periódico posible en un sistema hamiltoniano: *rotación* y *libración*. Un movimiento periódico es una rotación si la variable q puede crecer sin límite con el tiempo, pero H es función periódica de q . Las coordenadas angulares ϕ y ψ en el trompo simétrico o las coordenadas polares en el de fuerzas centrales son buenos ejemplos de movimiento de rotación. El movimiento es de libración si la coordenada permanece acotada. En un mismo sistema mecánico, ambos tipos de movimiento pueden presentarse, dependiendo de las condiciones iniciales. Por ejemplo, en el péndulo el movimiento es de libración si $E < mgl$ y mayor en caso contrario (Figura 9.3).

En un sistema hamiltoniano unidimensional, introduzcamos la *variable acción* en la forma:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint pdq \qquad (9.39)$$

en donde la integral se extiende a lo largo de un periodo. Obviamente, J no depende de q y como el hamiltoniano se conserva

$$H(p, q) = \alpha_1 = E \qquad p = p(q, E)$$

J puede ser función sólo de E :

$$J = J(E) = J(\alpha_1) \qquad \alpha_1 = E = H(J) \qquad (9.40)$$

A través de esta ecuación, la función característica de Hamilton W será función de J :

$$W = W(q, J) = F_2(q, J) \qquad (9.41)$$

que puede interpretarse como la función generatriz, de tipo F_2 de una transformación canónica a nuevas variables:

$$P = J \qquad (9.42a)$$

$$Q = \frac{\partial W}{\partial J} = w \qquad (9.42b)$$

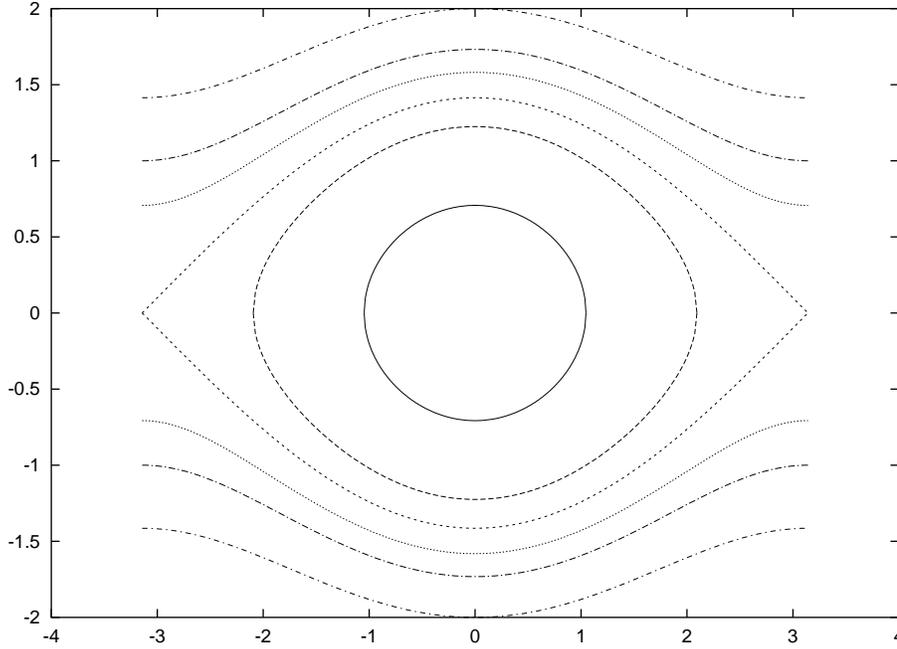


Figura 9.3: Espacio de fases de un péndulo, mostrando casos de rotación y libración

y esta última se llama *variable ángulo*. La transformación que acabamos de definir es del tipo (9.38) y por lo tanto w es una función lineal del tiempo:

$$w = \omega t + \beta \quad (9.43)$$

en donde ω , que tiene dimensiones de frecuencia, es igual a:

$$\dot{w} = \frac{\partial H}{\partial J} = \omega \quad (9.44)$$

Las variables ángulo-acción no parecen diferir mucho de las constantes (α, β) . pero tienen varias ventajas notables sobre ellas. En primer lugar, ω es la frecuencia de oscilación del sistema. En efecto, calculemos el cambio de la variable ángulo w durante un ciclo completo de libración:

$$\Delta w = \Delta \frac{\partial W}{\partial J} = \frac{\partial \Delta W}{\partial J} \quad (9.45)$$

Ahora bien, de las ecuaciones (9.6):

$$p = \frac{\partial W(q, J)}{\partial q}$$

$$W = \int p dq + C(J)$$

y, a lo largo de un periodo

$$\Delta W = \oint pdq = 2\pi J \quad (9.46)$$

Sustituyendo en (9.45):

$$\Delta w = 2\pi = \omega T \quad (9.47)$$

en donde hemos usado (9.43) y T es el periodo del movimiento. Esta última ecuación prueba que ω es la frecuencia del movimiento periódico.

