

Zusammenfassender Bericht.

Kernumwandlungen als Energiequelle der Sterne.

Von **G. Gamow**, George Washington University, Washington D. C.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 25. Mai 1938.)

1. Allgemeines über Kernumwandlungen. — 2. Geschwindigkeiten thermischer Kernumwandlungen. — 3. Umwandlungsketten und Aufbauhypothese. — 4. Sternmodelle mit Kernenergiequellen. — 5. Superdichter Materiezustand in Sternen. — 6. Pulsationen und Explosionen von Sternen.

Einleitung.

Die Frage nach den Energiequellen der Sterne ist eine der wichtigsten und interessantesten Fragen der modernen Astrophysik. Nachdem die alte Kontraktionshypothese von HELMHOLTZ versagt hat, da sie nicht imstande war, die durch die astronomischen und geologischen Daten geforderten, langen Lebensdauern unserer Sonne und anderer Sterne zu erklären, war die Frage sehr dunkel geblieben, bis die moderne Physik die Möglichkeit einer kolossalen Energieentwicklung in den Prozessen der Kernumwandlungen entdeckt hat. Heutzutage wissen wir genügend über die Eigenschaften der Materie, um über solche Umwandlungen bei den charakteristischen Verhältnissen sehr hoher Temperaturen und großer Dichten bestimmte Voraussetzungen machen zu können. Wir sollten deshalb erwarten, daß es durch die Anwendung unserer heutigen Kenntnis der Kernphysik möglich sein muß, die Fragen der Energieentwicklung und der inneren Struktur der Sterne, sowohl wie die wichtigen Probleme der Sternevolution eindeutig zu beantworten.

Nun tritt hier eine sehr wichtige Frage auf: Kann man die heutigen Eigenschaften der verschiedenen Sternarten verstehen, ohne spezielle Hypothesen über die Verhältnisse zu der Zeit, als die Sterne entstanden sind, zu machen? In der Tat zeigen die Untersuchungen über die Rotverschiebung in den Spektren der entfernten (extragalaktischen) Nebel, daß unser Universum sich im Zustande sehr rascher Expansion befindet. Es läßt sich einfach berechnen, daß die verschiedenen Nebel vor etwa $2 \cdot 10^9$ Jahren noch nicht separiert waren und die einzelnen Sterne viel näher zueinander standen als jetzt¹⁾.

¹⁾ Nach den Untersuchungen von HUBBLE ist die Expansionsgeschwindigkeit der Nebel ihrem Abstände proportional, und zwar ist diese Geschwindigkeit etwa $1,6 \cdot 10^7$ cm/sec für den Abstand von 10^6 Lichtjahren. Da der mittlere Abstand zwischen benachbarten Nebeln etwa $2 \cdot 10^6$ Lichtjahre ist, bekommen wir (bei Annahme einer konstanten Expansionsgeschwindigkeit in der Vergangenheit) für das gesuchte Zeitintervall $7 \cdot 10^{16}$ sec oder $2 \cdot 10^9$ Jahre.

Es ist naheliegend, die Entstehung von Sternen der kontinuierlich verteilten, welterfüllenden Materie dieser Epoche zuzuschreiben, besonders weil auch nach verschiedenen anderen astronomischen Betrachtungen die Sterne jetzt gerade etwa 10^9 Jahre alt sind. Da die physikalischen Verhältnisse in dieser weit entfernten Epoche höchst hypothetisch sind, ist hier ein breites Feld für Spekulationen über die Entstehung von Sternen und ihre Eigenschaften „in statu nascendi“ eröffnet. Z. B. könnten wir annehmen, daß bei den ungeheuer großen Dichten und Temperaturen, die diesem jungen Stadium des Universums entsprachen, die radioaktiven Elemente (wie Uran und Thor) in großen Mengen produziert wurden, und daß das heutige Leben der Sterne hauptsächlich auf dem Verbrauch von den am Anfang akkumulierten Kernenergien basiert. In diesem Bericht wollen wir aber auf solche Spekulationen nicht näher eingehen und werden nur untersuchen, was man über den heutigen Zustand der Sterne sagen kann und wie weit die Probleme der Sternentwicklung ohne Rückkehr zum Entstehungsprozeß verfolgbar sind. Die aus solchen Untersuchungen erhaltene Kenntnis wird uns natürlich zu einer Reihe von wichtigen Schlüssen führen, die man später für die Lösung schwieriger Probleme über die Entstehung der Sterne gebrauchen kann.

1. Allgemeines über Kernumwandlungen.

Bei einem Zusammenstoß zwischen zwei Kernen kann man dann und nur dann eine Kernumwandlung erwarten, wenn die beiden Kerne so nahe zueinander kommen, daß die zwischen den Kernbausteinen wirkenden inneren Kräfte, eine starke Kopplung zwischen den Strukturen der beiden Kerne verursachen können. Da alle Kerne, mit Ausnahme der Neutronen, positive elektrische Ladungen tragen, müssen die zusammenstoßenden Kerne genügend große kinetische Energie haben, um die Wirkung der Coulomb-Abstoßungskraft zu überwinden. Für solche Eindringungen ist es aber nicht notwendig, daß die relative kinetische Energie der zusammenstoßenden Teilchen größer sei als die Höhe der Potentialschwelle, da, wie zuerst vom Verfasser gezeigt wurde, solche Eindringungen nach den Gesetzen der Wellenmechanik schon viel früher anfangen. Stellen wir die einfallenden Teilchen als eine ebene Welle dar, so ist der *Zusammenstoßquerschnitt* für zentralen Stoß durch das Quadrat der DE BROGLIESchen Wellenlänge gegeben:

$$\sigma \approx \frac{A^2}{4\pi} = \frac{\pi \hbar^2}{m^2 v^2}, \quad (1)$$

wo \bar{m} steht für reduzierte Masse und v für die relative Geschwindigkeit der zusammenstoßenden Teilchen¹⁾.

Bei Integration der SCHRÖDINGERSchen Wellengleichung im Gebiet der Potentialschwelle bekommen wir für zentralen Stoß den folgenden angenäherten Ausdruck für das *Durchlässigkeitsvermögen* der COULOMBSchen Potentialschwelle:

$$G \simeq e^{-\frac{2\sqrt{\bar{m}}}{\hbar} \int_{r_0}^{\infty} \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E} dr}, \quad (2)$$

wo $Z_1 e$, $Z_2 e$ und E die Ladungen und die relative kinetische Energie bedeuten und r^0 der Kernradius ist, d. h. der Abstand, bei dem die inneren Anziehungskräfte die elektrostatische Abstoßung überwiegen. Nach Ausrechnung des Integrals in (2) und Multiplikation mit Zusammenstoßquerschnitt (1) finden wir für den effektiven *Eindringungsquerschnitt*:

$$\sigma \simeq \frac{\pi \hbar^2}{m^2 v^2} e^{-\frac{2\pi e^2 Z_1 Z_2}{\hbar v} + \frac{4e\sqrt{2\bar{m}}}{\hbar} \sqrt{Z_1 Z_2} r_0}. \quad (3)$$

Diese Formel gilt nur für zentrale Stöße mit der relativen Drehimpulszahl $j = 0$. Für nichtzentrale Stöße muß dieser Querschnitt noch mit dem Faktor $(v_0/A)^{2j}$ multipliziert werden; für Zusammenstöße mit kleiner Relativenergie, die uns im folgenden besonders interessieren werden, ist $A \gg v_0$, deshalb werden die zentralen Stöße allein für die Eindringungen wichtig sein. Die Formel (3) zeigt uns ohne weiteres, daß mit Ausnahme der Beschießung mit Neutronen die Eindringungswahrscheinlichkeit sehr rasch mit wachsender Atomnummer der beschossenen Kerne abfällt. Für einen gegebenen Kern fällt diese Wahrscheinlichkeit auch mit wachsender Ladung und Masse der beschießenden Teilchen ab und wächst rasch mit wachsender Zusammenstoßenergie $\left(\frac{Z}{v} \sim \frac{Z\sqrt{\bar{m}}}{\sqrt{E}}\right)$.

Vergleichen wir z. B. die Beschießung mit Protonen und mit α -Teilchen derselben Energie, so werden die Protonen in Kerne von viermal größerer Atomnummer eindringen können; für einen gegebenen beschossenen Kern müssen α -Teilchen 16mal größere Energie haben, um dieselbe Eindringungswahrscheinlichkeit wie Protonen zu haben.

¹⁾ $\hbar = h/2\pi$ ist eine heutzutage oft gebrauchte Bezeichnung.

Wenn man für die Beschießung noch schwerere Teilchen als α -Teilchen benutzt, ist der effektive Eindringungsquerschnitt sogar für die leichten Kerne so klein, daß man für im Laboratorium verwendbare Energien (einige Millionen Elektronvolt) keine merkbaren Effekte erwarten kann. Wie bekannt, haben die zahlreichen Experimente bei der Beschießung von verschiedenen Kernen mit Protonen und α -Teilchen alle obenerwähnten Schlüsse, sowie die durch die Formel (3) gegebene Abhängigkeit der Eindringungswahrscheinlichkeit von der Energie vollständig bestätigt.

Wenn die beschießenden Teilchen die Potentialschwelle des Kernes überwinden und sozusagen mit der inneren Kernstruktur in direkten Kontakt kommen, so treten sie unter den Einfluß von Kräften derselben Natur und Größenordnung, die auch die einzelnen Elementarkernbausteine zusammenhalten. Aus den Streuungsversuchen zwischen Elementarteilchen (Proton-Proton- und Proton-Neutron-Zusammenstöße) wissen wir, daß diese Kräfte einer sehr starken Anziehung entsprechen, welche bei Abständen von der Größenordnung 10^{-13} cm anfängt und mit abnehmender Entfernung sehr rasch zunimmt. Es scheint auch, daß diese Kräfte zwischen schweren Elementarteilchen von derselben Größenordnung unabhängig davon sind, ob es sich um ein Protonenpaar, Neutronenpaar¹⁾ oder Neutron-Protonpaar handelt.

Ein komplexer Kern, der aus einer großen Anzahl von Teilchen gleicher Masse aufgebaut ist und durch die zwischen allen diesen Teilchen gleich wirkenden, mit ihrem Abstand schnell abfallenden Anziehungskräfte zusammengehalten wird, dürfte in seinen Eigenschaften eine tiefgehende Analogie mit einem *Flüssigkeitströpfchen* zeigen. Kommt ein schnelles äußeres Teilchen ins Innere dieser Struktur, so sollte man erwarten, daß es, wie zuerst von BOHR²⁾ betont wurde, wegen der starken Wechselwirkungen mit den anderen Teilchen sehr rasch alle seine Energie auf die anderen Kernbausteine gleichmäßig verteilen wird. Die Überschußenergie, die aus kinetischer und Bindungs-Energie des einfallenden Teilchens zusammen-

¹⁾ Da keine Neutron-Neutron-Streuungsversuche vorhanden sind, kann man die Schlüsse über Neutron-Neutron-Kräfte nur indirekt aus der Modellrechnung von einfachen Kernen ziehen. — ²⁾ Dieses Bild entspricht den neuen von BOHR eingeführten Vorstellungen vom Kernbau. Früher hat man oft falscherweise angenommen, daß die in den Kern eindringenden Teilchen sich in einem gemittelten Potentialfeld der anderen Teilchen bewegen und nur in seltenen Fällen ihre Energie anderen Kernbausteinen durch Zusammenstöße übertragen. Die Experimente mit Neutronen, wo wegen der Abwesenheit der Potentialschwelle die Umstände besonders klar sind, haben die Fehler des alten Gesichtspunktes besonders klar gezeigt.

gesetzt ist, wird jetzt gleichmäßig auf die verschiedenen Freiheitsgrade des Kernes verteilt. Nach unserer Analogie mit dem Flüssigkeitströpfchen können wir sagen, daß der zusammengesetzte Kern eine gewisse *Temperatur* bekommt, die man durch die Gleichung $E = \frac{3}{2} k T N$ ($N =$ die Anzahl der Kernteilchen) definiert. Nach dieser Definition ist z. B. die Temperatur des Bleikernes, der ein langsames Neutron eingefangen hat, etwa $3 \cdot 10^8$ °C. Dieser Energieüberschuß kann jetzt auf viele verschiedene Weisen verbraucht werden. Erstens kann diese Energie durch eine Fluktuation wieder in das eingefangene Teilchen zusammenfließen und seine Reemission verursachen; dieser Fall unterscheidet sich nicht von der gewöhnlichen Streuung. Zweitens kann diese Energie zur Herauswerfung eines anderen Kernbausteines führen und wir haben dann den Fall von Kernumwandlung mit Teilchenauswechslung¹⁾. Drittens kann die Überschußenergie in Form von γ -Strahlung ausgestrahlt werden; in diesem Falle bleibt das eingefangene Teilchen im Kern stecken und wir bekommen den Aufbau des Kernes durch Strahlungseinfangung. Dazu ist zu bemerken, daß die Energieabgabe gewöhnlich nicht in einem Schritt geschehen wird, da es sehr unwahrscheinlich ist, daß sich die ganze Energie in einem Teilchen durch Fluktuation sammelt. Wird ein Teilchen ausgeworfen (erster und zweiter Fall), so bleibt der Kern oft in einem angeregten Zustande und wird nachher durch sekundäre γ -Strahlung in den Grundzustand übergehen²⁾. Auch in Strahlungseinfangungsprozessen wird die Energie gewöhnlich in einigen sukzessiven γ -Quanten ausgestrahlt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß sich in einem Teilchen die Energie E sammelt, ist im wesentlichen durch den Faktor

$$e^{-\frac{E}{kT}} \approx e^{-\frac{3}{2} N \frac{E}{E_0}} \quad (4)$$

gegeben und fällt mit E sehr rasch ab. Wenn es für die Emission von Teilchen kein Hindernis gibt (wie die Potentialschwelle), wird es also am wahrscheinlichsten nur ein wenig mehr Energie als die *Dissoziationsenergie* (die Arbeit, die notwendig ist, um die Teilchen an den Kern heranzuziehen) mitnehmen. In der Tat hat man für Neutronenstreuung beobachtet, daß die gestreuten Neutronen sehr viel kleinere Energien haben als die einfallenden (nichtelastischer Stoß mit Energieumwandlung in γ -Strahlung).

¹⁾ Ist das ausgestrahlte Teilchen schwerer als das eingefangene, so haben wir die Abbauprozesse (Abnahme des Atomgewichtes); im entgegengesetzten Fall haben wir die Aufbauprozesse, die zu schwereren Kernen führen. —

²⁾ Wir haben hier die unelastische Streuung oder die Umwandlung mit Aussendung von einigen Teilchengruppen mit verschiedenen Geschwindigkeiten.

Im Fall der Protonenemission ist die Situation etwas anders, weil die langsamen Protonen schwer durch die Potentialschwelle durchgehen können; aber auch in diesem Falle hat man für die Kernumwandlungen (durch α -Teilchen-Beschießung), bei denen Protonen herausgeschleudert werden, größere Intensität für langsame Protonengruppen beobachtet. Alle diese Tatsachen, die die Analogie zwischen Teilchenemission und *Verdampfung* von Flüssigkeitströpfchen in den Vordergrund stellen, sprechen zugunsten des neuen BOHRschen Kernmodells¹⁾.

Wenn wie gewöhnlich der beim Zusammenstoß gebildete Kern eine Anzahl von verschiedenen, energetisch möglichen Umwandlungswegen verfolgen kann, wird die relative Häufigkeit dieser verschiedenen Prozesse durch die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten bestimmt sein. Die Summe der Ausbeuten von verschiedenen Umwandlungswegen muß aber immer der Eindringungszahl der einfallenden Teilchen gleichbleiben. Als Beispiel betrachten wir die Zertrümmerungsprozesse, bei denen bei Beschießung durch sehr schnelle α -Teilchen sowohl Protonen wie auch Neutronen herausgeschleudert werden können. Die relative Wahrscheinlichkeit der Protonen- und Neutronenemission wird hier wohl von der totalen Anregungsenergie (also von der Energie des einfallenden α -Teilchens) stark abhängen. Für relativ kleine Energien wird der Fall für Neutronen günstiger sein, weil die langsamen Protonen durch die Potentialschwelle schwer hindurchgehen können; für größere Energien wird aber dieser Unterschied kleiner und kleiner werden. Da die verwendeten schnellen α -Teilchen immer über die Potentialschwelle des Kernes gehen, ändert sich die Eindringungswahrscheinlichkeit nur sehr wenig mit der Energie, und wir sollten erwarten, daß, obwohl die relative Anzahl von herausgeworfenen Neutronen und Protonen sich mit der Energie der beschießenden α -Teilchen stark ändert, die Summe beinahe konstant bleiben wird. Dieser Schluß ist durch die Experimente (von HAXEL) vollständig bestätigt worden.

Wir wollen jetzt auf die Frage nach den Quantenniveaus des Kernes etwas näher eingehen. Wie schon oben erwähnt, darf man wegen der starken Wechselwirkung zwischen den Kernbausteinen den angeregten Zustand des Kernes nicht als Anregung seiner einzelnen Bausteine betrachten (wie man es z. B. in der Atomtheorie immer tut).

¹⁾ Nach dem alten Modell würde das in den Kern hineinkommende Teilchen entweder ohne Energieverlust herausfliegen oder in seltenen Fällen einen beträchtlichen Teil seiner Gesamtenergie an das herausgeschleuderte Teilchen abgeben.

Eine viel bessere Annäherung kann man erwarten, wenn man die kollektive Bewegung von allen Kernbausteinen betrachtet und die Quantisierung der verschiedenen Eigenschwingungen des Gesamtkernes durchführt. Nach diesem Gesichtspunkte, der die Kernanregung als die Überlagerung von verschiedenen „Eigenschwingungen eines Flüssigkeitstropfens“ betrachtet, muß man zwischen zwei Arten von Eigenschwingungen unterscheiden:

1. *Volumenschwingungen*, welche durch die bei Abstandsänderungen zwischen den Kernbausteinen entstehenden *Elastizitätskräfte* verursacht werden;

2. *Formschwingungen*, welche mit *Oberflächenspannungskräften* verknüpft sind¹⁾.

Für die *Grundschnwingungsfrequenzen* bekommen wir nach den bekannten Formeln von Hydrodynamik:

$$\nu_V \simeq \varepsilon^{1/2} V^{-1/3} \varrho^{-1/2}, \quad (5)$$

$$\nu_F \simeq \omega^{1/2} V^{-1/2} \varrho^{-1/2}, \quad (5')$$

wo V das Kernvolumen ($= \frac{4}{3} \pi r_0^3$), ϱ die Kerndichte, ε und ω die Koeffizienten der Kernelastizität und Kernoberflächenspannung sind.

Aus dem bekannten Kraftgesetz zwischen den Elementarteilchen kann man ε und ω bestimmen und damit die Kerngrundfrequenzen ausrechnen. Es ergibt sich, daß die Volumenschwingungen zu Energien von der Größenordnung 100 MV²) führen, die zu groß sind, um die gewöhnlich beobachtete γ -Strahlung zu erklären. Dagegen entsprechen die Formschwingungen Energien von einigen MV und sind wahrscheinlich zusammen mit der gewöhnlichen Rotationsbewegung für die beobachtete γ -Strahlung verantwortlich.

Wie schon oben gesagt, sollte man jeden angeregten Zustand des Kernes als Überlagerung von verschiedenen *Obertönen* solcher Grundschnwingungen betrachten und die gesamte Anregungsenergie in erster Annäherung als die Summe von verschiedenen partiellen Schwingungen darstellen können. Nehmen wir an, daß die verschiedenen Grundschnwingungen beinahe dieselbe Frequenz haben und daß die Oberschnwingungsfrequenzen ganzzahlige Vielfache daraus sind, so können wir schreiben:

$$E \simeq \sum_i n_i E_0 = E_0 \sum_i n_i, \quad (6)$$

¹⁾ Solche Oberflächenkräfte entstehen immer, wenn die Wechselwirkung zwischen Teilchen, wie in Flüssigkeiten, sehr schnell mit der Entfernung abnimmt; sie spielen auch eine wichtige Rolle bei der Ausrechnung von Kernbindungsenergien. — ²⁾ 1 MV = 10⁶ Volt.

wo E_0 die Grundschwingungsenergie ist und n_i die Anregungszahl der i -ten Schwingung. In Wirklichkeit werden die beiden oben gemachten Annahmen wegen der Kopplung zwischen verschiedenen Schwingungen nur angenähert erfüllt sein und verschiedene Reihenfolgen von n_i , welche die Bedingung $n = \sum n_i = \text{const}$ erfüllen, werden zu etwas verschiedenen E -Werten führen. Für genügend große Anregungsenergien wird die Streuung der Energiewerte für gegebenes $n = E/E_0$ größer als die Elementarstufe E_0 sein, und die Niveaugruppen mit verschiedenen n werden vermischt sein.

Man kann nach BOHR die Anzahl der verschiedenen, zu bestimmtem n gehörenden Komponenten mit Hilfe der einfachen kombinatorischen Formel

$$p(n) = \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} e^{\pi\sqrt{2/3}n} \quad (7)$$

ausrechnen, die die Anzahl von Möglichkeiten gibt, eine gegebene ganze Zahl n durch die Summe von kleineren ganzzahligen Gliedern darzustellen.

Für die schweren Kerne ist gut bekannt, daß das Anregungsspektrum ungefähr bis 1 MV (die γ -Spektren von radioaktiven Stoffen) aus weitseparierten Niveaus mit einem mittleren Abstände von etwa 200 kV besteht. Wenn ein schwerer Kern ein langsames Neutron einfängt, so wird die gesamte Anregungsenergie ungefähr 8 MV. Setzen wir in (7) $n = E/E_0$ mit $E = 8$ MV und $E_0 = 200$ kV, so bekommen wir: $p(n) = p(40) = 2 \cdot 10^4$. Da diese Niveaus über das Energieintervall von 200 kV verstreut¹⁾ sind, wird der *mittlere Niveauabstand* etwa 10 e-Volt und die *Niveaudichte* $D = 0,1$ (e-Volt)⁻¹.

Die Niveauverteilung ist also bei solchen Anregungen schwerer Kerne, die ihren Dissoziationsenergien entsprechen, praktisch kontinuierlich, weil die Niveaubreiten auch von derselben Größenordnung sind.

Für leichte Kerne ist dagegen die erste Anregungsstufe (wegen des kleineren Kernradius) viel größer, und die kontinuierliche Niveauverteilung wird nur bei sehr hohen Anregungen vorkommen, die durch Einfangung von sehr energiereichen einfallenden Teilchen (kinetische Energien von 10^7 bis 10^8 e-Volt) zustande kommen. Die schematische Darstellung der Niveauverteilung in leichten (A) und schweren (B) Kernen ist in Abb. 1 gegeben.

¹⁾ Ist die Niveaustreuung innerhalb einer Gruppe größer als der Gruppenabstand, so werden einige Niveaus aus diesem Energieintervall herausfallen. Da aber die Niveaus von benachbarten Gruppen in diesem Falle in unser Energieintervall hereinkommen, bleibt die Berechnung der mittleren Niveaudichte unbeeinflusst.

Nach diesen Betrachtungen sollten wir erwarten, daß die langsamen Neutronen ¹⁾ sehr oft Resonanzphänomene beim Zusammenstoß mit schwereren Kernen zeigen. In der Tat hat man beobachtet, daß für eine Anzahl von schwereren Elementen (z. B. für Cd) der Einfangungsquerschnitt für langsame Neutronen einige tausend Mal größer ist als für benachbarte Elemente. Für leichtere Elemente ist die Niveauverteilung in der Nähe der Nullpunktsenergie weniger dicht und die Wahrscheinlichkeit, eine Resonanzstelle zu treffen, entsprechend kleiner. Doch kennen wir auch hier Beispiele von niedrigen Niveaus: beim Zusammenstoß zwischen Neutron und Proton hat man ein Niveau (das dem angeregten Deuteron entspricht) für etwa 40 kV. Wir werden später sehen, daß die Möglichkeit von Umwandlungen zwischen leichten Kernen, die die Resonanzerscheinung in der Nähe von 10 kV (thermische Energien für $4 \cdot 10^7$ °C) besitzen, eine große Rolle in den Sterntheorien spielen kann (siehe Abschnitt 4).

Ein Kern, der durch Eintreten eines einfallenden Teilchens (oder auf irgendwelche andere Weise, z. B. durch γ -Bestrahlung) in einen angeregten Zustand gebracht ist, kann entweder durch Aussendung eines seiner Bestandteile oder durch die γ -Ausstrahlung seine Überschußenergie abgeben ²⁾.

Die Teilchenaussendung, die analog dem gewöhnlichen Verdampfungsprozeß zu betrachten ist, haben wir schon oben diskutiert; die zugehörige *Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit* kann folgendermaßen abgeschätzt werden. Da die Teilchengeschwindigkeit innerhalb des Kernes von der Größenordnung \hbar/mr_0 ist, würde das Teilchen die Zeit mr_0^2/\hbar brauchen,

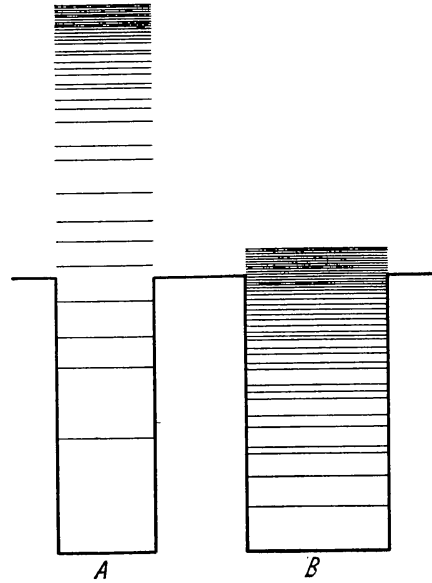


Abb. 1. Niveauverteilung in leichten (A) und schweren (B) Kernen.

¹⁾ D. h. Neutronen, welche durch eine wasserstoffhaltige Substanz (Paraffin, Wasser) hindurchgegangen sind und durch die Zusammenstöße mit Wasserstoffkernen ihre kinetische Energie bis zu dem Zimmertemperatur entsprechenden Wert von etwa 1 e-Volt erniedrigt haben. — ²⁾ Die Möglichkeit von β -Zerfallsprozessen werden wir später besprechen.

um, falls es keine Hindernisse gibt, den Kern zu verlassen, und die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit würde \hbar/mr_0^2 sein.

Diesen Wert muß man nun noch mit zwei Faktoren reduzieren: erstens mit dem statistischen Faktor (4), der die Wahrscheinlichkeit angibt dafür, daß sich genügend Energie in einem Teilchen sammelt; zweitens mit dem durch (2) gegebenen Durchlässigkeitsvermögen der Potentialschwelle. Das Wechselspiel der beiden Faktoren (die in entgegengesetzten Richtungen wirken) wird eine gewisse Intensitätsverteilung der ausgesandten Teilchengruppen geben (die verschiedenen Anregungszuständen des Restkernes entsprechen¹⁾). Die gesamte Aussendungswahrscheinlichkeit wird jetzt durch die Summation über alle Gruppen erhalten. Da wir uns im weiteren besonders für die Umwandlungen interessieren werden, für welche die Potentialschwelleneffekte besonders wichtig sind (Eindringung von langsamen Protonen), können wir den statistischen Faktor im Vergleich mit dem Durchlässigkeitsfaktor vernachlässigen, besonders weil die Unbestimmtheit im G -Faktor wegen unserer ungenauen Kenntnis der Kernradien, schon ziemlich groß ist. Wir schreiben also für die Zerfallskonstante:

$$\Gamma_{\text{Teil}} \approx \frac{\hbar}{m r_0^2} G. \quad (8)$$

Wie bekannt, steht diese Formel mit den experimentellen Untersuchungen über die natürliche α -Aktivität in guter Übereinstimmung.

Die Wahrscheinlichkeit für γ -Strahlung kann hier nach den gewöhnlichen Formeln der elektromagnetischen Strahlung für gequantelte Systeme berechnet werden. Nur muß man in Betracht ziehen, daß wegen des symmetrischen Charakters der Kerndeformationsschwingungen hier das elektrische Dipolmoment vollständig verschwinden oder jedenfalls sehr stark reduziert sein wird, und daß die Ausstrahlungswahrscheinlichkeit also durch das *Quadrupolmoment* gegeben sein wird. Dieser Schluß ist auch durch verschiedene experimentelle Tatsachen nachgeprüft worden. In der Tat haben die verschiedenen γ -Linien der Kernspektra, von denen einige Dipol-, andere Quadrupol-Übergängen entsprechen, Intensitäten von einer Größenordnung, die man nur dadurch erklären kann, daß das Kerndipolmoment sehr stark reduziert ist²⁾.

¹⁾ Für Neutronen entspricht das Maximum den niedrigsten Energien; für geladene Teilchen dagegen werden die Teilchen von mittlerer Energie die größte Wahrscheinlichkeit haben. — ²⁾ Der Intensitätsquotient zwischen Dipol- und Quadrupol-Strahlung ist durch $\left(\frac{1}{2\pi\nu_0}\right)^2$ gegeben, was für gewöhnliche γ -Strahlen etwa 1000 ist, falls das Dipolmoment nicht verschwindet.

Zu demselben Resultat kommt man durch den Vergleich der Wahrscheinlichkeiten für γ -Strahlung und für die Aussendung von weitreichenden α -Teilchen in schweren radioaktiven Kernen.

Die *Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit der Kern- γ -Strahlung* kann also mit guter Annäherung durch die Quadrupolformel

$$\Gamma_{\text{Strahlung}} \simeq \frac{Z^2 e^3 r_0^3}{m c^5} (2 \pi \nu)^4 \quad (9)$$

dargestellt werden. Die nach dieser Formel berechnete Wahrscheinlichkeit stimmt mit den experimentellen Bestimmungen gut überein.

Jetzt können wir den *effektiven Umwandlungsquerschnitt* berechnen für die Prozesse, bei denen ein Teilchen in den Kern hineinkommt und damit ein anderes Teilchen oder ein γ -Quantum emittiert wird.

In dem Fall, wo *keine Resonanz* vorliegt, muß man die durch (3) gegebene Eindringungswahrscheinlichkeit einfach mit der Emissionswahrscheinlichkeit pro eine Kernschwingungsperiode multiplizieren. Wir bekommen z. B. für den *effektiven Querschnitt der Strahlungseinfangung* einfallender geladener Teilchen:

$$\sigma \simeq \frac{A^2}{4 \pi} e^{-\frac{2 \pi e^2 Z_1 Z_2}{\hbar v} + \frac{4 e \sqrt{2 m}}{\hbar} \sqrt{Z_1 Z_2 r_0}} \cdot \frac{\Gamma_{\text{str}}}{\left(\frac{\hbar}{m r_0^2}\right)}. \quad (10)$$

Nach (9) können wir das auch in der Form schreiben:

$$\sigma \simeq \frac{A^2}{4 \pi} \frac{\Gamma_{\text{teil}}}{\left(\frac{\hbar}{m r_0^2}\right)} \cdot \frac{\Gamma_{\text{str}}}{\left(\frac{\hbar}{m r_0^2}\right)}, \quad (11)$$

wo Γ_{teil} die Wahrscheinlichkeit für die Aussendung des einfallenden Teilchens darstellen würde.

Im *Falle von Resonanz*, also bei solchen Beschießungsenergien, für welche die Energie des *Zwischenkernes*¹⁾ nahe bei einem seiner Quantenniveaus liegt, muß man diesen Ausdruck durch die aus der Optik wohlbekanntere *Dispersionsformel*

$$\sigma \simeq \frac{A^2}{4 \pi} \frac{\Gamma_{\text{teil}} \cdot \Gamma_{\text{str}}}{(E - E_R)^2 \frac{1}{\hbar^2} + \frac{1}{4} (\Gamma_{\text{teil}} + \Gamma_{\text{str}})^2} \quad (12)$$

¹⁾ Der Kern, der nach der Eindringung des einfallenden Teilchens (und noch vor der Emission) gebildet wird.

ersetzen, wo E_R die Resonanzenergie des Kernes bedeutet. Es ist leicht zu sehen, daß in den weit von der Resonanz entfernten Gebieten

$$\left(E - E_R \gg [\Gamma_{\text{teil}} + \Gamma_{\text{str}}] \hbar; E - E_R \sim E_R \sim \frac{\hbar^2}{m r_0^2} \right)$$

diese Formel in (11) übergeht.

Da die Resonanzerscheinungen für uns weiter von Wichtigkeit sein werden, wollen wir hier auf einige aus Formel (12) folgende Eigenschaften näher eingehen.

Zuerst sieht man, daß die *Resonanzbreite* durch

$$\Delta E \simeq \hbar (\Gamma_{\text{teil}} + \Gamma_{\text{str}}) \quad (13)$$

gegeben wird. *Im Resonanzmaximum* ist:

$$\sigma_{\text{res}} \simeq \frac{A^2}{\pi} \frac{\Gamma_{\text{teil}} \cdot \Gamma_{\text{str}}}{(\Gamma_{\text{teil}} + \Gamma_{\text{str}})^2} \quad (14)$$

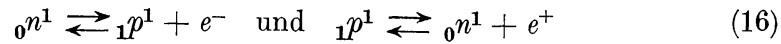
Ist eines der beiden Γ viel kleiner als das andere, so ist der Querschnitt

$$\sigma_{\text{res}} \simeq \frac{A^2}{\pi} \frac{\Gamma_{(\text{klein})}}{\Gamma_{(\text{groß})}} \quad (15)$$

immer kleiner als A^2/π und durch den Quotienten der beiden Wahrscheinlichkeiten bestimmt. Nur für $\Gamma_{\text{teil}} \simeq \Gamma_{\text{str}}$ erreicht der Querschnitt seinen maximalen Wert A^2/π . Die Dispersionsformel ist sehr nützlich, um die Werte für die Γ getrennt auszurechnen, wenn die Resonanzbreite und absolute Ausbeute im Resonanzmaximum bekannt sind. In dieser Weise kann man z. B. die Richtigkeit unserer Formel (9) nachprüfen. Für Strahlungseinfangung von langsamen Neutronen hat man in einer Anzahl von Elementen scharfe Resonanzen im Gebiet der thermischen Energien (Zimmertemperatur) beobachtet. Diese Experimente führen zum Werte $\Gamma_{\text{Neutron}} \simeq 10^{11} \text{ sec}^{-1}$ und $\Gamma_{\text{str}} \simeq 10^{14} \text{ sec}^{-1}$, was mit dem mittels (9) berechneten theoretischen Wert (für $h\nu \simeq 8 \text{ MV}$) in guter Übereinstimmung steht. Wir haben die Formeln (10) bis (14) speziell für den Fall von γ -Strahlung ausgesendung hingeschrieben, weil dieser Prozeß uns im folgenden besonders interessieren wird. Natürlich kann man auch dieselbe Formel für die Teilchenaussendung verwenden. In diesem Falle muß man Γ_{str} durch das Γ des ausgeschleuderten Teilchens ersetzen; insbesondere wird dann in (10) als wesentliche Größe das Produkt zweier Durchlässigkeiten der Potentialschwelle für einfallende und herausgeworfene Teilchen stehen.

Nun gibt es noch eine Art von Kernumwandlungen, welche wir bis jetzt nicht betrachtet haben. Bei günstiger Energiebilanz kann im Kern die Umwandlung des Neutrons in ein Proton, oder vice versa unter Aus-

sendung eines negativen oder positiven Elektrons stattfinden. Solche β -Zerfallsprozesse, welche auf die zwei einfachsten Umwandlungen



zurückgeführt werden können, unterscheiden sich wesentlich von allen anderen Kernumwandlungen dadurch, daß die ausgesandten Elektronen eine kontinuierliche Energieverteilung haben, was in offenem Widerspruch mit dem Energieerhaltungssatz steht. Um den Erhaltungssatz zu befriedigen, nimmt man nach einem Vorschlage von PAULI an, daß gleichzeitig mit dem positiven oder negativen Elektron ein neutrales Teilchen von sehr kleiner Masse, ein sogenanntes *Neutrino*, ausgesandt wird. Dieses Neutrino, das wegen seiner Eigenschaften sehr schwer mit gewöhnlichen Methoden zu beobachten ist, nimmt die für die Erfüllung der Erhaltungssätze notwendige Energie und das Drehmoment auf. Die von FERMI vorgeschlagene Theorie der Elektron-Neutrino-Emission ist formal der Lichtausstrahlungstheorie ganz analog, und enthält eine neue, für die Wechselwirkung zwischen leichten und schweren Teilchen (Elektron-Neutrino versus Neutron-Proton) charakteristische Konstante, die empirisch als sehr klein angenommen werden muß, deren physikalische Bedeutung aber noch ganz und gar nicht

Tabelle 1. Atommassen der leichten Elemente¹⁾.