Como el movimiento es periódico, cualquier función uniforme de las coordenadas y el tiempo puede escribirse como una serie de Fourier de periodo T :

$$\begin{aligned} F(q, p) &= \sum_n F_n(E) e^{in(\omega t + \beta)} \\ &= \sum_n F_n(J) e^{inw} \end{aligned} \quad (9.48)$$

y por lo tanto toda función uniforme de las coordenadas y los impulsos puede desarrollarse en serie de Fourier de la variable ángulo, cuyos coeficientes dependen sólo de la variable acción. Esta propiedad, característica de las variables angulo-acción es la que las hace muy valiosas. Como las coordenadas mismas son funciones uniformes de las coordenadas (excepto el caso de rotación) pueden desarrollarse en serie de Fourier en la forma:

$$q = \sum_n q_n(J) e^{inw} \quad \text{libración} \quad (9.49a)$$

$$q - \frac{w}{2\pi} q_0 = \sum_n q_n(J) e^{inw} \quad \text{rotación} \quad (9.49b)$$

en donde q_0 es el intervalo de periodicidad de la variable q .

Calculemos, como ejemplo, las variables ángulo-acción para el oscilador armónico:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \oint pdq \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} dq \\ &= \frac{E}{\omega} \end{aligned} \quad (9.50)$$

Tanto el hamiltoniano como la frecuencia se expresan trivialmente:

$$H = \omega J \quad \omega = \frac{\partial H}{\partial J}$$

La función principal de Hamilton es:

$$W = \sqrt{2m} \int \sqrt{\omega J - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2} dx$$

y w se encuentra a partir de esta función generatriz:

$$w = \frac{\partial W}{\partial J} = \arccos \sqrt{\frac{m\omega}{2J}} x$$

Finalmente, la coordenada resulta:

$$x = \sqrt{\frac{2J}{m\omega}} \cos w$$

que es una serie de Fourier trivial, de un solo término.

Las variables ángulo acción tienen, en el caso unidimensional, una interpretación geométrica muy sencilla: el movimiento se realiza sobre una curva cerrada en el espacio de las fases (q, p) . La variable acción selecciona la curva y la variable ángulo denota la posición del punto representativo del sistema sobre la misma (Figura 8.2). La transformación a variables ángulo acción transforma, sencillamente, la curva en el plano (q, p) en una curva $J = \text{cte}$ sobre el cilindro (J, w) (Figura 8.4).

9.2.2. El caso separable

Los resultados que hemos obtenido para una sola variable se extienden de inmediato a un sistema totalmente separable de f grados de libertad. En ese caso:

$$W = \sum_{i=1}^f W_i(q_i, \alpha) \quad (9.51)$$

en donde W_i es función de la variable q_i solamente. Las variables:

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i \quad (9.52)$$

se llaman *variables acción* y son sólo funciones de las constantes α . Invertiendo las ecuaciones $J_i = J_i(\alpha)$ hallamos la función generatriz de una transformación canónica:

$$W = \sum_{i=1}^f W_i(q_i, J) = F_2(q, J) \quad (9.53)$$

y el hamiltoniano como función de las variables acción:

$$H = \alpha_1(J) = H(J) \quad (9.54)$$

Las variables ángulo son las conjugadas canónicas de las variables acción:

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} \quad (9.55)$$

y las ecuaciones de Hámilton toman la forma:

$$\dot{J}_i = 0 \quad (9.56a)$$

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_i \quad (9.56b)$$

Para probar que ω_i es la frecuencia, seguiremos los pasos de la demostración para el caso unidimensional, pero haremos una *variación virtual* de q_i : esta última recorrerá su órbita periódica, pero manteniendo el tiempo constante y las otras coordenadas “congeladas” en valores dados. En esta forma:

$$\begin{aligned} \Delta w_j &= \Delta \frac{\partial W}{\partial J_j} \\ &= \sum_i \frac{\partial \Delta W_i}{\partial J_j} \\ &= \sum_i 2\pi \frac{\partial J_i}{\partial J_j} \\ &= 2\pi \end{aligned} \quad (9.57)$$