Atom	Atom- masse ²⁾	Fehler $\times 10^5$	Zerfalls- richtung	Atom	Atom- masse ²⁾	Fehler $\times 10^5$	Zerfalls- richtung
e	0,000 55	0	—	${}_5\text{B}^{12}$	12,019	70	β^-
${}_0n^1$	1,008 97	6	β^-	${}_6\text{C}^{11}$	11,015 26	35	β^+
${}_1\text{H}^1$	1,008 13	2	stabil	${}_6\text{C}^{12}$	12,003 98	10	stabil
${}_1\text{H}^2$ (D)	2,014 73	2	stabil	${}_6\text{C}^{13}$	13,007 61	15	stabil
${}_1\text{H}^3$ (T)	3,017 05	7	stabil	${}_6\text{C}^{14}$	14,007 67	12	β^-
${}_2\text{He}^3$	3,017 07	12	stabil ³⁾	${}_7\text{N}^{13}$	13,010 04	13	β^+
${}_2\text{He}^4$	4,003 89	7	stabil	${}_7\text{N}^{14}$	14,007 50	8	stabil
${}_2\text{He}^5$	5,013 7	40	n (!)	${}_7\text{N}^{15}$	15,004 98	20	stabil
${}_2\text{He}^6$	6,020 8	50	β^-	${}_7\text{N}^{16}$	16,011	200	β^-
${}_3\text{Li}^6$	6,016 86	20	stabil	${}_8\text{O}^{15}$	15,007 8	40	β^+
${}_3\text{Li}^7$	7,018 18	18	stabil	${}_8\text{O}^{16}$	16,000 00	0	stabil
${}_3\text{Li}^8$	8,025	100	β^-	${}_8\text{O}^{17}$	17,004 50	7	stabil
${}_4\text{Be}^8$	8,007 92	28	α (?)	${}_8\text{O}^{18}$	18,003 69	20	stabil
${}_4\text{Be}^9$	9,015 04	25	stabil	${}_9\text{F}^{17}$	17,007 6	30	β^+
${}_4\text{Be}^{10}$	10,016 71	30	β^-	${}_9\text{F}^{18}$	18,005 6	40	β^+
${}_5\text{B}^{10}$	10,016 31	25	stabil	${}_9\text{F}^{19}$	19,004 52	17	stabil
${}_5\text{B}^{11}$	11,012 92	17	stabil	${}_9\text{F}^{20}$	20,007	250	β^-

¹⁾ Die Daten sind dem Bericht von H. BETHE (Rev. Mod. Phys. Vol. 9, No. 3, 1937) entnommen. — ²⁾ Um Kernmassen zu bekommen, muß man von dem angegebenen Atomgewicht die Massen der Atomelektronen abziehen. — ³⁾ Geht wahrscheinlich in H^3 über durch *Absorption* eines freien Elektrons.

klar ist. Die genaue Form der Energieabhängigkeit der β -Zerfallskonstante hängt von der speziellen Auswahl des Wechselwirkungsausdruckes ab und ist im allgemeinen durch den Ausdruck

$$\Gamma_{\beta} \simeq 2 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{E}{m_e c^2} \right)^n \text{ sec}^{-1} \quad (17)$$

gegeben, wobei der Wert des Exponenten n 5 (nach FERMI), 7 (nach UHLENBECK und KONOPINSKI) oder sogar noch größer sein kann. In dem Gebiet der uns interessierenden Energien (~ 1 MV) hat dieser Exponent den empirischen Wert in der Nähe von 5. In dem Falle, wo das β -Teilchen mit einem Drehimpuls j herausfliegt, wird die Zerfallswahrscheinlichkeit um den Faktor $\left(\frac{2\pi r_0}{A} \right)^{2j}$ reduziert sein.

Zum Schluß dieses Abschnittes wollen wir in Tabelle 1 die (genau bestimmten) *Atommassen* der leichten Elemente angeben, die für die weiteren Diskussionen über die möglichen Kernumwandlungen gebraucht werden.

2. Geschwindigkeiten thermischer Kernumwandlungen.

Es wurde zuerst von ATKINSON und HOUTERMANS darauf hingewiesen, daß wegen der sehr hohen Temperaturen im Sterninnern bereits die thermischen Zusammenstöße ausreichen, um die Kernumwandlungen von leichten Kernen hervorzurufen.

Wir wollen hier solche Prozesse genau betrachten und die Formeln für die *Geschwindigkeiten von thermischen Kernumwandlungen* prüfen¹⁾.

Betrachten wir eine Mischung von zwei als ideal betrachteten Gasen, die bei gewisser Temperatur T in thermischem Gleichgewicht stehen.

Seien x und y die relativen Konzentrationen (in Masseneinheiten) der beiden Gase, A_1, A_2, Z_1, Z_2 die Atomgewichte und die Atomnummern und ρ die Gesamtdichte. Die Anzahl von Atomen der beiden Arten in der Volumeneinheit ist $N_1 = x\rho/A_1 m$ und $N_2 = (1-x)\rho/A_2 m^2$, und die Anzahl der Zusammenstöße pro Masseneinheit zwischen beiden Teilchenarten mit einer Stoßenergie zwischen E und $E + dE$ ist, nach der bekannten Formel der kinetischen Gastheorie:

$$dN = \frac{4xy\rho\sigma}{(2\pi)^{1/2} A_1 A_2 A^{1/2} m^{5/2} (kT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}} E dE. \quad (18)$$

Hier ist σ der effektive Stoßquerschnitt und $A = A_1 A_2 / (A_1 + A_2)$ das reduzierte Atomgewicht.

¹⁾ In der ursprünglichen Ableitung von ATKINSON und HOUTERMANS sind zwei falsche, zu dieser früheren Zeit der Kernphysik für richtiggehaltene Annahmen gemacht, die das Endresultat stark ändern. — ²⁾ m ist hier und später immer die Protonenmasse.

Betrachten wir die gewöhnliche Eindringung, so muß σ durch die Formel (3) bestimmt sein. Wir haben also¹⁾:

$$N \approx \frac{4xy\rho}{(2\pi)^{1/2} A_1 A_2 A^{1/2} m^{5/2} (kT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}} \frac{\pi \hbar^2}{m^2 A^2 v^2} e^{-\frac{2\pi e^2 Z_1 Z_2}{\hbar v} + \frac{4e\sqrt{2Am}}{\hbar} \sqrt{Z_1 Z_2 r_0}} dE. \quad (19)$$

Die Abhängigkeit von E ist wesentlich durch den abnehmenden Faktor $e^{-\frac{E}{kT}}$ und den zunehmenden Faktor $e^{-\frac{2\pi e^2 Z_1 Z_2}{\hbar v}}$ gegeben.

Man sieht also, daß unser Ausdruck ein scharfes Maximum für eine bestimmte Energie in der MAXWELLSchen Verteilung haben wird. Wir finden einfach für diese Maximumstelle:

$$E_{\max} \approx \left(\frac{\pi e^2 \sqrt{Am} Z_1 Z_2 kT}{\sqrt{2} \hbar} \right)^{2/3} \quad (20)$$

und für die Maximumbreite:

$$\Delta E_{\max} \approx \left(\frac{8}{3} kT \right)^{1/2} \left(\frac{2\pi e^2 \sqrt{Am} Z_1 Z_2 kT}{\sqrt{2} \hbar} \right)^{1/3}. \quad (21)$$

Physikalisch entspricht das Maximum einem optimalen Energiewert in der MAXWELLSchen Verteilung, für welchen die Anzahl von Teilchen noch nicht sehr stark abgenommen hat, für den aber die Eindringungswahrscheinlichkeit genügend groß geworden ist.

Indem wir in (19) $E = E_{\max}$ und $dE = \Delta E_{\max}$ einführen, bekommen wir für die Gesamtzahl von Eindringungsprozessen pro Gramm und Sekunde:

$$N \approx \frac{\pi^{5/6}}{3^{1/2}} \frac{e^{2/3} \hbar^{5/3} Z_1^{1/3} Z_2^{1/3} xy\rho}{m^{10/3} A_1 A_2 A^{4/3} (kT)^{2/3}} e^{-3 \left(\frac{\pi^2 e^4 m A Z_1^2 Z_2^2}{2 \hbar^2 kT} \right)^{1/3} + \frac{4e\sqrt{2Am}}{\hbar} \sqrt{Z_1 Z_2 r_0}}. \quad (22)$$

Wir sehen, daß dieser Ausdruck sowohl mit abnehmender Temperatur wie auch mit zunehmender Atomnummer und zunehmendem Atomgewicht der zusammenstoßenden Teilchen sehr stark abnimmt.

In Abb. 2 sind die Eindringungszahlen von thermischen Protonen in verschiedene leichte Kerne für eine gegebene Temperatur ($4 \cdot 10^7$ °C) und Dichte (75 relativ zu Wasser) gegeben²⁾ (mit der zusätzlichen Annahme $x = y = 1/2$). Um die gesamte Energieentwicklung zu bekommen, muß man die Eindringungszahl mit der relativen Wahrscheinlichkeit von Auslösungsprozessen und mit der Energieentwicklung pro Prozeß multiplizieren.

¹⁾ Hier ist die relative Geschwindigkeit v mit der relativen Energie und der reduzierten Masse durch $v = \sqrt{\frac{2E}{Mm}}$ verbunden. — ²⁾ Diese Werte entsprechen ungefähr dem Zentralgebiet unserer Sonne.

Haben wir keine bestimmte Umwandlung im Auge, so kann man den letzten Faktor nicht genau bestimmen. Wir werden aber im nächsten Abschnitt sehen, daß er für die wichtigste Umwandlung etwa zu $16 \text{ MV} \approx 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ erg}$ angenommen werden darf. Besteht der Auslösungsprozeß in der Aussendung eines anderen Kernteilchens, so ist die Auslösungswahrscheinlichkeit wesentlich durch Potentialschwellendurchlässigkeit bestimmt und kann für die sehr leichten Kerne und großen Ausbeuteenergien den Wert Eins erreichen (z. B. für die α -Emission bei Li—H-Zusammenstößen). Wollen wir durch solche Umwandlungen die beobachtete Energieausgabe der Sonne ($1,9 \text{ erg/gm, sec}$) erklären, so müßten wir mindestens 10^5 Eindringungsprozesse pro Gramm und

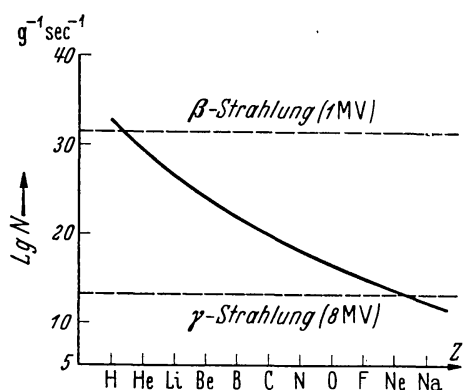


Abb. 2. Eindringungszahlen (pro Gramm) für thermische Protonen als Funktion der Atomnummer. Gerechnet für die Temperatur $T = 4 \cdot 10^7 \text{ }^\circ\text{C}$ und die Dichte $\rho = 75$.

und Sekunde haben. Im allgemeinen aber wird die Potentialschwelle ebensoviele Hindernisse für ausfliegende wie für einfliegende Teilchen ergeben, und man kann kaum hoffen, bei solchen Prozessen eine genügende Energieausbeute für Kerne schwerer als Sauerstoff zu bekommen. Viel wichtiger sind anscheinend die Prozesse, bei denen das hereingekommene Proton seine Überschußenergie in Form von γ -Strahlung aussendet. Solche „Strahlungseinfangungsprozesse“, von denen z. B. ${}_6\text{C}^{12} + {}_1\text{H}^1 \rightarrow {}_7\text{N}^{13} + h\nu$ im Laboratorium beobachtet ist, hängen wesentlich von der Ausstrahlungswahrscheinlichkeit des Kernes ab, die im vorigen Abschnitt diskutiert worden ist. Nach Formel (10) muß man hier den Faktor $\Gamma_{\text{str}}/(\hbar/mr_0^2)$ einführen, wobei für die in Betracht kommenden Energien der γ -Strahlen ($\approx 8 \text{ MV}$) die Strahlungswahrscheinlichkeit Γ_{str} von der Größenordnung $10^{+14} \text{ sec}^{-1}$ angenommen werden darf. Da die Schwingungszahl \hbar/mr_0^2 von der Größenordnung $10^{-22} \text{ sec}^{-1}$ ist, ist die relative Wahrscheinlichkeit der Strahlungseinfangung etwa 10^{-8} . Um nun die Sonnenstrahlung durch solche Prozesse zu erklären, muß man mindestens 10^{13} Eindringungen (pro Gramm und Sekunde) haben. Wie aus Abb. 2 zu ersehen ist, in der die punktierte Linie $N = 10^{13}$ entspricht, wird die Strahlungseinfangung von Protonen etwa bis zu Ne für die Sonnenenergieentwicklung wichtig sein.

Schließlich gibt es Umwandlungen, die nur unter β -Emission vor sich gehen können, wie z. B. die für die weitere Diskussion wichtige Umwand-

Eindringungsprozesse pro Gramm und Sekunde haben. Im allgemeinen aber wird die Potentialschwelle ebensoviele Hindernisse für ausfliegende wie für einfliegende Teilchen ergeben, und man kann kaum hoffen, bei solchen Prozessen eine genügende Energieausbeute für Kerne schwerer als Sauerstoff zu bekommen. Viel wichtiger sind anscheinend die Prozesse, bei denen das hereingekommene Proton seine Überschußenergie in Form von

lung ${}_1\text{H}^1 + {}_1\text{H}^1 \rightarrow {}_1\text{H}^2 + \beta^+$. Wie aus Formel (17) folgt, ist die β -Strahlungswahrscheinlichkeit Γ_β für Energien von etwa 1 MV von der Größenordnung 10^{-4} sec^{-1} , es wird also durch solche Prozesse genügend Energie produziert, wenn die Eindringungszahl größer als $\frac{10^{-4}}{10^{+23}} \cdot 10^{-5} = 10^{31}$ ist. Wie aus Abb. 2 zu ersehen ist, ist die Energieausbeute aus solchen Prozessen nur für den Fall des einfachsten oben-erwähnten Stoßes von zwei Protonen für die Energieentwicklung der Sonne genügend¹⁾.

Um zu zeigen, wie die Energieausbeute von der Temperatur abhängt, sind in Abb. 3 die Kurven für die Eindringungszahlen der drei einfachsten Stoßprozesse: Proton-Proton, Proton- α -Teilchen und α -Teilchen- α -Teilchen für verschiedene Temperaturen eingezeichnet. Die punk-

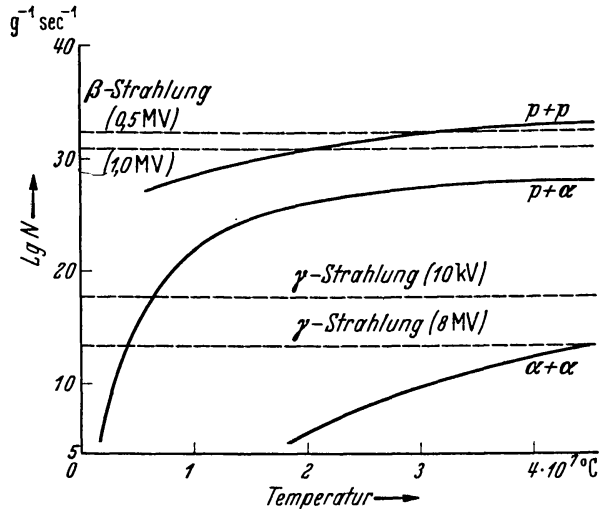


Abb. 3. Eindringungszahlen für $p-p$, $p-\alpha$ und $\alpha-\alpha$ -Stöße als Funktion der Temperatur. Gerechnet für die Dichte $\rho = 75$.

tierten Linien haben dieselbe Bedeutung wie in Abb. 2; nun haben wir zwei weitere Linien hinzugefügt: eine für $E_\beta = 0,5 \text{ MV}$ (tatsächliche Zerfallenergie beim H-H-Stoß) und eine für $E_\alpha = 10 \text{ kV}$, die der Bindungsenergie von Be^8 entsprechen würde, falls dieser Kern stabil ist.

Wir sehen, daß β -Einfangungsprozesse mit zwei Protonen für $T > 3 \cdot 10^7 \text{ }^\circ\text{C}$ von Bedeutung werden können. Die H-He-Eindringungen mit Strahlungseinfangung könnten bei etwa $5 \cdot 10^6 \text{ }^\circ\text{C}$ anfangen, während der Prozeß ${}_2\text{He}^4 + {}_2\text{He}^4 \rightarrow {}_4\text{Be}^8 + h\nu$ (falls er überhaupt möglich ist) sogar bei $4 \cdot 10^7 \text{ }^\circ\text{C}$ kaum eine Rolle spielen kann.

Nun müssen wir hier bemerken, daß unsere Abschätzungen nur der günstigsten oberen Grenze entsprechen, und zwar aus vielen verschiedenen

¹⁾ Die hier gegebene Abschätzung der Energieausbeuten ist natürlich sehr grob und dürfte nur zur allgemeinen Orientierung dienen. Für jede individuelle Umwandlung müßte man spezielle Rechnungen durchführen. Insbesondere können für die Reaktion ${}_1\text{H}^1 + {}_1\text{H}^1 \rightarrow {}_1\text{H}^2 + \beta^+$, die wahrscheinlich eine wichtige Rolle im Sternleben spielt, die genauen Rechnungen in der Arbeit von H. BETHE und CH. CRITCHFIELD (Phys. Rev., im Druck) gefunden werden.

Gründen. Erstens ist wegen der exponentiellen Abhängigkeit der Umwandlungsgeschwindigkeit von der Temperatur die Energieausbeute nur auf ein kleines zentrales Gebiet des Sternes konzentriert. Zweitens gibt es Sterne, in denen die Zentraltemperaturen und Dichten viel kleiner als in der Sonne sind, wodurch die Energieausbeute stark erniedrigt wird. Z. B. ist für die helle Komponente von Capella die Zentraltemperatur (nach dem Punktquellenmodell berechnet) etwa viermal und die Zentraldichte 650mal kleiner als für die Sonne. Sogar für die am langsamsten variierende H—H-Eindringung wird die Eindringungszahl (wie aus Abb. 3 zu entnehmen ist) hier wegen der Temperatur etwa 100mal kleiner sein. Zieht man auch die kleinere Dichte in Betracht, so muß die Energieentwicklung pro Masseneinheit mindestens 65000mal kleiner sein; in Wirklichkeit ist sie aber 30mal größer! Drittens gibt es die Sterne, die noch viel größere Energieausgaben besitzen: z. B. strahlt V Puppis 1100 und H. D. 1337 A sogar 15000 erg pro Gramm und Sekunde.

Alle diese Tatsachen zwingen uns, die sehr schnell verlaufenden und energiereichen Umwandlungen für die Erklärung der Sternenergien in den Vordergrund zu stellen.