Todas las funciones uniformes de las coordenadas pueden desarrollarse en serie de Fourier múltiple de las w :

$$F(q, p) = \sum_{\{n_1 \dots n_f\}} F_{\{n_1 \dots n_f\}}(J_1 \dots J_f) e^{i \sum_{i=1}^f n_i w_i} \quad (9.58)$$

La interpretación geométrica de las variables ángulo acción en el caso separable generaliza la del caso unidimensional. Para fijar las ideas, consideremos el caso de dos grados de libertad. Puesto que coordenadas e impulsos pueden representarse como series de Fourier, el punto representativo del sistema se mueve sobre un toro en el espacio de las fases tetradimensional (Figura 8.3). Las variables acción seleccionan el toro, mientras que las variables ángulo describen la posición del punto representativo sobre el mismo (Sección 8.1.3).

En general, un sistema separable de f grados de libertad tiene f frecuencias de movimiento *independientes*. Con más precisión, diremos que las frecuencias $\omega_i(J)$ son independientes si no existe ningún conjunto de enteros $N = \{n_1 \dots n_f\}$ tales que la combinación lineal $\Omega(J) = \sum_{i=1}^f n_i \omega_i(J)$ se anula. Un sistema tal se llama *múltiplemente periódico* o también *cuasiperiódico*. En el caso que exista un conjunto N que anule la combinación lineal Ω , el movimiento se llama *resonante*.

El movimiento será periódico sólo si todas las frecuencias ω_i son múltiplos de una cierta frecuencia ω_0 . En ese caso, existe una combinación lineal de coeficientes enteros que anula Ω y el movimiento es resonante.

En general, diremos que el movimiento es $m - 1$ veces degenerado si existen m frecuencias iguales. Si todas las frecuencias son iguales, el sistema es *totalmente degenerado*. Este último es un caso particular de resonancia.

Cuando hay resonancia, es posible simplificar el problema eliminando alguna de las variables ángulo del problema. En efecto, supongamos que existe un conjunto N de enteros que anule la combinación lineal de frecuencias Ω . Introduzcamos la transformación canónica generada por:

$$F_2 = J'_1 \sum_{i=1}^f n_i w_i + \sum_{k=2}^f J'_k w_k \quad (9.59)$$

en donde J' son las nuevas variables acción. De la transformación, deducimos las nuevas variables ángulo:

$$w'_k = \begin{cases} \sum_{i=1}^f n_i w_i & k = 1 \\ w_k & k \geq 2 \end{cases} \quad (9.60)$$

Las variables acción transformadas resultan ser:

$$J'_k = \begin{cases} J_1 & k = 1 \\ J_k - \frac{n_k}{n_1} J_1 & k \geq 2 \end{cases} \quad (9.61)$$

La ventaja de esta transformación es que la variable ángulo w_1 será constante.

9.2.3. El problema de Képler

Reformulemos el problema de Képler usando las variables ángulo-acción. Estas últimas están definidas por las integrales:

$$J'_3 = \frac{1}{2\pi} \oint p_\phi d\phi = L_z \quad (9.62a)$$

$$J'_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}} d\theta \quad (9.62b)$$

$$J'_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{L^2}{r^2}} dr \quad (9.62c)$$

La primera integral es trivial; las otras dos se calculan con facilidad usando integración en el plano complejo. El resultado es:

$$J'_3 = L_z \quad (9.63a)$$

$$J'_2 = L - L_z \quad (9.63b)$$

$$J'_1 = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2m}{-E}} - L \quad (9.63c)$$

Estas tres ecuaciones permiten eliminar las constantes (E, L, L_z) en función de las variables J'_i . En particular, el hamiltoniano resulta:

$$H = -\frac{\frac{1}{2}m\alpha^2}{(J'_1 + J'_2 + J'_3)^2} \quad (9.64)$$

De esta ecuación comprobamos (como, por otra parte, lo sabemos ya) que el sistema es degenerado, con una única frecuencia:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = n = \frac{m\alpha^2}{(J'_1 + J'_2 + J'_3)^3} \quad (9.65)$$

y por lo tanto, el movimiento es periódico.

Para completar la transformación canónica, calculemos las variables acción. En lugar de trabajar directamente con la función principal, que lleva a cálculos largos, observemos que las variables canónicas conjugadas a L_z, L, E son, respectivamente, $-\Omega, -\omega, -t_0$. La transformación canónica:

$$F_2 = J'_3\Omega + (J'_2 + J'_3)\omega - \frac{m\alpha^2}{(J'_1 + J'_2 + J'_3)^2}(t - t_0) \quad (9.66)$$

Proporciona las correctas variables cuando se deriva respecto de las constantes β ; además, transforma correctamente el hamiltoniano. Pro lo tanto, genera la transformación deseada:

$$w'_3 = \Omega + \omega + n(t - t_0) \quad (9.67a)$$

$$w'_2 = \omega + n(t - t_0) \quad (9.67b)$$

$$w'_1 = n(t - t_0) \quad (9.67c)$$

La última cantidad es la *anomalía media* de la órbita.

En lugar de las variables J'_i, w'_i , en astronomía es usual emplear otras variables más cómodas. La dependencia del tiempo de las variables w'_i , puede simplificarse si en su lugar se utilizan diferencias. Esto se logra con otra transformación canónica, generada por:

$$F'_2 = J_1w'_1 + J_2(w'_2 - w'_1) + J_3(w'_3 - w'_2) \quad (9.68)$$

genera una transformación canónica a un conjunto de variables llamadas *variables de Delaunay*:

$$J_1 = \sqrt{m\alpha a} \quad w_1 = n(t - t_0) \quad (9.69)$$

$$J_2 = L \quad w_2 = \omega \quad (9.70)$$

$$J_3 = L_z \quad w_3 = \Omega \quad (9.71)$$

Este nuevo conjunto de variables tiene la ventaja de que sólo w_1 es una función explícita del tiempo; w_2, w_3 son constantes de movimiento. Las variables de

Delaunay, o conjuntos construidos con ellas, son sumamente importantes en la teoría de perturbaciones de la mecánica celeste o en la aproximación semiclásica en mecánica cuántica.

Todas las variables canónicas pueden desarrollarse en serie de Fourier de las variables de Delaunay. Estos desarrollos, sumamente complejos, son la base de la Teoría de Perturbaciones en Mecánica Celeste.

Problemas 9.2

Problema 9.2.1.

Hallar las variables ángulo-acción de los siguientes sistemas:

1. Partícula en una caja cuadrada.
2. Rotador (cuerpo rígido con un eje fijo).
3. Partícula en el potencial:

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2 ax}$$

4. Partícula en el potencial

$$V'(x) = V_0 \left[\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right]$$

Expresar los hamiltonianos en función de J y calcular las respectivas frecuencias de oscilación.

Problema 9.2.2.

En los sistemas del problema anterior, desarrollar las variables canónicas en serie de Fourier de las variables ángulo.

Problema 9.2.3.

Tratar el oscilador armónico bidimensional usando variables ángulo-acción:

1. En coordenadas cartesianas (x, y) .
2. En coordenadas polares (r, ϕ) .
3. Hallar la conexión entre las variables (J_x, J_y) y las variables (J_r, J_ϕ)

Problema 9.2.4.

Tratar el cuerpo simétrico libre usando variables ángulo-acción. Hallar explícitamente:

1. las frecuencias de precesión;
2. las cordenadas como series de Fourier.

9.3. Teoría Canónica de Perturbaciones

Las variables ángulo-acción proporcionan una forma elegante para tratar el problema de un hamiltoniano no separable en forma perturbativa. En efecto, supongamos que el hamiltoniano tenga la forma general:

$$H = H_0 + \epsilon H_P \quad (9.72)$$

en donde H_0 , además de ser separable, debe cumplir algunas condiciones adecuadas de regularidad, ϵ es un parámetro pequeño y H_P , el *hamiltoniano perturbador*, es una función general de las coordenadas canónicas (q, p) y, eventualmente, del tiempo t . Usando las variables ángulo-acción, H_0 será sólo función de las J , mientras que el hamiltoniano perturbador H_P será una serie de Fourier generalizada de las variables w , con coeficientes que dependen sólo de J . Existe una forma muy elegante de tratar estos hamiltonianos, llamada la *teoría canónica de perturbaciones*.