Bis jetzt haben wir nur die gewöhnlichen Umwandlungsgeschwindigkeiten betrachtet, die zu dem Fall gehören, wenn im Gebiet der thermischen Zusammenstoßenergien (also bei 10 kV) die in Betracht kommenden Umwandlungen keine Resonanzphänomene zeigen. Nun wissen wir aber aus den oben beschriebenen Experimenten mit langsamen Neutronen, daß viele Kerne Resonanzniveaus sogar im Gebiet der Zimmertemperatur (~ 1 eV) besitzen¹). Es ist auch ganz gut möglich, daß für einige Kernumwandlungen die Resonanzerscheinungen bei Sterntemperaturen stattfinden können. Solche Umwandlungen werden wegen der mehrfach vergrößerten Energieausbeute die Hauptrolle neben anderen Umwandlungen von Nachbar-elementen spielen.

In dem Fall von „Teilchen ein — Teilchen aus“-Umwandlungen kann der effektive Querschnitt für Resonanzenergien den maximalen Wert $\sim A^2$ erreichen. Wie wir später sehen werden, können aber die Umwandlungen solcher Art kaum eine wichtige Rolle in der Sternentwicklung spielen. Denn die „Proton ein — Neutron aus“-Prozesse sind immer endotherm (wegen der durch die Coulomb-Abstoßung verursachten kleineren

¹) Obwohl prinzipiell auch Protonenresonanzen bei solchen kleinen Energien existieren dürften, wird man diese Effekte im Laboratorium kaum beobachten können, weil sogar im Resonanzgebiet die Ausbeuten wegen der Potentialschwelle weit unterhalb von der experimentellen Empfindlichkeit liegen werden.

Bindung von Kernprotonen) und können bei kleinen (thermischen) Protonenenergien gar nicht vorkommen.

Die Aussendung von α -Teilchen bei Protonenbeschießung geht für einige Kerne (mit dem Atomgewicht $4n - 1$) unter großer Energieabgabe vor sich und man muß erwarten, daß solche Prozesse im Sterninnern oft vorkommen.

Solche Umwandlungen führen aber zu Abbauprozessen (Entstehung von Elementen kleineren Atomgewichts) und können, wie im nächsten Abschnitt besprochen werden wird, im Sternleben nur eine sekundäre Rolle spielen. Da auch die Resonanzausbeuten von solchen Prozessen sehr irregulär variieren und von den spezifischen Eigenschaften des in Betracht kommenden Kernes abhängen, werden wir hier auf deren Ausrechnung nicht näher eingehen (vgl. Abschnitt 3).

In dem Fall von γ -Strahlungseinfangung können wir die Formel (12) anwenden, und zwar mit der Annahme, daß Γ_{str} (Γ_γ) viel größer als die Eindringungswahrscheinlichkeit des Protons ist.

Wir haben dann:

$$\sigma_{\text{max}} \simeq \frac{A^2}{\pi} \frac{\Gamma_p}{\Gamma_\gamma} \quad \text{und} \quad \Delta E_{\text{max}} \simeq \hbar \Gamma_\lambda. \quad (23)$$

Führen wir das in (18) ein, so bekommen wir für die Gesamtzahl von Strahlungseinfangungen pro Gramm und Sekunde:

$$N_{\text{res}} \simeq 8 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{\hbar^4 x y \rho}{A_1 A_2 A^{5/2} m^{9/2} r_0^3 (kT)^{3/2}} e^{-\frac{2\pi e^2 m^{1/2} A^{1/2} Z_1 Z_2}{\hbar (2E_r)^{1/2}} + \frac{4e (2m A Z_1 Z_2 r_0)^{1/2}}{\hbar}}, \quad (24)$$

wo E_r die Resonanzenergie ist.

Als Beispiel wollen wir hier die Resonanzenergieausbeuten für die im nächsten Abschnitt zu besprechende WEIZSÄCKERsche Umwandlungskette ausrechnen. Diese Kette, welche mit Protoneindringung in den Heliumkern anfängt, sollte etwa 16 MV pro Eindringung geben (vgl. den nächsten Abschnitt).

In Abb. 4 ist die Gesamtenergieausbeute (pro Gramm und Sekunde) für eine solche Umwandlungskette als Temperaturfunktion dargestellt¹⁾. Die drei ausgezogenen Kurven sind unter der Annahme von Resonanzstellen bei 2,4 und 8 kV mit Hilfe der Formel (24) ausgerechnet. Die punktierte Kurve gibt zum Vergleich die Energieausbeute ohne Resonanz (1,2

¹⁾ Wir werden später sehen (Abschnitt 3), daß die Möglichkeit dieser Umwandlungskette sehr zweifelhaft ist, da der entstehende Kern ${}_2\text{He}^5$ sehr wahrscheinlich nicht existiert. Wir geben aber diese Kurven einfach als Beispiel für Resonanzerscheinungen.

und $4 \cdot 10^7$ °C). Wir sehen sofort, daß bei $T_{\text{res}} = 1 \cdot 10^7$ °C die Resonanz nur eine verhältnismäßig kleine Rolle spielt. Bei $T_{\text{res}} = 2 \cdot 10^7$ ist aber die Resonanzausbeute etwa 10^5 mal größer als die gewöhnliche. Die Resonanzkurven fallen mit wachsender Temperatur nur sehr langsam ab (wegen der großen Anzahl von langsamen Teilchen in der MAXWELLSchen Verteilung) und schneiden die Nichtresonanzkurven erst für Temperaturen, die einigemal größer als die Resonanztemperatur sind.

Dieser langsame Abfall der Resonanzkurven liefert uns eine wichtige Folgerung für die Abschätzung der Energieausbeute im Sterninnern.

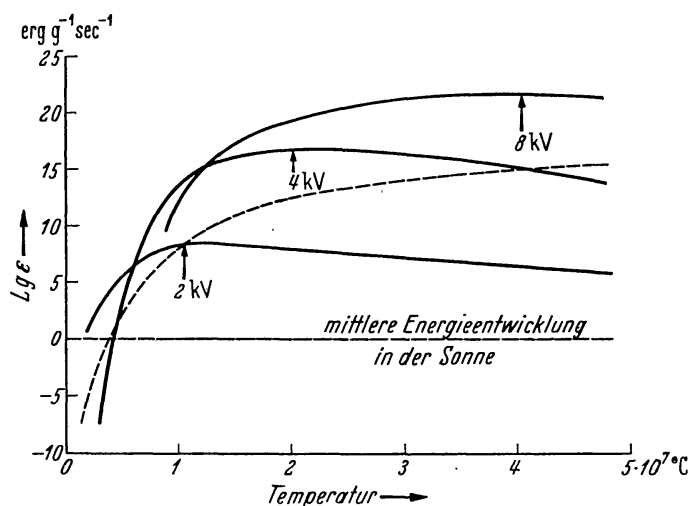


Abb. 4. Energieentwicklung in der hypothetischen Weizsäckerschen Umwandlungskette (16 MV pro Kette) als Temperaturfunktion für die Dichte $\rho = 75$. Punktierter Kurve ohne Resonanz. Ausgezogene Kurven mit Resonanzen bei 2,4 und 8 kV.

Denn wir haben schon früher bemerkt, daß sich bei gewöhnlicher Eindringung die ganze Energieentwicklung auf ein sehr kleines Gebiet um das Sternzentrum herum konzentriert. Im Falle von Resonanz wird dagegen die Energieentwicklung in einem gewissen Abstände vom Zentrum anfangen (dort wo die Temperatur ihren Resonanzwert erreicht) und sich von da ab bis zum Zentrum nur sehr langsam ändern.

Das Gebiet der Energieentwicklung kann also in diesem Falle einen großen Teil des Sternes umfassen, was zusammen mit der größeren Energieausbeute pro Masseneinheit eine bedeutende Erhöhung der Gesamtentwicklung durch den ganzen Stern hervorruft.

Im Falle der Protoneneinfangung durch β -Ausstrahlung können auch Resonanzerscheinungen vorkommen.

In der Tat könnte bei der ${}_1\text{H}^1 + {}_1\text{H}^1 \rightarrow {}_1\text{H}^2 + \beta^+$ -Umwandlung die Existenz von Resonanzniveaus im H^2 -Kern in der Nähe von 10 kV einen sehr starken Effekt haben.

Leider scheint es aber, daß die Kräfte zwischen zwei Protonen, die aus der Proton—Proton-Streuung mit ziemlicher Sicherheit bestimmt werden können, die Möglichkeit von Quantenniveaus in diesem Energiegebiet vollständig ausschließen.

3. Umwandlungsketten und Aufbauhypothese.

Nach den Darlegungen im vorigen Abschnitt kann kein Zweifel bestehen, daß bei den im Sterninnern geltenden physikalischen Verhältnissen verschiedene Kernumwandlungen ablaufen können, deren Energieausgabe völlig genügend ist, um die beobachtete Sternausstrahlung zu erklären. Es ist auch leicht zu sehen, daß die gesamte, durch Kernumwandlungen zu erhaltende Energie völlig genügend ist, um die durch astronomische Daten geforderten Lebensdauern der Sterne zu erklären. Denn bei Umwandlung von Wasserstoff in Helium wird schon etwa 0,7% der ganzen Masse in Strahlung umgewandelt; ein Gramm Wasserstoff liefert also insgesamt $0,007 \cdot (3 \cdot 10^{10})^2 \sim 6 \cdot 10^{18}$ erg. Für die Sonne z. B., die etwa 2 erg/g sec ausstrahlt, ergibt sich für die Lebensdauer $3 \cdot 10^{18}$ sec oder 10^{11} Jahre, was mit der kosmischen Entwicklungsskala in guter Übereinstimmung steht. Nun müssen wir daran erinnern, daß es anscheinend Sterne gibt, für die die mittlere Energieentwicklung einige tausend Mal größer als für die Sonne ist. Leuchten solche Sterne während ihres ganzen Lebens mit der heutigen Intensität, so bekommen wir für die Lebensdauern weniger als 10^8 Jahre, was mit den astronomischen Forderungen schwer zu vereinbaren ist. Möglicherweise besteht die Erklärung dieser Schwierigkeit darin, daß jeder Stern während seines Lebens seine Leuchtkraft stark ändert und die heutzutage beobachteten sehr hellen Sterne gerade in ihrem Maximum sind. Wir werden später (Abschnitt 4) z. B. sehen, daß ein Stern mit zentraler Energiequelle (Punktquellenmodell) seine Leuchtkraft während der Evolution etwa hundertfach vergrößert. Falls es wirklich so ist, und falls alle Sterne gleichzeitig entstanden sind, so sollten die Sterne mit sehr großer Masse ihre Evolution schneller durchlaufen (wegen des größeren Quotienten $\frac{\text{Leuchtkraft}}{\text{Masse}}$)¹⁾ und würden zu unserer Epoche sich im letzten

¹⁾ Aus der empirischen Masse-Leuchtkraft-Beziehung: $L \sim M^3$ folgt, daß der für die Evolutionsperiode maßgebende Quotient L/M dem Quadrat der Sternmasse proportional ist.

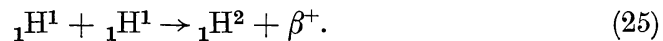
Stadium ihrer Entwicklung befinden, welche gerade der maximalen Leuchtkraft entspricht.

Fragen wir jetzt nach dem genauen Verlauf der Kernumwandlungen, welche zur Umwandlung von Wasserstoff in Helium und schwerere Elemente führen, so stoßen wir sofort auf ernste Schwierigkeiten. Natürlich könnten wir als maßgebende Prozesse irgendwelche, bei Sterntemperaturen einfach verlaufende Kernumwandlungen, wie z. B. ${}_3\text{Li}^7 + {}_1\text{H}^1 \rightarrow 2 {}_2\text{He}^4 + 18 \text{ MV}$, annehmen.

Solche Annahmen würden aber sehr künstlich aussehen, weil sie spezielle Hypothesen über die Anfangszusammensetzung des Sternes (z. B. Wasserstoff-Lithium-Gemisch für die oben gegebene Umwandlung) fordern. Andererseits wäre es sehr erwünscht, durch die innerhalb des Sternes ablaufenden Kernumwandlungen nicht nur die Energieentwicklung, sondern auch den Aufbau und eventuell die beobachtete Häufigkeit der verschiedenen bekannten Elemente des periodischen Systems zu erklären.

Als einfachste Hypothese würde man annehmen, daß am Anfang alle Sterne aus reinem Wasserstoff aufgebaut waren und daß die Sternentwicklung im wesentlichen im stetigen Aufbau von Helium und schwereren Elementen besteht, begleitet von der Freimachung der zugehörigen Bindungsenergien. Eine solche Hypothese, die mit dem aus der Analyse der Sternmodelle folgenden großen Wasserstoffgehalt im Sterninnern in guter Übereinstimmung steht, wurde zum erstenmal von v. WEIZSÄCKER systematisch verfolgt. Nehmen wir jetzt also an, daß im Anfangszustande alle Sterne aus reinem Wasserstoff bestanden, und verfolgen wir die Wege, auf denen der Aufbau schwererer Elemente möglich ist. Bei solchen Betrachtungen müssen wir natürlich die energetische Möglichkeit und die Ablaufgeschwindigkeiten der verschiedenen Umwandlungsprozesse bei den aus dem Sternmodell abgeleiteten Zentraltemperaturen und Dichten berücksichtigen.

Die einzige Umwandlung, welche zwischen zwei Wasserstoffkernen verlaufen kann, ist der Aufbau des Deuterons mit β -Ausstrahlung:

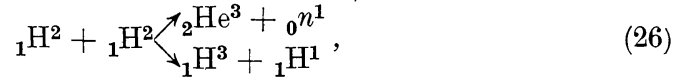


Die Energieausbeute Q aus solchen Prozessen kann man einfach auf Grund von Tabelle 1 ausrechnen. Wir haben nämlich:

$$1,00758 + 1,00758 = 2,01418 + 0,00055 + Q,$$

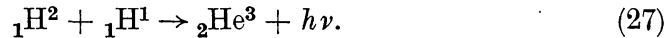
woraus folgt $Q = 0,00043$ oder $0,4 \text{ MV}$. Die Wahrscheinlichkeit solcher Prozesse ist im vorhergehenden Abschnitt diskutiert worden, und wir haben dort gesehen, daß die Energieausbeute vielleicht noch gerade für die Sonne,

wohl aber nicht mehr für die Giganten (wie z. B. Capella) ausreichen wird. Diese Umwandlung hat die wichtige Eigenschaft, daß sie Deuteronen produziert, die im weiteren zu Helium und freien Neutronen führen. Es ist in der Tat wohl experimentell bekannt, daß beim Zusammenstoß von zwei Deuteronen die folgende Umwandlung eintritt:



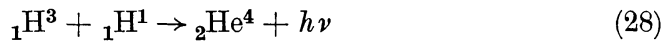
wobei die beiden Verzweigungswege ungefähr gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. Man kann auch aus den Kernmassen schließen, daß beide Produkte ${}_1\text{H}^3$ und ${}_2\text{He}^3$ gegen β -Zerfall stabil sein werden und daß ${}_2\text{He}^3$ eventuell durch die Anlagerung eines freien Elektrons in ${}_1\text{H}^3$ übergehen wird¹⁾.

Wegen der kleinen Konzentration der durch Umwandlung (25) entstandenen Deuteronen werden die H^2 — H^2 -Stöße verhältnismäßig selten vorkommen. Dagegen werden die H^2 — H^1 -Stöße sehr häufig sein, was auch zu ${}_2\text{He}^3$ aber zu keinen Neutronen führt:



Welcher der beiden Wege der wichtigste ist, hängt von den speziellen Temperatur- und Druckwerten im Sterninnern ab; der Prozeß (26) hat einen großen effektiven Querschnitt, wird aber nur bei den seltenen H^2 — H^2 -Stößen möglich sein, dagegen hat der H^2 — H^1 -Prozeß (27) wie alle Strahlungseinfangungsprozesse sehr kleinen effektiven Querschnitt.

Die durch (26) oder (27) entstandenen Tritonen werden durch weitere Protonenanlagerung in Helium übergehen:



Wir wollen jetzt die Energieausbeute der durch (25), (26), (27), (28) gegebenen Umwandlungskette abschätzen. Geht der Aufbauweg durch (25), (27), (28), so wird der Anfangsprozeß (25) zum Aufbau von einem Heliumkern führen mit etwa 27 MV Energieausbeute. Beim anderen Weg (25), (26), (28) brauchen wir zwei Anfangsprozesse (25); dabei wird schließlich auch ein Heliumkern aufgebaut und noch dazu ein Neutron mit der Wahr-

¹⁾ Wir haben nämlich nach Tabelle 1:

$$M({}_1\text{H}_{\text{Kern}}^3) \gtrless M({}_2\text{He}_{\text{Kern}}^3) + m_e, \text{ (unmöglich);}$$

$$M({}_2\text{He}_{\text{Kern}}^3) \gtrless M({}_1\text{H}_{\text{Kern}}^3) + m_e, \text{ (unmöglich);}$$

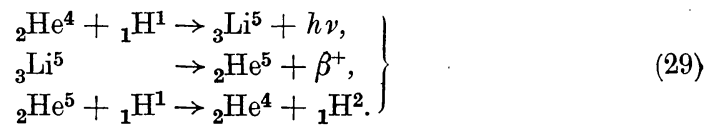
aber

$$M({}_2\text{He}_{\text{Kern}}^3) + m_e \gtrless M({}_1\text{H}_{\text{Kern}}^3), \text{ (unmöglich).}$$

scheinlichkeit $1/2$ [wegen der Verzweigung in (26)]. Da das entstandene Neutron wahrscheinlich durch einen schweren Kern gefangen wird (mit 8 MV Energieausgabe), bekommen wir für die mittlere Energieausbeute pro Anfangsprozeß $\frac{27 + 8/2}{2} = 16$ MV. Wenn die beiden Wege vergleich-

bare Wahrscheinlichkeiten besitzen, wird die Energieausbeute irgendwo dazwischen liegen. Die Umwandlungsgeschwindigkeit für die ganze Kette wird durch die Geschwindigkeit seiner langsamsten Umwandlung bestimmt, also in unserem Falle durch die Anfangsumwandlung (25). Wie wir aber schon gesehen haben, scheint die Geschwindigkeit dieser Umwandlung zu klein zu sein, um die Energieerzeugung in hellen Sternen zu erklären. Nehmen wir an, daß die so entstandenen He-Kerne durch weiteren Protoneneinfang noch höher aufgebaut werden, so vermeiden wir die Schwierigkeiten wieder nicht, weil die Anzahl der zur Verfügung stehenden He-Kerne durch die Prozesse (25) bestimmt wird.