9.3.1. El problema unidimensional

Examinemos, en primer lugar, el problema unidimensional que, aunque es siempre separable, ilustra con mucha sencillez las ideas de la teoría. En este tipo de problemas, separamos el hamiltoniano en una parte H_0 , cuya solución se conozca, y una perturbación H_P . Sean (w, J) las variables ángulo-acción para el hamiltoniano H_0 . Entonces, el hamiltoniano total se escribe:

$$H = H_0(J) + \epsilon H_P(J, w) \quad (9.73)$$

La idea central de la teoría de perturbaciones es buscar una transformación canónica a nuevas variables (w', J') que reduzca (9.73) a la forma:

$$H' = H'(J') + O(\epsilon^2) \quad (9.74)$$

es decir, eliminamos las variables ángulo a primer orden en el parámetro ϵ . Supongamos, en primer lugar, que ϵ sea infinitesimal. Nuestra transformación canónica infinitesimal tendrá, en ese caso, un generador infinitesimal $G^{(1)}$ tal que:

$$J' = J + \epsilon \{J, G\} \quad (9.75a)$$

$$w' = w + \epsilon \{w, G\} \quad (9.75b)$$

El hamiltoniano transformado toma la forma:

$$H' = H + \epsilon \{H, G\} + \epsilon \frac{\partial G}{\partial t} \quad (9.76)$$

no contenga términos periódicos en la variable ángulo w . Como

$$H_P(w, J) = \sum_n H_n^P(J) \cos nw \quad (9.77)$$

no depende del tiempo, busquemos un generador infinitesimal en la forma:

$$G = \sum_n [G_n^c(J) \cos nw + G_n^s(J) \operatorname{sen} nw] \quad (9.78)$$

Sustituyamos ahora (9.78) en (9.76) y exijamos que se cancelen los términos periódicos de orden ϵ :

$$\sum_{n>0} H_n^P(J) \cos nw + \{H_0, G\} = 0 \quad (9.79)$$

Puesto que H_0 es sólo función de J , se cumple:

$$\begin{aligned} \{H_0, G\} &= -\frac{\partial H_0}{\partial J} \frac{\partial G}{\partial w} \\ &= -\omega_0 \sum_{n>0} n [G_n^s(J) \cos nw - G_n^c(J) \operatorname{sen} nw] \end{aligned}$$

en donde ω_0 es la frecuencia no perturbada del sistema.

Sustituyendo esta última expresión en (9.79) e igualando hallamos:

$$\begin{aligned} G_n^s(J) &= \frac{H_n^P(J)}{n\omega_0} \\ G_n^c(J) &= 0 \end{aligned} \quad (9.80)$$

El término perturbador con $n = 0$ no se cancela, y de este modo, el hamiltoniano transformado a primer orden de teoría de perturbaciones es igual a:

$$H' = H_0(J') + \epsilon H_0^P(J') + O(\epsilon^2) \quad (9.81)$$

y la frecuencia correspondiente es:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\partial H'}{\partial J'} = \omega_0 + \delta\omega \\ \delta\omega &= \epsilon \frac{\partial H_0^P(J')}{\partial J'} \end{aligned} \quad (9.82)$$

La nueva variable J' es independiente del tiempo a primer orden en ϵ , y w' crece linealmente con el tiempo. Las variables originales se hallan invirtiendo la transformación canónica (9.75):

$$J = J' - \epsilon \{J', G\} \quad (9.83a)$$

$$w = w' - \epsilon \{w', G\} \quad (9.83b)$$

Es posible describir la teoría de perturbaciones a primer orden diciendo que el punto representativo del sistema se mueve sobre una curva de fase perturbada.

Aplicamos la teoría de perturbaciones al oscilador armónico perturbado que estudiamos en la Sección 2.2. El hamiltoniano del sistema será:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 + \frac{1}{4}\epsilon m\omega_0^2 q^4 \quad (9.84)$$

con la abreviatura $\lambda^2 = \epsilon\omega^2$. Usando las variables ángulo-acción para el oscilador armónico (Sección 9.2.1) el hamiltoniano se escribe:

$$\begin{aligned} H &= \omega_0 J + \frac{\epsilon}{4} \left(\frac{2J}{m\omega_0} \right)^2 \omega_0^2 \sin^4 w \\ &= \omega_0 J + \frac{\epsilon}{m} J^2 \sin^4 w \\ &= \omega_0 J + \frac{3}{8}\epsilon \frac{J^2}{m} - \epsilon \frac{J^2}{m} \left(\frac{1}{2} \cos 2w - \frac{1}{8} \cos 4w \right) \end{aligned} \quad (9.85)$$

y de esta ecuación deducimos inmediatamente:

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{4}\epsilon \frac{J}{m} \quad (9.86)$$

que coincide con el valor calculado en la Sección 2.2. El generador infinitesimal de la transformación se calcula inmediatamente a partir de (9.85):

$$G = -\frac{J^2}{4m} \left(\sin 2w - \frac{1}{8} \sin 4w \right)$$

y las variables transformadas son:

$$\begin{aligned} J &= J' + \epsilon \frac{J'^2}{4m} \left(\cos 2w' - \frac{1}{2} \cos 4w' \right) \\ w &= w' - \epsilon \frac{J'}{2m} \left(\sin 2w' - \frac{1}{8} \sin 4w' \right) \end{aligned}$$

donde

$$w' = \omega_0 t + \phi$$

Es fácil comprobar que estas expresiones son las mismas que las obtenidas en las Sección 2.2, con el método Bogoljubov-Krylov.

9.3.2. Perturbaciones de orden superior

Examinemos ahora la teoría de perturbaciones a segundo orden. En primer lugar, hallemos el hamiltoniano calculando las transformadas de Lie correspondientes al primer orden de la teoría hasta segundo orden:

$$H'(J') = H(J) + \epsilon \{H(J), G\} + \frac{1}{2}\epsilon^2 \{\{H(J), G\}, G\} + O(\epsilon^3)$$

Sustituyendo ahora los resultados de la Sección 9.3.1 hallamos:

$$\begin{aligned} H'(J') &= H_0(J') + \epsilon H_0^P(J') + \epsilon^2 \{H_I, G\} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \{\{H_0(J), G\}, G\} + O(\epsilon^3) \\ &= H_0(J') + \epsilon H_0^P(J') + \frac{1}{2} \epsilon^2 \{H_P, G\} \end{aligned} \quad (9.87)$$

Éste es el hamiltoniano transformado hasta segundo orden en ϵ . Podemos simplificarlo si usamos las expresiones (9.77) y (9.80) para la perturbación y la función generatriz respectivamente:

$$\begin{aligned} \Delta H^2 &= \{H_P, G\} \\ &= \left[-\sum_n n H_n^P \operatorname{sen} nw \right] \left[\sum_m \frac{\partial H_m^P}{\partial J} \frac{\operatorname{sen} mw}{m\omega_0} \right] \\ &\quad - \left[\sum_n \frac{\partial H_n^P}{\partial J} \cos nw \right] \left[\sum_m \frac{H_m^P}{\omega_0} \cos mw \right] \\ &= -\sum_n \frac{H_n^P}{\omega_0} \frac{\partial H_n^P}{\partial J} + \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} \tilde{H}_{mn} \cos [(m+n)w + \phi_{mn}] \\ &= \Delta H_0 + \Delta H_P \end{aligned}$$

en donde los coeficientes \tilde{H}_{mn} y las fases ϕ_{mn} son en general, funciones de J fácilmente calculables. El hamiltoniano transformado tiene, pues, la forma:

$$H'(J') = H_1 + \epsilon^2 H_P^{(1)} \quad (9.88a)$$

$$H_1 = H_0(J') + \epsilon H_0^P(J') \quad (9.88b)$$

$$H_P^{(1)} = \Delta H_0 + \Delta H_P \quad (9.88c)$$

El hamiltoniano transformado tiene la misma estructura que el original: un término constante, que depende sólo de J y una suma de términos periódicos en la variable w . Una transformación de Lie correctamente elegida, de generador G' elimina los términos periódicos en el hamiltoniano (9.88) introduciendo variables canónicas (w'', J'') :

$$w'' = w' + \epsilon^2 \{w', G'\} \quad (9.89a)$$

$$J'' = J' + \epsilon^2 \{J', G'\} \quad (9.89b)$$

con

$$H'' = H_1(J'') + \epsilon^2 \Delta H_0(J'') + O(\epsilon^3) \quad (9.90)$$

El procedimiento puede continuarse para hallar términos de orden superior.

9.3.3. Invariantes adiabáticos

Existen muchos sistemas físicos cuyos parámetros varían muy lentamente con el tiempo. Un ejemplo sencillo, es un péndulo cuya longitud l varía lentamente $\dot{l}/l \ll \omega$. En general, sea $H(p, q, \lambda)$ el hamiltoniano de un sistema que depende de un parámetro λ . Diremos que el sistema sufre un cambio *adiabático* si la tasa de variación del parámetro λ , es mucho menor que las frecuencias del sistema, es decir:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \ll \omega_i \quad (9.91)$$

Estos cambios introducen perturbaciones seculares en el sistema, que no pueden expresarse fácilmente con las variables ángulo.