WEIZSÄCKER hat einen wesentlich neuen Gedanken eingeführt, nach dem die He-Herne bei dem weiteren Aufbau nicht verbraucht werden, sondern nur als *Autokatalysatoren* wirken. Er betrachtet die folgende Umwandlungskette:

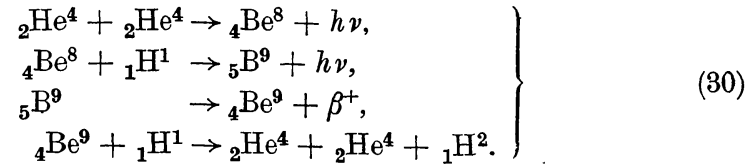


Als Endresultat einer solchen Kette wird der am Anfang gebrauchte He-Kern wieder freigemacht; dazu wird aber ein Deuteron produziert, das für den Aufbau von neuen He-Kernen und freien Neutronen gebraucht wird [nach (26), (27), (28)]. Nach dieser Hypothese wird schon der eine Prozeß (25) genügen, um den immer schneller gehenden Aufbau von Helium und Neutronen in Gang zu setzen. Leider scheint es aber, daß die Kette (29) mit unserer heutigen Kenntnis der Kernmassen im Widerspruch steht. Nach Tabelle 1 ist die Masse des ${}_2\text{He}^5$ -Kernes: 5,0126 und wir sehen, daß es in einen ${}_2\text{He}^4$ -Kern (4,0098) und ein Neutron (1,0090) unter der Energieausgabe $0,0008 = 0,75$ MV zerfallen kann. Aus der Tatsache, daß das Proton in allen Kernen schwächer gebunden ist als das Neutron (wegen der Anwesenheit der Coulomb-Abstoßung) sollten wir auch schließen, daß ${}_3\text{Li}^5$ mit noch größerer Energieabgabe in ${}_2\text{He}^4$ und ein Proton zerfallen wird.

Die beiden in der WEIZSÄCKERschen Kette gebrauchten Kerne werden also instabil sein und eine verschwindend kleine Zerfallsperiode (verglichen

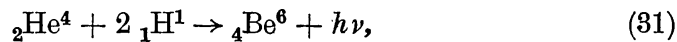
mit dem Zeitintervall zwischen zwei Zusammenstößen) besitzen; unter diesen Umständen kann die Umwandlungskette (29) natürlich nicht ablaufen.

Als zweite Möglichkeit werden wir die Kette betrachten, die mit der Strahlungsvereinigung von zwei He-Kernen anfängt:



Auch bei dieser Kette bleibt im Endresultat die Zahl der He-Kerne unverändert und ein Deuteron wird produziert. Gegen diese Möglichkeit kann man aber zwei Einwände machen. Erstens scheint es nach den neuen Experimenten (von KIRCHNER), daß der ${}_4\text{Be}^8$ -Kern instabil gegen den Zerfall in zwei α -Teilchen ist. Zweitens ist, wie aus Abb. 3 zu entnehmen ist, die Geschwindigkeit der ersten Umwandlung ($\alpha + \alpha \rightarrow {}_4\text{Be}^8 + h\nu$) nicht genügend groß, um nur die Energieentwicklung in der Sonne zu erklären.

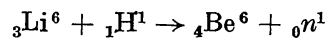
Es scheint also, daß es ziemlich schwierig ist, die passende Umwandlungskette ausfindig zu machen, die durch den gewöhnlichen Zusammenstoß zwischen einfachen Kernen entstehen könnte. Es wurde kürzlich von BETHE¹⁾ darauf hingewiesen, daß wegen der großen Dichten innerhalb der Sterne die Dreierstoßumwandlungen von Bedeutung sein könnten. Z. B. könnte man die folgende Umwandlung betrachten:



welche nach vorläufigen Abschätzungen eine Verlaufsgeschwindigkeit besitzt, die noch gerade reichen könnte, um die Sonnenstrahlung zu erklären. Die Ausbeute dieser Umwandlung kann bedeutend vergrößert werden, wenn wir annehmen, daß der ${}_4\text{Be}^6$ -Kern ein virtuelles Resonanzniveau im Gebiet von 10 kV besitzt. Der Kern ${}_4\text{Be}^6$ ist wohl noch nie beobachtet worden²⁾, es scheint aber nach den allgemeinen Regelmäßigkeiten der Masseneffekte, daß er gegen die Ausstrahlung von schweren Teilchen stabil sein könnte und in verhältnismäßig langer Zeit durch einen β -Zerfall in

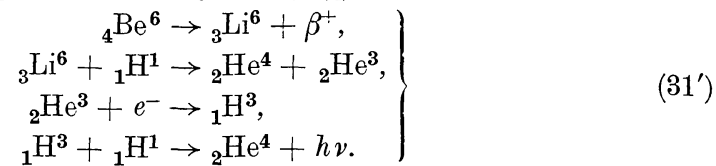
¹⁾ Bemerkung auf der IV. Washington Conference on Theoretical Physics (März 1938).

²⁾ Man könnte seine Existenz durch die Umwandlung

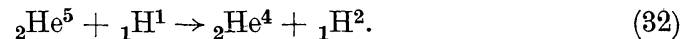


prüfen, für die man Protonen mit kinetischer Energie von etwa 4 MV brauchen würde.

den ${}_3\text{Li}^6$ -Kern übergehen sollte. Nimmt man das an, so kann man folgende Umwandlungskette [als Fortsetzung von (31)] erwarten:



Nach dieser Kette wird Wasserstoff vollständig in Helium umgewandelt. Es gibt aber verschiedene Teilwege von dieser Kette, die zur Entstehung von Deuteronen und folglich Neutronen führen können, wie z. B.:



Wir sehen aus dieser Diskussion, daß es gar nicht so einfach ist, die Kernumwandlungen zu finden, die für das Leben der Sterne verantwortlich gemacht werden könnten. Es ist auch wohl möglich, daß man zwei Prozesse haben muß: einen für die Energieentwicklung und den anderen für die Neutronenentstehung und den Aufbau der Elemente. Bis jetzt haben wir nur die Umwandlungen der leichteren Kerne untersucht, für die die Eindringungswahrscheinlichkeit für thermische Protonen bei Sterntemperaturen bedeutend ist. Gehen wir zu schwereren Elementen des periodischen Systems über, so besteht die einzige Aufbaumöglichkeit darin, daß Neutronen, die in leichten Kernumwandlungen produziert wurden, von schwereren Kernen unter γ -Ausstrahlung eingefangen werden. Behalten wir unseren Standpunkt ein, daß die Sterne im Anfangszustand aus reinem Wasserstoff aufgebaut sind, so kommen wir zu dem Schluß, daß alle vorhandenen schwereren Elemente durch konsekutive Neutronenanlagerung entstanden sein müssen. Wir haben schon gesehen, daß die Grundumwandlung (25) zu Neutronenentstehung durch die Prozesse (26) führen wird; in dieser Umwandlung bekommt man (wegen der gleichen Wahrscheinlichkeit der beiden Äste) ein Neutron auf zwei Helium-Kerne. Dagegen gibt der konkurrierende Prozeß (27) überhaupt keine Neutronen. Im günstigsten Falle [(26), der viel wahrscheinlicher als (27) ist] würde man also die Gesamtmasse der entstandenen Neutronen *achtmal kleiner* als die Masse des entstandenen Heliums erwarten. In der Umwandlungskette (31), (31') dagegen werden keine Neutronen direkt produziert, obwohl ihre Entstehung in verschiedenen begleitenden Prozessen [z. B. (32)] zu erwarten ist. Schließlich darf man nicht annehmen, daß alle entstandenen Neutronen zum Aufbau von schweren Elementen verbraucht werden; z. B. wird wegen des großen Wasserstoffgehaltes der Sterne die Umwandlung



sehr oft passieren, die zum Aufbau von neuen Heliumkernen führen wird. Aus allen diesen Überlegungen kann man schließen, daß die Gesamtmasse der schwereren Elemente, die durch Neutronenanlagerung entstanden sind, nicht größer (und vielleicht sogar ziemlich viel kleiner) als *ein Achtel* der Heliummasse sein sollte. Die Annahme, daß die Sterne hauptsächlich aus Wasserstoff und Helium mit nur kleiner Beimischung von schwereren Elementen bestehen, ist aber mit der Theorie vom Sternbau nicht im Widerspruch. Die Tabelle 2 gibt nach STRÖMGREN die Mischungsverhältnisse von Wasserstoff, Helium und schwereren Elementen (Russell-Mischung), die die Bedingung $\frac{\text{Helium}}{\text{Sch. Elem.}} = 10$ erfüllen, und mit den beobachteten Massen, Radien und Leuchtkräften der verschiedenen Sterne im Einklang sind¹⁾.

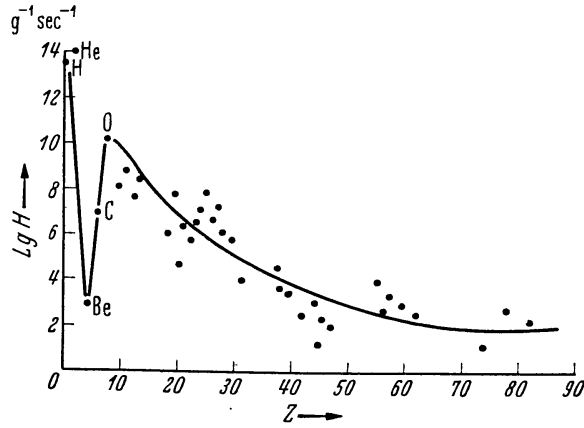


Abb. 5. Zehnerlogarithmen der Elementhäufigkeiten in den Sternen.

Tabelle 2.

Stern	Masse in Sonnenmassen	Wasserstoffgehalt	Heliumgehalt	Gehalt an schwereren Elementen
Capella A . .	4,2	0,57	0,39	0,04
Sirius A . . .	2,4	0,60	0,36	0,04
Sonne	1,0	0,60	0,36	0,04

Die Aufbauhypothese sollte uns auch erlauben, die relative Häufigkeit der schweren Elemente in großen Zügen zu verstehen. Wie man aus Abb. 5 ersehen kann, fällt im allgemeinen die Anzahl der schweren Kerne mit wachsender Atomnummer sehr rasch ab (etwa wie Z^{-8}). Das ist gerade das, was man erwarten würde, wenn der Aufbau durch die sukzessive Anlagerung von Neutronen zustande kommt. Man sieht auch, daß die leichtesten Kerne (von Lithium bis Sauerstoff) verhältnismäßig selten sind, was durch die in diesem Gebiet leicht gehenden Abbauprozesse (wie

¹⁾ Für die Mitteilung dieser Resultate vor Publikation bin ich Herrn Dr. B. STRÖMGREN sehr dankbar.

z. B. ${}_3\text{Li}^7 + {}_1\text{H}^1 \rightarrow 2 {}_2\text{He}^4$) erklärt werden kann. Für weitere Diskussionen über die relativen Häufigkeiten der Elemente vom Standpunkt der Aufbauhypothese verweisen wir den Leser auf die WEIZSÄCKERsche Monographie.

Wir wollen hier nur eine ernste Schwierigkeit betonen, welche im Zusammenhang mit der Entstehungsfrage der schweren radioaktiven Elemente entsteht. Es ist nämlich, um den Aufbau von Blei bis Uran und Thor durchzuführen, notwendig, über die Reihe der unstabilen Elemente hinwegzugehen, deren Lebensdauern gegen α -Zerfall von der Größenordnung eines Bruchteils einer Sekunde sind. Es ist also notwendig, daß die Beschießung durch Neutronen so intensiv ist, daß ein zweites Neutron angelagert werden kann, ehe der durch die letzte Anlagerung gebaute, kurzlebige Kern ein α -Teilchen aussendet. Die Neutronendichte muß also so groß sein, daß die radioaktiven Kerne mindestens einen Zusammenstoß mit einem Neutron pro Sekunde erfahren. Nun könnte die Konzentration solcher kurzlebigen Kerne sicher nicht größer sein als die Konzentration von Blei, welche nach Abb. 5 etwa ein Millionstel ($\sim 10^{-6}$) aller schweren Elemente beträgt. Da es keine Gründe gibt zu erwarten, daß der effektive Querschnitt für Neutroneneinfang für diese unstabilen Kerne anomal groß ist, würde man schließen, daß jeder andere schwere Kern auch etwa ein Neutron pro Sekunde einfangen wird.

Nehmen wir an, daß nur einige Prozent der Sternmaterie aus schweren Elementen bestehen, so bekommen wir etwa 10^{+20} schwere Kerne pro Gramm und etwa 10^{+20} Einfangprozesse pro Gramm und Sekunde. Ziehen wir noch in Betracht, daß auch Protonen die Neutronen einfangen können (${}_0n^1 + {}_1\text{H}^1 \rightarrow {}_1\text{H}^2 + h\nu$), so wird die Zahl von Einfangprozessen noch erhöht. Da jeder Einfangprozeß etwa 10^{-5} erg liefert, würde man für die totale Energieentwicklung in dem Gebiet, wo radioaktive Kerne entstehen, mindestens zu 10^{15} erg/g sec erwarten. Die mittlere Energieentwicklung der Sonne ist nur 2 erg/g sec und wir schließen daraus, daß nur der 10^{-15} te Teil der ganzen Sonnenmasse an diesen Prozessen teilnimmt. Das würde aber bedeuten, daß das zentrale heiße Gebiet, wo die Kernumwandlungen verlaufen, einen Radius von etwa zwei Kilometer, also ein Millionstel des Sonnenradius hat. Man kann aber leicht einsehen, daß man sogar mit sehr schneller Temperaturabhängigkeit der thermischen Kernumwandlungen solch starke Konzentration der Energiequelle bei gewöhnlichen Sternmodellen nicht erreichen kann. Nimmt man an, daß die Kernumwandlungen Resonanz zeigen, so wird die Energieentwicklung über einen großen Teil des Sternes verteilt (siehe Abschnitt 4) und die Situation wird noch schlechter.

4. Sternmodelle mit Kernenergiequellen.

Wir wollen jetzt die allgemeinen Schlüsse verfolgen, welche über den Bau und die Evolution von einem Kernenergiequellen besitzenden Stern gemacht werden können. Die Gleichgewichtsgleichungen, welche innerhalb des Sternes gelten, wurden zum erstenmal von EDDINGTON aufgeschrieben. Für den Fall, daß der Strahlungsdruck, verglichen mit dem Gasdruck, klein ist (das gilt für alle Sterne mit nicht sehr großer Masse), lauten diese Gleichungen:

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{G M_r \rho}{r^2}, \quad (34 a)$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4 \pi r^2 \rho, \quad (34 b)$$

$$p = \frac{k}{\mu m} T \rho, \quad (34 c)$$

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{3}{4} \frac{\kappa_0}{\sigma c} \rho^2 T^{-6,5} \frac{L_r}{4 \pi r^2}, \quad (34 d)$$

$$\frac{dL}{dr} = 4 \pi r^2 \rho \varepsilon. \quad (34 e)$$

Hier sind p , ρ , T Druck, Dichte und Temperatur als Funktionen des Abstandes r von Sternenzentrum; M_r und L_r die Masse und totale Energieentwicklung innerhalb des Radius r ; G , k , σ , m Gravitationskonstante, BOLTZMANNsche und STEPHANSche Konstante und Wasserstoffatommasse. Weiter ist μ das mittlere Molekulargewicht der Sternmaterie, κ_0 der Opazitätskoeffizient und ε die Energieentwicklung pro Gramm und Sekunde. In den Gleichungssystemen (34) ist für die Zustandsgleichung der Sternmaterie die Idealgasgleichung genommen worden, weil die von STRÖMGREN durchgeführte Integration dieser Gleichungen für eine Anzahl verschiedener Sterne gezeigt hat, daß die Bedingungen für ideale Gase durchaus im Sterninneren erfüllt sind [wenn man keine Singularität (vgl. Abschnitt 5) im Zentrum erlaubt].

Die drei Größen μ , κ_0 und ε hängen von der chemischen Zusammensetzung des Sternes und von Temperatur und Dichte ab. Bei den Sterntemperaturen im Inneren sind alle Atome praktisch vollständig ionisiert, so daß man die Materie als ein Gemisch aus Elektronengas und dem Gas von nackten Kernen betrachten kann. Unter diesen Umständen wird das Molekulargewicht von Wasserstoff $1/2$, von Helium $4/3$ und das von schwereren Elementen ~ 2 . Nehmen wir an, daß der Stern aus Wasserstoff, Helium

und schwereren Elementen¹⁾ im Verhältnis $x : y : z$ besteht ($x + y + z = 1$), so haben wir für das mittlere Molekulargewicht der Sternmaterie:

$$\mu \simeq \frac{1}{2x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}z}. \quad (35)$$

Der Opazitätskoeffizient wächst schnell mit der Atomnummer der absorbierenden Elemente ($\kappa_0 \sim Z^2/A \sim Z$), und für einen nicht zu großen Wasserstoff- und Helium-Gehalt kann man annehmen, daß nur die schwereren Elemente an der Opazität teilnehmen. Wir können also angenähert

$$\kappa_0 \simeq C \cdot Z \quad (36)$$

schreiben, wo C unter Annahme der Russell-Mischung den numerischen Wert $4 \cdot 10^{25}$ hat.

Die Abhängigkeit der Energieentwicklung ε von der chemischen Zusammensetzung, von Dichte und Temperatur haben wir in den vorigen Abschnitten ausführlich diskutiert.

Um die Verteilung der Dichten und Temperaturen im Sterninnern zu diskutieren, muß man das Gleichungssystem (34) mit den Grenzbedingungen

$$\left. \begin{aligned} r = 0, \quad M_r = 0, \quad L_r = 0 \\ r = R, \quad M_r = M, \quad T = \varrho = p = 0, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

lösen, wobei R der Sternradius und M die Sternmasse ist. Nehmen wir eine bestimmte Masse M und die chemische Zusammensetzung (x, y, z) , welche μ, κ_0 und die Funktion ε bestimmt, so wird die Lösung eindeutig sein. Wir bekommen auf diese Weise Sternradius, totale Leuchtkraft und Temperatur-Dichteverteilung im Sterninnern.