Sin embargo, una propiedad muy importante de las variables acción J_i es que son invariantes bajo cambios adiabáticos de los parámetros del sistema. $W(q, J, \lambda)$ la función generatriz de la transformación a variables ángulo-acción, determinada para un parámetro constante. Consideremos, por ejemplo, el caso unidimensional. Sea:

$$H = H[q, p, \lambda(t)] \quad (9.92)$$

$$\simeq H[q, p, \lambda(t_0)] + (t - t_0)\dot{\lambda}(t_0) \left. \frac{\partial H(q, p, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{t_0} \quad (9.93)$$

Esta última ecuación es válida durante un intervalo $|t - t_0| < \tau$, largo comparado con el periodo de oscilación pero corto comparado con la escala de variación del parámetro, $1/\omega \ll \tau \ll \lambda/\dot{\lambda}$.

El segundo término de (9.93) constituye un hamiltoniano perturbador de la forma (9.73), que podemos tratar usando teoría canónica de perturbaciones. Hay, sin embargo, varias simplificaciones que pueden hacerse, debido a la lentitud de la variación de λ . En primer lugar, transformemos (9.93) a variables ángulo-acción, usando la función W que corresponde al hamiltoniano no perturbado:

$$H' = H_0(J) + (t - t_0)\dot{\lambda}(t_0) \left. \frac{\partial H_0(J, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{t_0} \quad (9.94)$$

Busquemos ahora una transformación canónica infinitesimal que elimine el término secular de (9.94). Si G es el generador infinitesimal, éste debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$\{H_0, G\} + \frac{\partial G}{\partial t} = -(t - t_0)\dot{\lambda}(t_0) \left. \frac{\partial H_0(J, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{t_0} \quad (9.95)$$

en donde hemos absorbido el parámetro pequeño en la definición de G . En la aproximación en que estamos trabajando no hay dependencia con la variable ángulo w , y hallamos:

$$G_{\text{sec}} = -\frac{1}{2}(t - t_0)^2 \dot{\lambda}(t_0) \left. \frac{\partial H_0(J, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{t_0} \quad (9.96)$$

y los correspondientes cambios en las variables ángulo-acción son:

$$J' = J \quad (9.97a)$$

$$w' = w - \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \quad (9.97b)$$

en donde

$$a = \dot{\lambda}(t_0) \left. \frac{\partial H_0(J, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{t_0} \quad (9.98)$$

se suele llamar, en astronomía, la *aceleración secular* de w . La ecuación (9.97a) muestra que la variable acción es, efectivamente, un invariante adiabático.

La existencia de invariantes adiabáticos permite discutir cualitativamente el comportamiento secular de sistemas complejos. Como un ejemplo sencillo, consideremos un péndulo cuya cuerda se acorta lentamente. En la aproximación de pequeñas oscilaciones:

$$E = J \sqrt{\frac{g}{l}}$$

en donde hemos usado la ecuación (9.50) para la acción del oscilador. Entonces:

$$\theta = \sqrt{\frac{2J}{l_0 \sqrt{g}}} \cos w$$

$$w = \sqrt{\frac{g}{l_0}} t - \frac{1}{4} \frac{\dot{l}}{l} \sqrt{\frac{g}{l_0}} t^2$$

Problemas 9.3

Problema 9.3.1.

Tratar con la teoría canónica de perturbaciones el movimiento unidimensional en el potencial

$$V(x) = \frac{V_0}{\cosh ax}$$

Problema 9.3.2.

Tratar el problema del trompo veloz con la teoría canónica de perturbaciones.

Problema 9.3.3.

Mostrar que los hamiltonianos que dependen explícitamente del tiempo en la forma

$$H = H_0(p, q) + V(q) \cos \Omega t$$

pueden reducirse a la forma ya tratada introduciendo la variable ángulo auxiliar

$$w_0 = \Omega t$$

Determinar la variable ángulo asociada y hallar el hamiltoniano efectivo para el sistema.

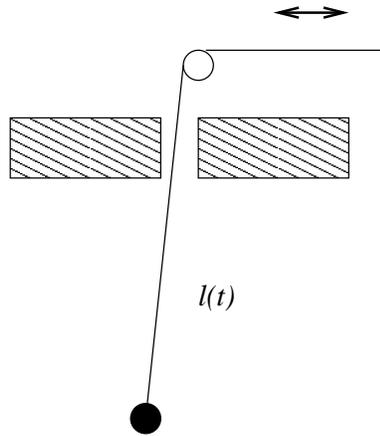


Figura 9.4: Péndulo con longitud variable

Problema 9.3.4.