Nehmen wir an, daß die Energieentwicklung durch gewöhnliche (ohne Resonanz) thermische Kernumwandlungen stattfindet, so wird das Gleichungssystem (34) etwas vereinfacht. Wegen des sehr starken Anwachsens der Energieausbeute mit der Temperatur, kann man in diesem Falle in genügender Annäherung annehmen, daß die ganze Energieentwicklung in einem sehr kleinen zentralen Gebiet konzentriert ist. Für ein solches „Punktquellen-Modell“ wird L_r durch den ganzen Stern konstant bleiben; in (34d) setzen wir also statt des veränderlichen L_r die totale Leuchtkraft L ein und ihr Wert wird nur durch die zentrale Temperatur und Dichte be-

¹⁾ Für schwere Elemente nimmt man gewöhnlich die sogenannte Russell-Mischung an: 50% O, 25% Na und Mg, 6% Si, 6% K und Ca, 13% Fe, die aus den relativen Häufigkeiten in den Sternatmosphären abgeleitet ist.

stimmt. Wir können auch den exponentiellen Faktor in (22) (in einem bestimmten Temperaturintervall) durch eine Potenz von T approximieren. Ist r_0 der Radius des energieproduzierenden Gebietes, so können wir für die totale Leuchtkraft schreiben:

$$L = A \varrho_0^2 T_0^n r_0^3, \quad (38)$$

wobei A von der chemischen Zusammensetzung abhängt. Wie aus Abb. 3 zu entnehmen ist, ist der Exponent n für H—H-Stöße etwa 3,5, für H—He-Stöße 7 und für andere Umwandlungen noch größer (für He—He-Stöße erreicht dieser Exponent den Wert von etwa 20). Das hier betrachtete Punktquellenmodell zeigt spezifische konvektive Unstabilität nahe dem Zentrum. Wegen der starken Zunahme der Temperatur in der Nähe des Sternzentrums, die aus den Gleichungen (34) folgt, wird man in gewissem Abstände vom Zentrum in das

Gebiet kommen, wo der Temperaturgradient dT/dr größer wird als der Gradient, welcher der adiabatischen Ausdehnung eines idealen Gases entspricht. In diesem Gebiet, das nach COWLING innerhalb von 17% des Sternradius liegt, werden Konvektionsströme entstehen und die Gleichung (34d) muß durch die Gleichung der adiabatischen Temperatur-dichtebeziehung

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dr} = \frac{2}{3} \varrho \frac{d\varrho}{dr} \quad (39)$$

ersetzt werden.

Die Gleichungen (34a, b, c, d), (38) und (39) geben die vollständigen Lösungen für das „Punktquellenmodell“ mit konvektivem zentralem Gebiet. Eine solche Lösung ist in Abb. 6 wiedergegeben; die ausgezogenen Kurven geben die Temperaturen und Dichten (bezogen auf die Werte im Zentrum als Einheit), die punktierte Kurve gibt den Massenbruchteil innerhalb des Radius r . Wir sehen z. B., daß das Gebiet, in dem die Temperatur nicht niedriger als die Hälfte des Zentralwertes ist, etwa die Hälfte der Sternmasse enthält und sich bis zu etwa ein Drittel des Sternradius ausdehnt. Hat man die Lösung für einen Stern mit gegebener Masse und chemischer

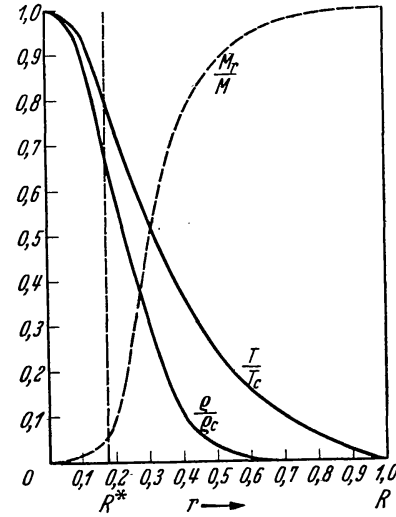


Abb. 6. Temperatur- und Dichteverteilung für das Punktquellenmodell mit konvektivem Gebiet. R = Sternradius. $R^* = 0,17 R$ = Radius der Konvektionszone. Die punktierte Kurve gibt die Masse innerhalb des Radius r .

Zusammensetzung, so kann man die Lösung für andere Massen und Zusammensetzungen durch eine einfache *Homologietransformation* erhalten. Ändert man willkürlich die Parameter M , μ , κ_0 und A , so kann man in den Gleichungen (34a, b, c, d), (38) und (39) die übrigbleibenden Größen p , q , T , R und L so ändern, daß die Gleichungen invariant bleiben¹⁾. Wir bekommen auf diese Weise folgende Transformationen:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{M} = a M \\ \bar{\mu} = b \mu \\ \bar{\kappa}_0 = c \kappa_0 \\ \bar{A} = d A \end{array} \right\} \left(\begin{array}{l} \bar{p} = a^{-42+8} \frac{31+10n}{5+2n} b^{-60+8} \frac{45+14n}{5+2n} c^{8-8} \frac{6+2n}{5+2n} d^{-\frac{8}{5+2n}} p, \\ \bar{q} = a^{-32+6} \frac{31+10n}{5+2n} b^{-45+6} \frac{45+14n}{5+2n} c^{6-6} \frac{6+2n}{5+2n} d^{-\frac{6}{5+2n}} q, \\ \bar{T} = a^{-10+2} \frac{31+10n}{5+2n} b^{-14+2} \frac{45+14n}{5+2n} c^{2-2} \frac{6+2n}{5+2n} d^{-\frac{2}{5+2n}} T, \\ \bar{R} = a^{11-2} \frac{31+10n}{5+2n} b^{15-2} \frac{45+14n}{5+2n} c^{-2+2} \frac{6+2n}{5+2n} d^{+\frac{2}{5+2n}} R, \\ \bar{L} = a^{\frac{31+10n}{5+2n}} b^{\frac{45+14n}{5+2n}} c^{-\frac{6+2n}{5+2n}} d^{-\frac{1}{5+2n}} L. \end{array} \right) \quad (40)$$

Dazu geben wir noch die Transformation für die effektive Temperatur an, die durch die Gleichung $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$ definiert ist:

$$\bar{T}_{\text{eff}} = a^{-\frac{11}{2} + \frac{5}{4} \frac{31+10n}{5+2n}} b^{-\frac{15}{2} + \frac{5}{4} \frac{45+14n}{5+2n}} c^{1 - \frac{5}{4} \frac{6+2n}{5+2n}} d^{-\frac{5}{4} \frac{1}{5+2n}} T_{\text{eff}}. \quad (40')$$

Wollen wir die Evolution eines Sternes konstanter Masse verfolgen, so müssen wir die Ausdrücke für die Änderung von μ , κ_0 und A mit fortschreitendem Verbrauch des Wasserstoffs ableiten.

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß man mit genügender Sicherheit annehmen kann, daß Wasserstoff in Helium und zu einem kleinen Bruchteil in schwerere Elemente umgewandelt wird. Der Bestimmtheit halber nehmen wir an [entsprechend der Umwandlungskette, die gemäß (26) verläuft], daß $\frac{8}{9}$ des verbrauchten Wasserstoffs in Helium und $\frac{1}{9}$ in schwerere Elemente (Russell-Mischung) umgewandelt wird. Unter der Annahme, daß am Anfang unser Stern aus reinem Wasserstoff bestand, bekommen wir für den Wasserstoffgehalt x den Heliumgehalt $y = \frac{8}{9}(1-x)$ und den Gehalt an schwereren Elementen $z = \frac{1}{9}(1-x)$. Für das Molekulargewicht und den Opazitätskoeffizienten haben wir jetzt:

$$\mu = \frac{1}{2x + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}(1-x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}(1-x)} \sim \frac{1}{0,56 + x} \quad (41)$$

und

$$\kappa_0 \sim (1-x). \quad (42)$$

¹⁾ Es gibt insgesamt fünf Unbekannte und sechs Gleichungen, aber die Gleichung (39) wird, wie einfach zu sehen ist, alle Transformationen befriedigen.

Verläuft die für die Energieentwicklung maßgebende Umwandlung zwischen Wasserstoff und Helium oder schwereren Elementen, so ist¹⁾:

$$A \sim x(1-x), \quad (43)$$

Ändern wir jetzt den Wasserstoffgehalt von x auf $\bar{x} = x + dx$, so werden die neuen Werte von μ , κ_0 und A :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mu} &= \left(1 - \frac{x}{0,56+x} \frac{dx}{x}\right) \mu, \\ \bar{\kappa}_0 &= \left(1 - \frac{x}{1-x} \frac{dx}{x}\right) \kappa_0, \\ \bar{A} &= \left(1 + \frac{1-2x}{1-x} \frac{dx}{x}\right) A. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Die in den Klammern stehenden Größen können wir jetzt als b , c und d in unsere Homologietransformationen (40), (40') einsetzen (wegen der konstanten Masse ist $a = 1$). Auf diese Weise bekommen wir²⁾ für die Leuchtkraft und die effektive Temperatur bei geändertem Wasserstoffgehalt³⁾:

$$\bar{L} = \left\{1 - \left[\frac{45+14n}{5+2n} \frac{x}{0,56+x} - \frac{6+2n}{5+2n} \frac{x}{1-x} + \frac{1}{5+2n} \frac{1-2x}{1-x} \right] \frac{dx}{x} \right\} L \quad (45)$$

und

$$\bar{T} = \left\{1 - \left[\left(\frac{5}{4} \frac{45+14n}{5+2n} - \frac{15}{2} \right) \frac{x}{0,56+x} - \left(\frac{5}{4} \frac{6+2n}{5+2n} - 1 \right) \frac{x}{1-x} + \frac{5}{4} \frac{1}{5+2n} \frac{1-2x}{1-x} \right] \frac{dx}{x} \right\} T_{\text{eff}}. \quad (46)$$

Die Formeln (45) und (46) erlauben uns, die *Evolutionsspuren eines Sternmodells mit zentraler thermischer Kernenergiequelle* in den Rahmen des Hertzsprung-Russell-Diagramms einzutragen. In Abb. 7 entsprechen die Spuren a und b (strichpunktierte Linie) Sternmodellen mit H—H- und H—He-Quellen; wie wir oben gesehen haben, muß man im ersten Fall

¹⁾ Für die Umwandlung (25) sollte man $A \sim x^2$ annehmen. — ²⁾ Indem wir die höheren Potenzen von dx/x vernachlässigen. — ³⁾ Diese Gleichungen [wie auch (47), (48)] sehen etwas verschieden aus von den vom Verfasser in seiner ursprünglichen Arbeit abgeleiteten (Phys. Rev. 1. Apr. 1938). Der Unterschied liegt darin, daß hier die Abhängigkeit des energieproduzierenden Gebietes vom Sternradius in Betracht gezogen ist [Faktor r_0^3 in (38)], die früher vernachlässigt war. Der Unterschied ist aber nicht sehr wesentlich, und der allgemeine Verlauf der Evolutionskurven wird dadurch nur sehr wenig beeinflusst.

$n = 3,5$ und im zweiten $n = 7$ setzen¹⁾. Die beiden Spuren sind so angepaßt, daß der Punkt für $x = 0,60$ mit der Lage unserer Sonne im Diagramm zusammenfällt.

Wir sehen, daß am Anfang der Evolution die Leuchtkraft etwas ($\sim 1/2$ Sterngröße) abnimmt, bis sie etwa beim Wasserstoffgehalt 0,8 einen Minimalwert passiert. Für weiter abnehmenden Wasserstoffgehalt wächst

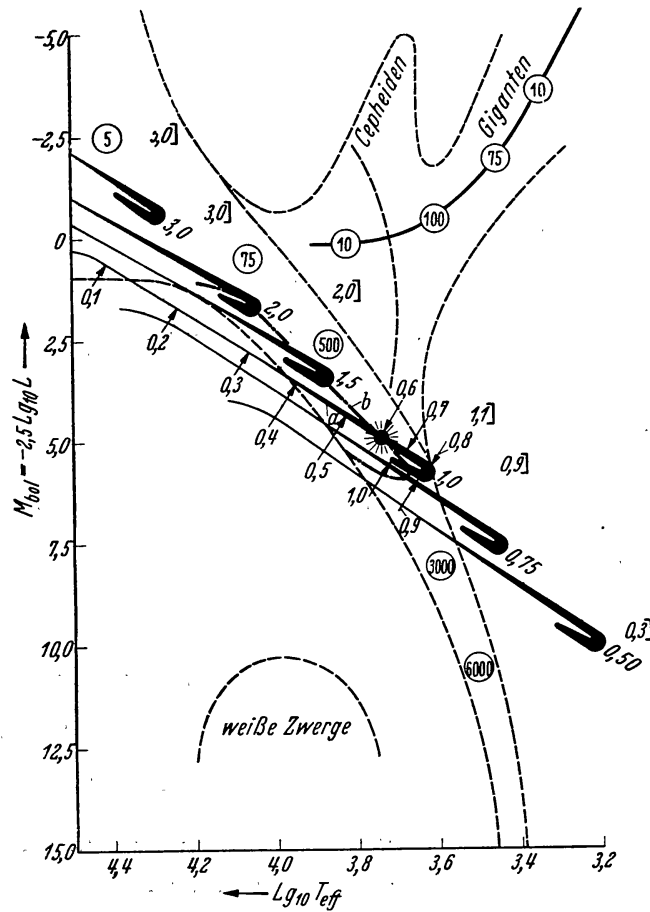


Abb. 7. Evolutionsspuren für verschiedene Massen im Hertzsprung-Russell-Diagramm für H-H-Quelle. Strichpunktierte Linie für H-He-Quelle. Die volle Linie oben rechts ist die Zentrallinie für Giganten, die Zahlen in den Kreisen sind die Verteilungsdichten.

die Leuchtkraft sehr rasch, bis sie am Ende der Evolution ($x \approx 0$) etwa das Hundertfache des Anfangswertes erreicht. Während seiner Evolution durchläuft der Stern eine Spur, die ungefähr parallel zur Hauptserie liegt.

¹⁾ Für H—H-Stöße ist die Umwandlungsgeschwindigkeit mit dem Quadrat vom Wasserstoffgehalt proportional. Deshalb muß man in diesem Fall in der Formel (43) x^2 anstatt $x(1-x)$ schreiben; in (45) und (46) wird damit in Klammern $\frac{1-2x}{1-x}$ einfach durch 2 ersetzt.

Vergleichen wir jetzt Sterne mit demselben Wasserstoffgehalt, aber mit verschiedenen Massen, so geben die Transformationen (40), (40'):

$$\frac{\bar{L}}{L} = \left(\frac{\bar{M}}{M}\right)^{\frac{31+10n}{5+2n}} \quad (47)$$

und

$$\frac{\bar{T}_{\text{eff}}}{T_{\text{eff}}} = \left(\frac{\bar{M}}{M}\right)^{\frac{5}{4} \frac{31+10n}{5+2n} - \frac{11}{2}} \quad (48)$$

Für $n = 3,5$ und 7 hat der Exponent in (47) die Werte $5,5$ und $5,3$; beide Werte geben eine viel zu starke Änderung der Leuchtkraft mit der Masse, da ja diese Beziehung empirisch durch dritte Potenz darstellbar ist¹⁾. Der Exponent in der Beziehung zwischen der effektiven Temperatur und der Masse ergibt sich zu $1,4$ und $1,1$. In Abb. 7 gehören die anderen Spuren zu Sternen mit $3,0$, $2,0$, $1,5$, $0,75$ und $0,50$ Sonnenmassen (nur die H—H-Evolutionsspuren sind für diese Massen in Abb. 7 gegeben).

Vergleichen wir jetzt das erhaltene Bild mit der wirklichen Verteilung der Sterne im Hertzsprung-Russell-Diagramm. Diese Verteilung ist in Abb. 7 schematisch angedeutet. Die meisten Sterne liegen auf der sogenannten Hauptserie, die in Abb. 7 durch das durch punktierte Linien begrenzte, von rechts unten nach links oben laufende Band dargestellt ist. Die Lage der Sterne innerhalb der Hauptserie ist anscheinend durch die Masse bestimmt; in der Tat kann man aus dem verhältnismäßig spärlichen empirischen Material über Sternmassen (die hauptsächlich für Doppelsterne bestimmt sind) ersehen, daß die schwereren Sterne im allgemeinen heller und heißer sind. In Tabelle 2 sind die Sterne angegeben, deren Massenbestimmungen (nach STRÖMGREN) zuverlässig sind.

Daraus bekommen wir durch Mittelung über den Bereich einer Sterngröße die mittleren Massenwerte für verschiedene Leuchtkräfte, die in Abb. 7 in eckigen Klammern angegeben sind.

Wegen des starken Anwachsens der Leuchtkraft eines gegebenen Sternes während seiner Evolution (≈ 5 Sterngrößen), die durch unsere Rechnungen gegeben wird, könnte man zunächst denken, daß eine eindeutige Beziehung zwischen Leuchtkraft und Masse nicht existieren kann. Man muß aber bedenken, daß der Stern in den späteren Stadien seiner Entwicklung, seine Evolutionsspur viel schneller durchläuft. In der Tat

¹⁾ Suchen wir den n -Wert, der die korrekte Leuchtkraft-Masse-Beziehung gibt ($L \sim M^3$), so bekommen wir $n = -4$. Um also mit dem Punktquellenmodell korrekte Resultate zu bekommen, muß man annehmen, daß die Energieentwicklung mit wachsender Temperatur schnell abnimmt!

Tabelle 2.

Stern	M_{bol}	Masse	Stern	M_{bol}	Masse
H D 1337 b	- 8,5	36,3	Capella B	+ 0,24	3,32
H D 1337 f	- 7,0	33,8	Z Vol f	+ 0,2	3,0
Y Cig b	- 5,3	17,3	RS Vol f	+ 0,3	1,7
Y Cig f	- 5,3	17,1	RX Her b	+ 0,5	2,09
V Pup b	- 4,8	18,5	Sirius A	+ 0,85	2,45
V Pup f	- 4,8	18,5	RX Her f	+ 0,9	1,86
u Her b	- 3,6	10,0	WW Aur b	+ 1,1	2,19
σ Agl b	- 3,0	6,2	TX Her b	+ 1,3	2,06
Z Vol b	- 2,8	7,6	WW Aur f	+ 1,4	1,90
σ Agl f	- 2,2	5,1	V Sge f	+ 1,5	2,0
U Oph b	- 2,0	5,4	TV Cas f	+ 1,9	1,2
RS Vol b	- 1,9	6,5	TX Her f	+ 2,2	1,77
u Her f	- 1,9	3,4	Z Her b	+ 2,6	1,6
U Sge b	- 1,6	6,7	RT Lac b	+ 2,7	1,0
U Oph f	- 1,6	4,7	Z Her f	+ 2,8	1,3
β Per b	- 1,1	4,7	RT Lac f	+ 2,9	1,3
TV Cas b	- 0,4	2,4	Procyon A	+ 2,92	1,24
Capella A	- 0,37	4,18	α Cen A	+ 4,62	1,10
β Aur b	- 0,3	2,40	The Sun	+ 4,75	1,00
β Aur f	- 0,3	2,36	α Cen B	+ 5,34	0,95

Tabelle 2'.

Sterngröße Intervall	-9; -8	-8; -7	-7; -6	-6; -5	-5; -4	-4; -3	-3; -2	
Mittl. Sternmasse	(36)	(34)	~	17	18	8	6	
Sterngröße Intervall	-2; -1	-1; 0	0; 1	1; 2	2; 3	3; 4	4; 5	5; 6
Mittl. Sternmasse	5	3	2,4	1,9	1,4	~	4,7	(0,95)

werden da der Verbrauch von Wasserstoff wesentlich durch L/M gegeben ist, die Verweilzeiten des Sternes in den verschiedenen, durch gleiche Wasserstoffänderungen bestimmten Abschnitten der Evolutionsspur der Leuchtkraft umgekehrt proportional sein. Daraus folgt z. B., daß die Wahrscheinlichkeit, einen Stern zu finden mit zwischen 1,0 und 0,5 liegendem Wasserstoffgehalt, etwa zehnmal größer ist als für einen Stern mit Wasserstoffgehalt zwischen 0,5 und 0¹⁾. Da man nur für sehr wenige Sterne gute Massenbestimmungen durchgeführt hat, muß man erwarten, daß diese Werte meistens dem Anfangsteil der Evolutionsspuren entsprechen; in Abb. 7 ist die relative Verweilzeit des Sternes in verschiedenen Teilen der Evolutionsspur durch die Breite der Spur angedeutet. Der Vergleich von

¹⁾ Von diesem Standpunkt aus hat unsere Sonne (die einen Wasserstoffgehalt von etwa 60% besitzt) schon den größeren Teil ihres Gesamtlebens durchlaufen!

den in Abb. 7 wiedergegebenen theoretischen Spuren für verschiedene Sternmassen mit den aus Tabelle 2 entnommenen Massenwerten zeigt, daß die Übereinstimmung, obwohl nicht sehr gut, so doch vielleicht annehmbar ist. Die Abweichungen (etwas reichlich zu schnelle Leuchtkraftänderung mit der Masse und zu langsamer Abfall der Leuchtkraft mit abnehmender Temperatur an der rechten Seite des Diagramms) kann man vielleicht durch den Gebrauch eines zu stark vereinfachten Sternmodells erklären. Z. B. ist es wohl möglich, daß in sehr roten Sternen die Entartung des Elektronengases im Zentralgebiet zustande kommt; das würde die theoretischen Punkte näher an den beobachteten Hauptserienverlauf bringen. Wir wollen hier noch bemerken, daß die oben gegebenen Überlegungen von speziellen Annahmen über eine bestimmte Kernumwandlung nicht abhängen.

In der Tat zeigt ein Blick auf Abb. 7, daß die Evolutionsspuren für verschiedene angenommene Umwandlungsprozesse sich in ihrem Relativverlauf nur sehr wenig unterscheiden. Daraus folgt auch, daß man kaum hoffen kann, die Gigantenreihe durch gewöhnliche Kernumwandlungen zu erklären, wenn diese schon für die Hauptserie gebraucht wurden.

Die Sterne, deren Energiequellen durch zwei verschiedene thermische Kernumwandlungen gegeben sind, werden auf zwei (vertikal verschobene) parallellaufende Bänder verteilt, dagegen läuft der Gigantenast (Abb. 7) beinahe senkrecht zur Hauptserie!

Wir wollen jetzt die Möglichkeit untersuchen, daß die maßgebende Kernumwandlung ein Resonanzeffekt ist, der im Gebiet der inneren Stern-temperaturen (also bei etwa 10 kV) stattfindet.

Gehen wir von der Sternoberfläche nach innen, so erreichen wir das Gebiet, wo die Temperatur den Resonanzwert erreicht. Bei diesem Abstand vom Zentrum, den wir R_s nennen wollen, wird dann eine starke Kernenergiequelle plötzlich eingeschaltet und weiter innen kann man nicht mehr mit dem Punktquellenmodell rechnen. Würde die Resonanzkurve der thermischen Kernumwandlungen ein scharfes Maximum für die Resonanztemperatur besitzen, so würde man erwarten, daß innerhalb des Resonanzradius R_s die Energieentwicklung wieder beinahe aufhören wird. Denn würde viel Energie für $r < R_s$ produziert, so würde ein Temperaturgradient entstehen, der die innere Temperatur sofort über den Resonanzwert hinaus erhöhen würde. Also entspricht eine scharfe Resonanz einem „Schalenquellenmodell“, das durch den relativen Schalenradius R_s/R charakterisiert ist. Nun haben wir aber im zweiten Abschnitt gesehen, daß für thermische Kernumwandlungen die Energieausbeute für $T > T_{res}$ nur

sehr langsam abfällt (obwohl für $T < T_{res}$ die Resonanz scharf begrenzt ist). Wegen dieser Verhältnisse wird die Temperatur innerhalb des Resonanzradius noch weiter ansteigen, während die Energieproduktion nur langsam abfallen wird. Die wirklichen Verhältnisse werden also zwischen dem

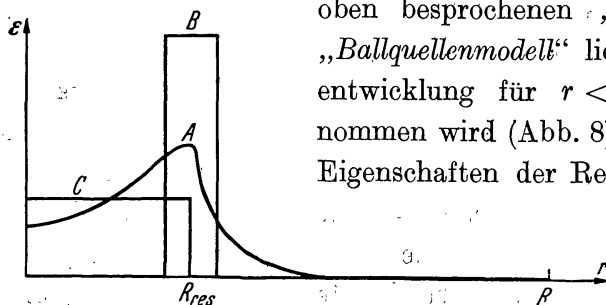


Abb. 8. Energiequellenverteilung im Sterninnern.

- A. Wirkliche Verteilung für Resonanzquelle.
- B. Verteilung im Schalenquellen-Modell.
- C. Verteilung im Kugelquellen-Modell.

oben besprochenen „Schalenmodell“ und dem „Ballquellenmodell“ liegen, bei dem die Energieentwicklung für $r < R_{res}$ als konstant angenommen wird (Abb. 8). Die Unterschiede in den Eigenschaften der Resonanzmodelle und des gewöhnlichen Punktquellen-

modells sind leicht zu erkennen. Im Resonanzmodell verschwindet die exponentielle Abhängigkeit der Energieausbeute

von der Temperatur, die, wie oben besprochen wurde, für das starke Anwachsen der Leuchtkraft während der Evolution verantwortlich ist.

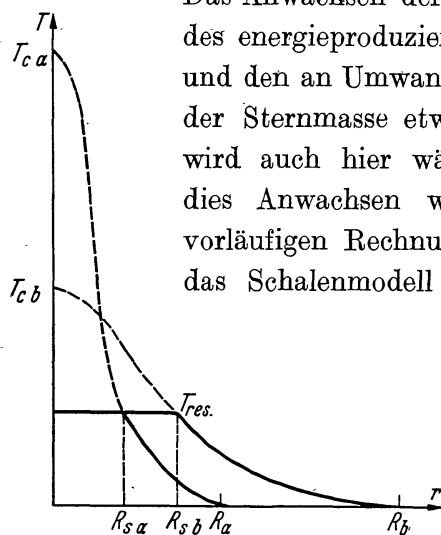


Abb. 9. Schematische Darstellung, wie ein kleiner Stern (a), der nach dem Punktquellenmodell höhere Zentraltemperatur haben sollte, eine kleinere Resonanzschale und deshalb eine kleinere Energieausbeute als ein großer Stern (b) haben kann.

Das Anwachsen der Temperatur wird hier nur den Anfang des energieproduzierenden Gebietes nach außen verschieben und den an Umwandlungsprozessen teilnehmenden Bruchteil der Sternmasse etwas vergrößern. Die totale Leuchtkraft wird auch hier während der Evolution anwachsen, aber dies Anwachsen wird verhältnismäßig klein sein. Die vorläufigen Rechnungen von CRITCHFIELD zeigen, daß für das Schalenmodell die Leuchtkraft während der ganzen Evolution (von $x = 1$ bis $x = 0$) nur auf das Vier- bis Fünffache anwachsen wird, während der Sternradius beinahe konstant bleibt.

Die Resonanzhypothese würde uns auch erlauben, das oben besprochene „Paradoxon“ zwischen Capella und der Sonne zu verstehen. Nach dem Schalenmodell verlieren nämlich die EDDINGTONschen Werte für die Zentraltemperaturen ihren physika-

lischen Sinn. Integriert man die Gleichgewichtsgleichungen von der Oberfläche nach innen, so kann man die Resonanztemperatur in Capella (die etwa zehnmal größeren Radius als die Sonne hat) in viel größerem

absolutem Abstände vom Zentrum als in der Sonne erreichen (Abb. 9). Das energieproduzierende Gebiet in Capella wird also größer als in der Sonne, was zu größerer Leuchtkraft führen muß.

Wir wollen noch bemerken, daß wegen des Fehlens der exponentiellen Abhängigkeit der Energieausbeute von der Temperatur in den Schalenmodellen die wohlbekanntere „*Superstabilitätsgefahr*“ nicht vorkommen wird (vgl. 6.).

Beim heutigen Stande unserer Kenntnis ist es schwer zu sagen, wie weit die Resonanzhypothese zur Erklärung der Sternverteilung im Hertzsprung-Russell-Diagramm nötig ist. Würde es gelingen, die Hauptserie auf Grund der gewöhnlichen thermischen Kernumwandlungen zu verstehen, so wäre es durchaus möglich, daß man die Resonanzen für die Giganten annehmen kann, um die außerordentlich große Leuchtkraft und die eigentümliche Verteilung im Hertzsprung-Russell-Diagramm (vgl. Abb. 7) zu erklären.

5. *Superdichter Materiezustand in den Sternen.*

Wie schon im vorigen Abschnitt erwähnt wurde, kann man für die Sterne der Hauptserie und Riesenklasse ein Modell konstruieren, für das die Bedingungen für den idealen Gaszustand (für Elektronengas und das Gas der Restkerne) bis zum Zentrum erfüllt sind. Eine Ausnahme bilden die sogenannten weißen Zwerge, für welche die Idealgasgleichung durch die Zustandsgleichung des entarteten Fermi-Gases für Elektronen ersetzt werden muß. Alle solche Modelle sind dadurch charakterisiert, daß im Zentrum keine Singularität angenommen wird, oder in anderen Worten, daß die Grenzbedingung $M_r = 0$ bei $r = 0$ immer erfüllt ist. Obwohl die Zentraldichte besonders bei den weißen Zwergen sehr große Werte erreichen kann (für Sirius B ist z. B. $\bar{\rho} = 1,7 \cdot 10^5$ und $\rho_c \approx 10^7$ gm/cm³), wurde die Dichteänderung bis zum Zentrum immer als stetig angenommen. Wir wollen hier die zuerst von LANDAU vorgeschlagene Möglichkeit diskutieren, daß im Sternzentrum ein außerordentlich dichter, scharfabgegrenzter „Massenpunkt“ oder „*Sternkern*“ existieren kann. Dazu müssen wir uns zunächst an die Eigenschaften der Materie bei sehr großen Dichten erinnern. Schon bei verhältnismäßig kleinen Dichten (wenn der mittlere Abstand zwischen den Atomen kleiner als der Durchmesser der Elektronenschalen wird), wird die Materie gänzlich ionisiert und man kann jede Substanz als ein Gemisch aus Elektronengas und dem Gas von nackten Restkernen betrachten. Wegen der sehr kleinen Durchmesser der Elektronen und Kerne und der Ausmittlung der Coulomb-Kräfte kann man die beiden Gase als ideal betrachten. Da die Bewegung unserer Teilchen quantisiert sein muß,

wird es zu jeder Dichte einen minimalen Gasdruck geben, entsprechend dem Zustande, bei dem alle niedrigsten Quantenniveaus durch die Teilchen besetzt sind.

Entartetes Fermi-Gas. Die einfache Rechnung gibt für Energiedichte und Gasdruck eines solchen Zustandes die Formeln:

$$U_F = \frac{3^{5/3} \pi^2}{10} \frac{\hbar^2}{m^{8/3}} \varrho^{5/3}, \quad (49)$$

$$P_F = \frac{3^{2/3} \pi^2}{5} \frac{\hbar^2}{m^{8/3}} \varrho^{5/3}, \quad (49')$$

wo m die Teilchenmasse ist. Wir sehen, daß man in diesem Stadium den Partialdruck des Kerngases gegen den des Elektronengases vernachlässigen kann¹⁾.

Bei weiterem Anwachsen der Dichte erreichen wir das Stadium, in dem der mittlere Abstand zwischen den Teilchen von der Größenordnung der Comptonschen Wellenlänge $2\pi\hbar/mc$ wird. Die kritische Dichte, bei der der Elektronenteil des Gases relativistische Geschwindigkeiten bekommt, ist $\varrho_{0,E} \simeq 10^5 \text{ g/cm}^3$; für Protonen werden dieselben Verhältnisse für die Dichte bei etwa $\varrho_{0,P} \simeq 10^{15} \text{ g/cm}^3$ vorkommen. Wenn die Gasteilchen sich relativistisch benehmen, muß man die oben gegebenen Formeln durch die Formeln für das *relativistisch entartete Fermi-Gas* ersetzen:

$$U_{F,R} = \frac{3^{4/3} \pi}{4} \frac{\hbar c}{m^{4/3}} \varrho^{4/3}, \quad (50)$$

$$P_{F,R} = \frac{3^{1/3} \pi}{4} \frac{\hbar c}{m^{4/3}} \varrho^{4/3}. \quad (50')$$

Da diese Formeln nur von der Anzahl der Teilchen ($N \sim \varrho/m$) abhängen, wird der Druck des schweren Anteils des Gases dem Elektronendruck vergleichbar.

Die Druck-Dichteabhängigkeit für den niedrigsten energetischen Zustand des Elektronen- und Protonengases mit gleichen Teilchenzahlen (Anfangszustand reiner Wasserstoff) ist in Abb. 10 schematisch wiedergegeben.

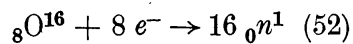
Die Kurven „ F, E “ und „ F, R, E “ entsprechen dem nichtrelativistischen und relativistischen Fermigas für Elektronen. Die Kurven „ F, P “ und „ F, R, N “ entsprechen den schweren Teilchen von Protonenmasse. Für $\varrho > \varrho_{0,P}$ fallen die beiden Kurven zusammen.

¹⁾ In der Tat gibt (49') $P_E \sim N^{5/3} m^{-1}$, wobei N die Teilchenzahl ist, die für Elektronen und Kerne von derselben Größenordnung ist.

Nun müssen wir in Betracht ziehen, daß bei sehr großen Drucken die Elektronen eine Tendenz haben werden, mit schweren Teilchen zu assoziieren, weil solche Assoziation zur Abnahme des Gesamtdruckes führen wird. Für den einfachsten Fall einer solchen Umwandlung:



ist die Hinzufügung von etwa 0,8 MV pro Neutron nötig und man kann erwarten, daß solche Prozesse anfangen werden, bald nachdem die Elektronen relativistische Geschwindigkeiten erreichen. Nun ist die oben gegebene Energie nicht genügend, um auch die schweren Kerne in Neutronengas umzuwandeln. Die Umwandlung



braucht z. B. 143 MV oder 9 MV pro Neutron¹⁾ und wir können schließen, daß vollständige Umwandlung von Materie in Neutronengas nur bei etwas höheren Drucken erreicht wird. Für

die Dichten, bei denen die schweren Teilchen relativistische Geschwindigkeiten bekommen, werden die Assoziationsprozesse jedenfalls beendet.

Nachdem die Assoziation angefangen hat, wird der Gesamtdruck wegen des raschen Verschwindens von Elektronen zuerst abnehmen und erst bei Annäherung an $\rho_{0,P}$ wieder anwachsen, wie es in Abb. 10 durch die Kurve ($F \cdot R \cdot E + F \cdot P + F \cdot N$) angedeutet ist. Der so erhaltene Verlauf der Druck-Dichtekurve ist in vielen Beziehungen der VAN DER WAALSschen Kurve für die Verflüssigung von gewöhnlichen Gasen analog.

Wir wollen jetzt das mögliche Gleichgewicht zwischen dem Gasdruck im Sterninnern und dem Gravitationsdruck, der durch das Gewicht

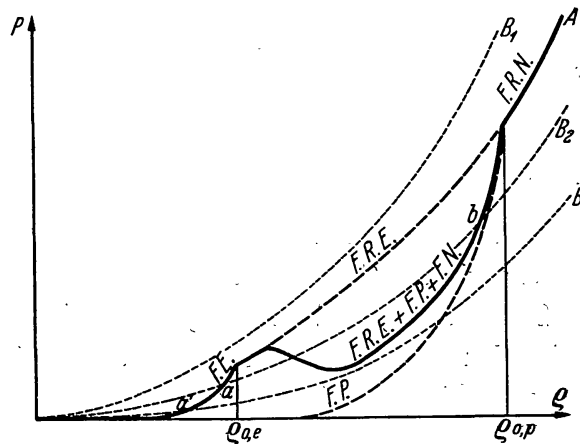


Abb. 10. Schematische Darstellung der Druck-Dichte-Abhängigkeit des Fermi-Gases aus Elektronen- und Protonen-Gemisch. Die Kurven B_1 , B_2 , B_3 geben die Gravitationsdruck-Dichte-Abhängigkeit für Sterne verschiedener Klasse.

¹⁾ Dies Resultat kann man auch bekommen, indem man den Kern in separate Neutronen und Protonen zerlegt (etwa 8 MV pro Teilchen) und dann die Protonen mit Elektronen neutralisiert. Nun sollen zwei Elektronen genügend Energie haben, um ein α -Teilchen zu dissoziieren und um zwei entstandene Protonen zu neutralisieren; das gibt pro Neutron $\frac{4 \cdot 8 + 2 \cdot 0,8}{4} \approx 8,5$. Das zeigt, daß man für andere schwere Kerne ungefähr dieselbe Energie braucht.

der äußeren Schichten verursacht wird, näher untersuchen. Bei diesen Betrachtungen werden wir uns zunächst nur für den Endzustand des Sternes interessieren, wenn alle durch Kontraktion und andere Quellen lieferbare Energie schon ganz ausgestrahlt ist. Wir werden als erste Annäherung die Dichteverteilung im Stern als gleichförmig annehmen. Mit dieser Annahme haben wir für die gesamte potentielle Energie der Gravitationskräfte und den Gravitationsdruck im Innern die Formeln:

$$U_G = - \frac{3}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} G M^{5/3} \rho^{1/3}, \quad (53)$$

$$P_G = - \frac{1}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} G M^{2/3} \rho^{4/3}, \quad (53')$$

wo G die Gravitationskonstante und M die Sternmasse ist.