Usando los resultados del problema precedente, hallar la perturbación de primer orden de un péndulo cuyo hilo se tira en forma periódica Figura 9.4:

$$l = l_0(1 + \epsilon \cos \Omega t)$$

Problema 9.3.5.

Una hipótesis común en la física moderna es que la constante de gravitación varía lentamente con el tiempo. Hallar la perturbación de las variables ángulo w_i inducida por dicha variación.

9.4. Resonancias y toros

En las secciones anteriores hemos desarrollado una teoría general de la integración de un sistema dinámico hamiltoniano, basado sobre la ecuación de Hamilton-Jacobi. Si se obtiene una solución completa de la misma, el movimiento del sistema dinámico queda completamente determinado por el teorema de Jacobi Sección 9.1.1. Por lo general, esta integral completa estará expresada como una serie perturbativa (Sección 9.3.2) y la existencia de la solución completa depende de la convergencia de esta serie. Tanto la pequeñez de la perturbación como la existencia de denominadores pequeños son impedimentos para la convergencia y, cuando ésta desaparece, hay fenómenos nuevos que se presentan en el sistema hamiltoniano. La aparición de *resonancias* y de *movimiento caótico* son característicos de el régimen no perturbativo en un sistema hamiltoniano.

9.4.1. Resonancias

El método desarrollado en la Sección 9.3 permite, en principio, hallar una solución analítica del problema dinámico definido por un hamiltoniano de la forma (9.72). Sin embargo, para que esto sea cierto, la serie perturbativa generada en la Sección 9.3.2 debe ser convergente. En el caso unidimensional esto ocurre con frecuencia, pero cuando hay dos o más grados de libertad se presenta el problema de *pequeños denominadores* que ya mencionamos en la Sección 2.4.1. El origen de los mismos no es difícil de hallar; examinemos, por ejemplo, un problema con dos grados de libertad:

$$H = H_0(J_1, J_2) + H_P(J_1, w_1, J_2, w_2) \quad (9.99)$$

en donde el hamiltoniano perturbador puede desarrollarse en serie de Fourier generalizada de las variables ángulo:

$$H_P = \sum_{m,n} H_{mn}(J_1, J_2) \cos(mw_1 + nw_2) \quad (9.100)$$

Por analogía con (9.78) busquemos el generador de una transformación canónica infinitesimal que elimine a primer orden H_P , en la forma:

$$G = \sum_{m,n} [G_{mn} \sin(mw_1 + nw_2)] \quad (9.101)$$

Procediendo como anteriormente, hallamos la ecuación:

$$[n\omega_1(J_1, J_2) + m\omega_2(J_1, J_2)] G_{mn} = H_{mn}(J_1, J_2) \quad (9.102)$$

Esta ecuación permite determinar el coeficiente G_{mn} y, si la serie perturbativa converge, el movimiento del sistema se producirá sobre un *toro perturbado*, determinado a primer orden por la transformación canónica generada por G . Pero cuando se cumple la *condición de resonancia*:

$$n\omega_1 + m\omega_2 = 0 \quad (9.103)$$

la serie perturbativa (9.101) no existe y por lo tanto no hay transformación canónica a un toro perturbado. Pero aunque no haya resonancia exacta, la presencia de un denominador pequeño:

$$n\omega_1 + m\omega_2 \ll |\omega_1 + \omega_2| \quad (9.104)$$

impedirá, en muchos casos, la convergencia de la serie perturbativa.

Examinemos con más cuidado la condición de resonancia (9.103). Como las frecuencias son funciones de las variables acción, existirá una curva en el plano (J_1, J_2) en la que se cumple dicha condición para el hamiltoniano no perturbado.

Para examinar el movimiento en el entorno de esta curva, hagamos una transformación canónica a nuevas variables, de función generatriz:

$$F_2 = (mw_1 + nw_2)J + w_2J'_2 \quad (9.105)$$

Las nuevas variables son las *variables resonantes*:

$$w = mw_1 + nw_2 \quad (9.106a)$$

$$J = \frac{J_1}{m} \quad (9.106b)$$

y desarrollando el hamiltoniano en serie de Taylor en J se obtiene el *hamiltoniano resonante*:

$$H_R = \frac{A}{2}J^2 + B \cos w \quad (9.107)$$

en donde hemos despreciado los términos no resonantes, que pueden eliminarse a primer orden con una transformación de la forma (9.101).