Wir sehen, daß der Gravitationsdruck mit derselben Potenz der Dichte variiert wie der Gasdruck des relativistisch entarteten Fermi-Gases. Wird die Sternmasse größer als eine gewisse *kritische Masse* M_0 , so wird der Gravitationsdruck für alle Dichten größer als der Gasdruck (Kurve B_1 in Abb. 10). Für solche Massen gibt es keinen stabilen Endzustand und der Stern wird eine unbegrenzte Kontraktion erleiden. Für die kritische Masse bekommen wir durch Vergleich von (50') und (53')

$$M_0 \simeq \frac{3 \cdot 5^{3/2} \pi \hbar^{3/2} c^{3/2}}{16 G^{3/2} m^2} \simeq 1,2 \frac{1}{\mu^2} M_\odot, \quad (54)$$

wobei μ das mittlere Molekulargewicht und M_\odot die Sonnenmasse ist. Die genaueren Rechnungen von CHANDRASEKHAR, bei denen die Dichteverteilung im Stern in Betracht gezogen wird, geben den besseren Wert:

$$M_0 \simeq 5,7 \frac{1}{\mu^2} M_\odot. \quad (54')$$

Wir haben oben gesehen, daß die Anwesenheit von Wasserstoff anscheinend die notwendige Bedingung für die starke Kernenergieentwicklung darstellt. Da die weißen Zwerge sehr kleine Leuchtkraft besitzen und anscheinend das Ende der Sternevolution darstellen, würde man erwarten, daß es innerhalb dieser Sterne sehr wenig oder sogar keinen Wasserstoff gibt. Das mittlere Molekulargewicht μ sollte dann jedenfalls größer als $4/3$ sein und die *kritische Masse* (nach 54') *wird drei Sonnenmassen*.

Ist die Sternmasse kleiner als die kritische Masse, so wird, wie aus Abb. 10 zu ersehen ist (Gravitationsdruckkurve B_2), der Kontraktionsprozeß, der bei kleinen Dichten angefangen hat, bei einer gewissen Dichte zum Stillstand kommen. Diese Dichte entspricht dem Schnittpunkt (a

oder a') der Gravitationsdruckkurve mit der Kurve für nichtrelativistisches Fermi-Gas von Elektronen. Dieser stabile Zustand, dem mittlere Dichten von einigen Hunderttausend entsprechen, ist wahrscheinlich in den bekannten weißen Zwergen realisiert.

Wir sehen aber, daß hier noch ein anderer stabiler Zustand existieren kann (Punkt b in Abb. 10), welcher viel größeren Zentraldichten entspricht ($\rho_c \simeq \rho_{0,P} \simeq 10^{15} \text{ g/cm}^3$); in diesem Fall ist ein Gebiet nahe dem Sternzentrum, ein „Sternkern“, aus Neutronengas aufgebaut. Für die Existenzmöglichkeit eines solchen Zustandes können wir die Bedingung aufschreiben, daß die Gesamtenergie unserer Masse ein negatives Minimum bei großen Dichten besitzt. Die Gesamtenergie kann wohl in der Form:

$$U = U_G + U_F \cdot \frac{M_k}{\rho} + 16 m c^2 \frac{M_k}{m} = - \frac{3}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} G M_k^{5/3} \rho^{1/3} + \frac{3^{5/3} \pi^2 \hbar^2}{10 m^{3/3}} M \rho^{2/3} + 18 m_e c^2 \frac{M_k}{m} \quad (55)$$

geschrieben werden¹⁾. Für konstantes M_k finden wir das Minimum bei:

$$\rho_{\min} = \frac{4}{3^3 \pi^5} \frac{G^3 m^8 M^2}{\hbar^6} \quad (56)$$

Schreiben wir die Bedingung, daß U im Minimum *positiv* ist:

$$- \left(1 - \frac{1}{2} \right) \frac{4^{2/3}}{5 \cdot 3^{1/3} \pi^{4/3}} \frac{G^2 m^{8/3} M_k^{7/3}}{\hbar^2} + 18 m_e c^2 \frac{M_k}{m} < 0, \quad (57)$$

so bekommen wir für die untere Grenze von M_k :

$$M_k > \frac{(180)^{3/4} 3^{1/4} \pi m_e^{3/4} c^{3/2} \hbar^{3/2}}{2 G^{3/2} m^{11/4}} \sim 0,06 M_\odot. \quad (58)$$

Wir sehen also, daß ein solcher Sternkern bis etwa 20mal kleinere Massen als die Sonne haben kann. Es ist aber klar, daß solche zentrale Kondensation wegen der hohen *Druckschwelle* bei $\rho_{0,e}$, nicht durch gewöhnliche Kontraktion aus kleinen Dichten entstehen kann. Nimmt man die Existenz von solchen Sternkernen in allen Sternen an, so muß man auch annehmen, daß sie bei der Sternentstehung durch irgendwelche äußeren Kräfte erzeugt werden. Man könnte z. B. nach der Theorie des *expandierenden Universums* daran denken, daß in früher Vergangenheit unser Raum ganz klein und mit Materie von außerordentlich großer Dichte erfüllt war. Im Expansions-

¹⁾ Mit Hilfe von (53), (49) und (52). Hier steht M_k/ρ für das Gesamtvolumen M_k/m für die Anzahl von Neutronen und $18 m_e c^2$ für 9 MV, m und m_e -Neutronen- und Elektronenmasse.

prozeß wäre dann dieser den ganzen Raum erfüllende „Weltkern“ in kleine Teile zerfallen, welche jetzt mit weniger dichten Atmosphären bedeckt, als leuchtende Sterne beobachtet werden. Natürlich hat diese Hypothese den Nachteil, daß, wenn wir schon zur Entstehungszeit der Sterne zurückgehen, wir ebensogut die Sterne aus Lithium-Wasserstoff-Gemisch oder aus Uran machen könnten.

Wir wollen nun die Eigenschaften des Sternmodells mit dem LANDAUSCHEN Kern näher untersuchen, wie es vom Verfasser zusammen mit TELLEËR gemacht worden ist. Man kann hier wieder die Gleichgewichtsgleichungen (34) für die den Kern umgebende Materie gebrauchen, nur muß man in den Grenzbedingungen (37) die Bedingung $M_{r=0} = 0$ durch

$$M_{r=0} = M_k \quad (59)$$

ersetzen. Ist man genügend weit vom Sternzentrum entfernt, so wird die zentrale Kondensation die Lösungen der Gleichgewichtsgleichungen nicht sehr beeinflussen. Bei kleinem r/R wird aber der Effekt der Singularität bei $r = 0$ sehr stark bemerkbar, da die Gleichung (34a) unendliche Druckgradienten geben wird. Bei diesen kleinen Abständen, wo die Wirkung der Sternkernmasse die Hauptrolle spielt, können wir M_r mit genügender Annäherung durch die Konstante M_k ersetzen. Die Gleichgewichtsgleichungen können jetzt einfach durch Potenzansätze integriert werden und wir bekommen:

$$\rho \sim r^{-3,25}, \quad T \sim r^{-1}. \quad (60)$$

Man kann auch zeigen, daß im Gebiet, wo diese Gleichungen gelten keine Konvektion stattfinden und der Strahlungsdruck immer klein bleiben wird. Da in dem durch die Gleichungen beschriebenen Gebiet die Dichte sehr viel schneller als die Temperatur ansteigt ($\rho \sim T^{3,25}$), werden wir in gewissem Abstände vom Zentrum in ein Gebiet kommen, wo die Bedingungen für die Entartung des Elektronengases erfüllt sind¹⁾. Bei weiterer Annäherung zum Zentrum werden nun Temperatur und Dichte viel langsamer steigen wegen der kleinen Opazitäten des entarteten Elektronengases [vgl. Formel (34d)], bis endlich die Oberfläche des Sternkerns erreicht ist. In der Nähe des Sternkerns werden die Prozesse der Neutronenbildung stattfinden und die neugebauten Neutronen werden sich am Kern anlagern und seine Masse ständig vergrößern. Dieser Kondensationsprozeß wird wie die gewöhnliche Gaskondensation an einer Flüssigkeitsoberfläche

¹⁾ Nach (49) haben wir für das entartete Fermi-Gas $p = C \cdot \rho^{5/3}$ oder (wegen $T \rho = p$) $\rho = C' T^{1,5}$. Wenn die Dichte annähernd wie $T^{3,25}$ anwächst, müssen wir zu der Stelle kommen, wo die Entartungsbedingung erfüllt ist.

durch die äußere Abkühlung (Strahlung) des Sternes gesteuert. Von diesem Standpunkt aus wird die Energieproduktion durch selbstregulierende Kontraktion und Kondensation verursacht und sie unterscheidet sich von der alten HELMHOLTZ'schen Hypothese nur dadurch, daß man viel größere Massenkonzentrationen und deshalb eine viel größere Freimachung von Gravitationsenergie bekommt.

Nun wollen wir fragen: wie werden in einem solchen Modell die Kernumwandlungen verlaufen? Mit Hilfe der Gleichung (50) kann man ausrechnen, daß die Temperaturen und Dichten in inneren Gebieten sehr große Werte erreichen; z. B. bekommt man für unsere Sonne (mit der Annahme $M_k = 1/20 M_\odot$) an der Grenze, wo die Entartung des Elektronengases anfängt,

$$T \simeq 10^9 \text{ }^\circ\text{C} \quad \text{und} \quad \rho \simeq 10^9 \text{ g/cm}^3.$$

Auf Grund der Betrachtungen in 2. ist es aber klar, daß bei solchen Verhältnissen alle möglichen Umwandlungen (sogar Protoneneindringungen in Blei) mit sehr großen Geschwindigkeiten verlaufen würden und daß die totale Energieausbeute millionenmal größer als die Strahlung unserer Sonne sein würde. Man könnte das nur vermeiden, wenn man annimmt, daß das innere Gebiet, in dem solche extremen Verhältnisse vorhanden sind, mit dem „schon verbrannten Stoff“ also nur mit schweren Elementen erfüllt ist. Wenn das Gebiet, wo die Beziehungen (60) erfüllt sind, sich weniger als bis zu 17% des Sonnenradius erstreckt, werden zwischen seiner äußeren Grenze und der Schale von $0,17 R_\odot$ Konvektionsströme laufen, die auch die innersten Teile des Sternes berühren werden. Wir sehen also, daß der einzige Weg die Widersprüche zu vermeiden die Annahme ist, daß alle Materie innerhalb von $0,17 R_\odot$ (also etwa 10% der gesamten Sonnenmasse) aus schweren Elementen besteht.

Eine solche Annahme ist aber sehr schwer mit den astronomischen Daten in Übereinstimmung zu bringen. Andererseits ist es nicht ausgeschlossen, daß für die Giganten, die wegen ihrer großen Masse ($> M_\odot$) früher oder später den Superdichte-Materienzustand im Zentrum bekommen werden und deren mittlere Energieproduktion außerordentlich groß ist, der LANDAU'sche Vorschlag eine wichtige Rolle spielt.

6. Pulsationen und Explosionen von Sternen.

Neben den gewöhnlichen Sternen, deren Leuchtkraft sich während der astronomischen Beobachtungsperiode nicht ändert, kennt man Objekte, die sehr rasche und manchmal sehr große Leuchtkraftänderungen zeigen.

Dazu gehören erstens die *δ -Cephei-Veränderlichen*, deren periodische Leuchtkraftänderungen man nach EDDINGTON auf regelmäßige Pulsationen zurückführen kann. Obwohl die *Pulsationstheorie* in guter Übereinstimmung mit dem Beobachtungsmaterial steht, ist die Frage nach den Ursachen dieser Pulsationen ziemlich dunkel. Es ist schwer zu glauben, daß diese Pulsationen durch die Gravitationswirkungen zwischen zwei zufälligerweise nahe aneinander vorbeigegangenen Sternen verursacht worden sind. In diesem Falle müßte man erwarten, daß solche Sterne in allen verschiedenen Teilen des Hertzsprung-Russell-Diagramms vorkommen sollten. In Wirklichkeit liegen alle Cepheiden in einem schmalen, streng definierten Band (mit $L \sim T^{-10}$), das dies leere Gebiet im H. R.-Diagramm¹⁾ vom Gigantengebiet abgrenzt (Abb. 7). Der Gedanke liegt nahe, daß die Pulsationen der δ -Cephei-Sterne einfach die Nachwirkung irgendeiner inneren Umordnung darstellen, die in einem bestimmten Evolutionsstadium massiger Sterne vorkommen kann. Wenn, wie man aus den Beobachtungen schließen kann, die Sterne im oberen Teil der Hauptserie (Wolf-Rayet-Sterne) dieselben Massen wie die Cepheiden und roten Giganten besitzen, würde man erwarten, daß in einem gewissen Entwicklungsstadium die Sterne über den „leeren Platz“ im Hertzsprung-Russell-Diagramm „hinüberspringen“ sollten. Cepheidenpulsationen könnten in diesem Falle als die durch einen solchen „Sprung“ angeregten Nachschwingungen interpretiert werden. Das bringt uns zu der Frage nach un stetigen Änderungen im Evolutionsprozeß oder Sternexplosionen. In der Tat wissen wir, daß es sehr oft passiert, daß ein Stern plötzlich seine Leuchtkraft einige millionenmal vergrößert und dann langsam (im Zeitintervall von einigen Monaten) wieder zu kleiner Leuchtkraft abklingt.

Die Sterne, die vor der Explosion beobachtet wurden, waren die Sterne der Hauptserie mit verhältnismäßig kleiner Masse (wie wir aus Abb. 7 ersehen können, gibt es viel mehr solche Sterne als schwerere). Nach den Untersuchungen von GROTRIAN (über Nova Herculis) scheint es sehr wahrscheinlich, daß das Endresultat des Nova-Phänomens ein von einer Nebelhülle umgebener weißer Zwerg ist. Wenn eine solche Explosion bei einem massigen Stern (vom oberen Teil der Hauptserie) passiert, so würde man erwarten, daß eine solche Nova in ihrem Maximum eine Leuchtkraft besitzt, die mit der Leuchtkraft einer ganzen Galaxie vergleichbar wird.

¹⁾ Das Gebiet, das von unten durch die 0. Sterngröße und links und rechts durch die Klassen A und F begrenzt ist.

Das Phänomen sollte aber sehr selten beobachtet werden, wegen der verhältnismäßig kleinen Anzahl von sehr massigen Sternen. Solche Erscheinungen, die „*Supernova*“ genannt werden, hat man aber nach Angabe von BAADE-ZWICKY in einigen extragalaktischen Nebeln beobachtet; das Aufleuchten einer Supernova kann die Leuchtkraft eines Spiralnebels manchmal verdoppeln.

Wir wollen jetzt fragen, wie man die Entstehung solcher Explosionen auf Grund der vorhergehenden Überlegungen verstehen kann. Wir haben gesehen, daß ein Stern mit thermischer Kernenergiequelle mit Abnahme seines Wasserstoffgehalts seine Leuchtkraft langsam vergrößert, wobei das Maximum beim Verschwinden des letzten Wasserstoffatoms vorhanden ist. Von diesem Moment an muß unser Stern, der keine Kernquellen mehr besitzt, eine gewöhnliche HELMHOLTZsche Kontraktion anfangen, die aber durch die freigemachte Gravitationsenergie ziemlich verlangsamt wird. Einer solchen Kontraktion, die sich in jedem gegebenen Augenblick nur sehr wenig von einem Gleichgewichtszustande unterscheidet, entspricht eine gewisse Dichteverteilung innerhalb des Sternes. In dem Moment aber, ehe „das letzte Wasserstoffatom“ verbraucht ist, hat der Stern eine Dichteverteilung, die dem Punktquellenmodell entspricht. Man kann also erwarten, daß am Anfang der Kontraktion eine schnelle innere Massen-umordnung eintreten wird, die mit der Ausgabe von erheblicher Energie verbunden sein muß. Diese plötzliche Energieausgabe könnte man als die Ursache der Nova und Supernova betrachten. Die weitere Evolution des Sternes wird jetzt von seiner Masse abhängen. Ist die Masse kleiner als die im letzten Abschnitt betrachtete kritische Masse M_0 , so wird der Stern in den Zustand eines weißen Zwerges mit langsam verschwindender Gravitationsenergieausgabe übergehen. Für Massen, die größer als M_0 sind, wird man dagegen die Entstehung des LANDAUSchen Sternkernes erwarten. Der immer weiter wachsende Sternkern wird praktisch eine unbegrenzte Quelle von Gravitationsenergieproduktion sein und der Stern wird, nach einer Periode von Pulsationen (Cepheiden) seine Leuchtkraft immer weiter vergrößern. Wahrscheinlich ist das Wachsen des Kernes mit einer Verdünnung und Ausdehnung der Sternatmosphäre verbunden und der Stern wird dem Gigantenaste entlang sich zu größeren Leuchtkräften und größeren Radien (kleineren effektiven Temperaturen) entwickeln.

Das weitere Schicksal solcher Sterne, dessen Berechnung die Anwendung der allgemeinen Relativitätstheorie erfordert, wollen wir hier nicht diskutieren.

Schlußbemerkungen.

Aus den Betrachtungen im vorliegenden Bericht können wir sehen, daß unsere heutige Kenntnis über die Eigenschaften der Materie ausreicht, um die Fragen der Sternentwicklung in Angriff zu nehmen. Wir dürfen hoffen, daß die enge Zusammenarbeit von Astronomen und Physikern uns bald zur vollständigen Beantwortung dieser interessanten und wichtigen Frage bringen wird.

Zum Schluß möchte ich meinem Freund Dr. E. TELLER für wertvolle Diskussionen über viele in diesem Bericht berührte Probleme meinen herzlichen Dank aussprechen.

Literaturverzeichnis.

1. G. GAMOW, Structure of Atomic Nucleus and Nuclear Transformations. Oxford Press 1937; C. v. WEIZSÄCKER, Die Atomkerne. Akad. Verlag 1937; N. BOHR und F. KOLCKAR, On the transmutations of atomic nuclei. Det. Kgl. Danske. Vid. Selskab. XIV. 10, 1937. — 2. R. D. ATKINSON und F. HOUTERMANS, ZS. f. Phys. 54, 656, 1929; G. GAMOW und E. TELLER, Phys. Rev. 53, 608, 1938. — 3. C. v. WEIZSÄCKER, Phys. ZS. 38, 176, 1937; H. BETHE und CH. CRITCHFIELD, Phys. Rev. (im Druck); H. BETHE, ebenda (im Druck). — 4. A. EDINGTON, The Internal const. of Stars. Cambr. Press 1926; B. STRÖMGREN, Erg. der Exakt. Naturwiss. XVI, Bd. 465, 1937; G. GAMOW, Phys. Rev. 53, 595, 1938; CH. CRITCHFIELD, ebenda (im Druck). — 5. F. HUND, Erg. Exakt. Naturwiss. XV. 189, 1936; L. LANDAU, Nature 141, 333, 1938; G. GAMOW und E. TELLER, Bulletin Am. Phys. Soc. 13, 23, 1938. — 6. G. GAMOW, Phys. Rev. (in Druck).